المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة

LINEAR EQUATIONS OF SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

الصيغة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة هي:

$$\textbf{(A)} \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

حيث ان a, b, c ثوابت و $a \neq 0$ لانه اذا كان $a = 0$ سوف

تصبح المعادلة من الرتبة الاولى.

طريقة الحل:

المعادلة (A) خطية ويمكن حلها بالخطوات التالية:

نفرض ان $y = e^{mx}$ فان المعادلة (A) تصبح

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

لكي نجد الحل $y = e^{mx}$ يجب ان نجد قيمة m وكماياأتي:

$$(am^2 + bm + c)e^{mx} = 0$$

الدالة الاسية $e^{mx} \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وعليه فان

$$(*) \quad am^2 + bm + c = 0$$

المعادلة (*) تسمى المعادلة المميزة (Auxiliary Equation) وهي متعددة حدود من الدرجة الثانية ويمكن حلها بالدستور:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

والان لدينا ثلاث حالات لجذور المعادلة بالاعتماد على المقدار المميز $\sqrt{b^2 - 4ac}$:

1. اذا كان $b^2 - 4ac > 0$ فان:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويكون الحل بالشكل:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

<u>Example</u> Solve the following differential equation:

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (*)$$

Solution:

Let $y = e^{mx} \to y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^{mx}$

Substitute in (*)

$$m^2 e^{mx} - 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$$

$\to (m^2 - 5m + 6) = 0, \ e^{mx} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\to m^2 - 5m + 6 = 0$

$(m-2)(m-3) = 0 \to m = 2, \ m = 3$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

2. اذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فان:

$$m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$$

ويكون الحل بالشكل:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}}$$

Example Solve the following differential equation:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^{mx}$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx}, y'' = m^2e^{mx}$

Substitute in the above equation

$$m^2e^{mx} - 2me^{mx} + e^{mx} = 0$$

$\rightarrow (m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0,\ e^{mx} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$

$\rightarrow (m - 1)^2 = 0$

$\rightarrow m = 1, m = 1$

$$\boxed{\therefore y = (c_1 + c_2x)e^x}$$

3. اذا كان $b^2 - 4ac < 0$ فان m_1, m_2 جذور عقدية مترافقة و هذا يعني ان:

$$m_1 = \alpha + i\beta \,, m_2 = \alpha - i\beta$$

ويكون الحل بالشكل:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]}$$

Example Solve the following differential equation:

$$y'' + k^2 y = 0$$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx} \,, y'' = m^2 e^{mx}$

Substitute in the above equation

$$m^2 e^{mx} + k^2 e^{mx} = 0$$

$$\rightarrow (m^2 + k^2)e^{mx} = 0, \; e^{mx} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow m^2 + k^2 = 0 \rightarrow m^2 = -k^2 \rightarrow m = \pm\sqrt{-k^2} = \pm\sqrt{-1}\,k$$

$$\rightarrow m = \pm ik \,, \quad \alpha = 0 \;\&\; \beta = k$$

$$\therefore y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$$

$$y = A\cos kx + B\sin kx$$

الجدول الاتي يوضح ملخص الحالات الثلاث لجذور المعادلة المميزة:

جذرا المعادلة المميزة	المميز	الحلول	الحل العام
حقيقيان مختلفان	$b^2 - 4ac > 0$	$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
عقديان مترافقان	$b^2 - 4ac < 0$	$e^{\alpha x} \cos \beta x , e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$
متساويان $\mathrm{m} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$ (جذور مكررة)	$b^2 - 4ac = 0$	e^{mx}, xe^{mx}	$y = (c_1 + c_2 x)e^{mx}$