المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

:(Differential Equations of First Order and First Degree)

وهي المعادلات التي تكون بإحدى الأشكال الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

أو $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

أو $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$

حيث ان M, N, f دوال تحتوي على x أو y أو كلاهما أو قد تكون دوال ثابتة.

طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

(١) المعادلات التفاضلية التي تنفصل متغيراتها:

هــي المعــادلات مــن النــوع: $f(y)dy + g(x)dx = 0$ وحلهــا يكــون بتكامــل الطرفين ، أي أنَّ (حيث C ثابت اختياري) $\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = C$.

Examples: Solve the following equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow xdy = 2ydx$

فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على yx ينتج ان:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C \Rightarrow \ln|y| - 2\ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|x^2| = C \Rightarrow \ln\frac{y}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x^2} = e^C$$

$y = x^2 e^C$ (ثابت اختياري C)

ويمكن ان نفرض الثابت الاختياري $e^c = c_1$ فيكون الحل:

$$\boldsymbol{y = c_1 x^2}$$

Examples: Solve the following equation: $(x+1)\frac{dy}{dx} = x^2(y^2+1)$

الحل: بضرب الطرفين في dx ينتج ان: $(x+1)dy = x^2(y^2+1)dx$

فصل الطرفين يتم بقسمة الطرفين على $(x+1)(y^2+1)$ ينتج:

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x^2 dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{x^2 dx}{x+1}$$

التكامل الثاني $\int \frac{x^2}{x+1} dx$ يحل بالقسمة الطويلة لان درجة البسط اكبر من درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+1 & x^2 \\ & x^2+x \\ \hline & -x \\ & -x-1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

ونستخدم القانون التالي لتبسيط المقدار

$$\text{الكسر} = \left(\text{ناتج القسمة} + \frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}} \right)$$

وعليه نحصل على

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int (x-1+\frac{1}{x+1})\,dx \Rightarrow \tan^{-1} y = \int x\,dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

$$\Rightarrow y = \tan(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C)$$

Examples: Solve the following equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{x - xy^2}{x^2y - y}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)} \Rightarrow y(x^2-1)dy = x(1-y^2)dx$

فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $(1-y^2)(x^2-1)$ ينتج ان:

$$\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{ydy}{1-y^2} = \int \frac{xdx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2ydy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

Examples:

$$\sin^2 x \cos y \, dx + \sin y \sec x \, dy = 0$$

الحل: فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $\cos y \sec y$ ينتج ان:

$$\frac{\sin^2 x}{\sec x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0 \Rightarrow \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3 x}{3} - \int \frac{-\sin y}{\cos y} dy = C \Rightarrow \frac{\sin^3 x}{3} - \ln|\cos y| = C$$

هناك حالة واحد تكون فيها المعادلة غير قابلة للفصل ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات كما ياتي:

اذا كانت $y' = f(x+y)$ اي ان $\frac{dy}{dx} = f(x+y)$ فان

1. افرض $z = x + y$.
2. نشتق الفرضية بالنسبة الى x:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

3. $\frac{dz}{dx} = 1 + f(z)$.
4. نحل المعادلة الناتجة بفصل المتغيرات ثم نرجع الفرضية بعد ايجاد الحل.

$$dz = \big(1 + f(z)\big)dx$$

$$\int \frac{dz}{1+f(z)} = \int dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{1+f(z)} = x + c$$

Examples:

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$$

$$\text{Let } z = x + y \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$$\tan^{-1} z = x + c \rightarrow z = \tan(x + c)$$

$$x + y = \tan(x + c)$$

$$\therefore y = \tan(x + c) - x$$

H.W:

- $2x(y+1)dx - ydy = 0$
- $x^2(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$
- $(y^2+y)dx - (x^2-x)dy = 0$
- $y' = \frac{1+y}{1+x}$
- $y' = e^{x+y}$
- $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$
- $y' = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$
- $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$
- $(1+y^2)dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$

(٢) المعادلات المتجانسة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

:(Homogenous Equations of First Order and First Degree)

