المعادلات التفاضلية

Differential Equations

تعريف: (المعادلة التفاضلية)

هي معادلة مكونة من دوال جبرية او دوال متسامية (الدوال المثلثية ومعكوساتها، الدوال اللوغارتمية والاسية... الخ) او معا وتحتوي على المشتقات.

مثال1:

1) $y'' + 3y = x^2$

2) $(3x + 2y)^2 y' = 1$

3) $1 + 2{y'}^2 = 8y''$

4) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$

5) $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$

6) $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

أنواع المعادلات التفاضلية:

تقسم المعادلات التفاضلية الى قسمين:

1. **المعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equations) :**

اذا احتوت المعادلة التفاضلية على المتغير المعتمد ومشتقاته بالنسبة الى متغير مستقل **واحد** فانها تسمى معادلة تفاضلية اعتيادية.

مثال2: المعادلات (1)، (2)، (3) في مثال 1 هي معادلات تفاضلية اعتيادية.

2. **المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equations) :**

اذا احتوت المعادلة التفاضلية على المتغير المعتمد ومشتقاته بالنسبة الى **اكثر** من متغير مستقل فانها تسمى معادلة تفاضلية جزئية.

مثال3: المعادلات (4)، (5)، (6) في مثال 1 هي معادلات تفاضلية جزئية.

تعريف: (رتبة المعادلة التفاضلية Order of Differential Equation)

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة اعلى مشتقة تظهر في المعادلة.

مثال4: في مثال 1 المعادلة (2) هي من الرتبة الاولى والمعادلتين (1)، (3) هما من الرتبة الثانية.

تعريف: (درجة المعادلة التفاضلية Degree of Differential Equation)

ان درجة المعادلة التفاضلية هي الاس الجبري لاعلى مشتقة تظهر في المعادلة.

مثال5: في مثال 1 المعادلة (1)، (2)، (3)، (4)، (5) هي من الدرجة الاولى والمعادلة (6) هي من الدرجة الثانية.

مثال6: جد الرتبة والدرجة للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\frac{dy}{dx} = 3y$, order 1 and degree 1

2) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} + y = sinx$, order 2 and degree 2

3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2 = x$, order 1 and degree 3

4) $y''' - 2xy' + y = cosx$, order 3 and degree 1

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, order 2 and degree 1

ملاحظة:

المعادلة التفاضلية الاعتيادية التي تكتب بالشكل:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

تسمى الصيغة الضمنية $(Implicit\ form)$، حيث ان F دالة لها $(n+2)$ من المتغيرات، $n > 0$.

المعادلات التفاضلية الخطية (Linear Differential Equations):

ان اي معادلة تفاضلية مهما كانت رتبتها تكون خطية اذا كان المتغير المعتمد وجميع مشتقاته التي تظهر في المعادلة من **الدرجة الاولى** وغير مضربة ببعضها وتكون صيغتها العامة:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

حيث ان المعاملات $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ و $f(x)$ دوال معرفة بالمتغير المستقل x. اذا كانت $f(x) = 0$ نحصل على:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (*)$$

في هذه الحالة تسمى $(*)$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة. واذا كانت المعاملات $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت فان $(*)$ تسمى معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة.

مثال7:

$xy'' + 2xy' + y = 9$ (معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة)

$y''' + 2y'' + y' + 5y = 0$ (معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة)

تعريف: (حل المعادلة التفاضلية Solution of Differential Equation)

هي اي علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه تكون:

1. خالية من الشتقات.
2. معرفة على فترة معينة.
3. تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال8: اثبت ان $y = x\ln x - x$ هو حل للمعادلة

$$xy' = x + y$$

الحل: نلاحظ ان $y = x\ln x - x$ خالية من المشتقات ومعرفة على الفترة $(0, \infty)$ كما انها تحقق المعادلة

$$y = x\ln x - x \to y' = x.\frac{1}{x} + \ln x - 1 = \ln x$$

نعوض y و y' في المعادلة نحصل على:

$$xy' = x + y \to x\ln x = x + x\ln x - x$$

$$x\ln x = x\ln x$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر وعليه فان $y = x\ln x - x$ هو حل للمعادلة.

<u>تعريف</u>: (الحل العام General Solution)

ان الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة (n) هو الحل الذي يحتوي على n من الثوابت الاختيارية.

<u>تعريف</u>: (الحل الخاص Particular Solution)

هو اي حل يمكن الحصول عليه من الحل العام باعطاء قيم خاصة للثوابت الاختيارية.

== تمارين (واجب) ==

(١) جد رتبة (Order) ودرجة (Degree) كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

- $y' = 8x$
- $y'^2 + xy' = y^2$
- $\sqrt{y} = 3y' + x$
- $y^{(4)} = \sqrt{y'}$

(٢) برهن أنَّ كل معادلة هي حل للمعادلة التفاضلية المقابلة لها:

(ملاحظة: A, B, C ثوابت)

- $xy' = x^2 + y$ & $y = x^2 + Cx$
- $y'' + 4y = 0$ & $y = A\sin 2x + B\cos 2x$
- $y'' + 3y' + 2y = 0$ & $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$
- $y''' = 0$ & $y = Cx^2 + Bx + A$
- $y''(1-x) + y'x - y = 0$ & $y = Ae^{x} + Bx$