تعريف: يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n إذا حققت الشرط الآتي:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \qquad (t > 0)$$

$$or \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

أمثلة: بيِّن فيما إذا كانت الدوال الآتية متجانسة، ثم جد درجة كل منهما:

$$(1) \quad f(x,y) = 7x^2 + 8xy - gy^2$$

الحل:

$$f(tx,ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - g(ty)^2 = 7t^2x^2 + 8t^2xy - gt^2y^2$$

$$= t^2(7x^2 + 8xy - gy^2)$$

$$= t^2 f(x,y)$$

$\therefore$ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٢.

(2) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5y^2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - 2(ty)^3 + 5(ty)^2(tx) = t^3x^3 - 2t^3y^3 + 5t^3y^2x$$
$$= t^3(x^3 - 2y^3 + 5y^2x)$$
$$= t^3 f(x,y)$$

∴ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٣.

(3) $f(x,y) = gx^2 - xy + 2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = g(tx)^2 - (tx)(ty) + 2(tx) = gt^2x^2 - t^2xy + 2tx$$

∴ الدالة ليست متجانسة.

تعريــــف: المعادلـــة التفاضـلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ يقــال أنهــا متجانسة، إذا كانت كل من M و N دالة متجانسة ومتساوية بالدرجة.

مثال: $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$

$N(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢. $M(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢.

$\therefore$ المعادلة هي معادلة تفاضلية متجانسة.

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة:

الحل يتم بالتعويض الآتي:

$$y=vx$$
$$dy=vdx+xdv$$

فتتحول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية تنفصل متغيراتها يمكن إيجاد حلها بسهولة، وكما هو موضّح في الأمثلة الآتية:

أمثلة:

(1) $$(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$$

الحل: المعادلة التفاضلية متجانسة تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة ينتج أن:

$$(x^2 - x(vx) + (vx)^2)dx - x(vx)(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2)dx - x^2v(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2 - x^2v^2)dx - x^3vdv = 0$$
$$\Rightarrow x^2(1 - v)dx - x^3vdv = 0$$

يتم فصل المتغيرات بقسمة الطرفين على $x^3(1-v)$

$$\therefore \frac{dx}{x} - \frac{v}{1-v}dv = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v-1}dv = \int 0$$

$$\Rightarrow \ln x + \int \frac{(v-1)+1}{v-1}dv = C \Rightarrow \ln x + \int dv + \int \frac{dv}{v-1} = C$$

$$\Rightarrow \ln x + v + \ln|v-1| = C \Rightarrow \ln x + \frac{y}{x} + \ln|\frac{y}{x} - 1| = C$$

$$(2) \quad xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الدرجة الأولى تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ينتج أن:

$$x(vdx + xdv) - \left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + \sqrt{x^2(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + x\sqrt{(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - vxdx - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2dv - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \sin^{-1} v - \ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(\frac{y}{x}) - \ln|x| = C$$

H.W:

(1) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0$

(2) $(2xy + y^2)dx - 2x^2dy = 0$

(3) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

صيغ الانواع الخمسة من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

Formulas of Linear Differential Equations of First Order and First Degree

1. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية القابلة للفصل (Separable) هي:

$$\left[\frac{dy}{dx} = f(x)\right] \& \left[M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0\right] \& [f(x)dx + g(y)dy = 0]$$

2. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من النوع المتجانس (Homogeneous) هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \;\&\; M, N \text{ homogeneous functions } \begin{cases} M(\lambda x\ \lambda y) = \lambda^n M(x,y) \\ N(\lambda x\ \lambda y) = \lambda^n N(x,y) \end{cases}$$

3. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من النوع التام (Exact) هي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \;\&\; \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

4. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية (Linear) هي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

5. الصيغة العامة لمعادلة برنولي التفاضلية (Bernoulli) هي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

صيغ المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة

Linear Differential Equations of Second Order with Constant Coefficients

1. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة هي:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

2. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية غيرالمتجانسة من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة هي:

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$