المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

:(Differential Equations of First Order and First Degree)

وهي المعادلات التي تكون بإحدى الأشكال الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

أو $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

أو $$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

حيث ان M, N, f دوال تحتوي على x أو y أو كلاهما أو قد تكون دوال ثابتة.

طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

(١) المعادلات التفاضلية التي تنفصل متغيراتها:

هـي المعـادلات مـن النـوع: $f(y)dy + g(x)dx = 0$ وحلهـا يكـون بتكامـل الطرفين ، أي أنَّ (حيث C ثابت اختياري) $\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = C$.

Examples: Solve the following equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow xdy = 2ydx$

فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على yx ينتج ان:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C \Rightarrow \ln|y| - 2\ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|x^2| = C \Rightarrow \ln\frac{y}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x^2} = e^C$$

$y = x^2 e^C$ (ثابت اختياري C)

ويمكن ان نفرض الثابت الاختياري $e^c = c_1$ فيكون الحل:

$$\boldsymbol{y = c_1 x^2}$$

Examples: Solve the following equation: $(x+1)\frac{dy}{dx} = x^2(y^2+1)$

الحل: بضرب الطرفين في dx ينتج ان: $(x+1)dy = x^2(y^2+1)dx$

فصل الطرفين يتم بقسمة الطرفين على $(x+1)(y^2+1)$ ينتج:

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x^2dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{x^2dx}{x+1}$$

التكامل الثاني $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ يحل بالقسمة الطويلة لان درجة البسط اكبر من درجة المقام

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x-1 \\ \cline{2-2}
x+1 & \quad x^2 \\ \cline{1-1}
 & \quad x^2+x \\ \cline{2-2}
 & \quad -x \\
 & \quad -x-1 \\ \cline{2-2}
 & \quad 1
\end{array}
$$

ونستخدم القانون التالي لتبسيط المقدار

$$\text{الكسر} = \left(\frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}} + \text{ناتج القسمة}\right)$$

وعليه نحصل على

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \Rightarrow \tan^{-1} y = \int x\,dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

$$\Rightarrow y = \tan\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C\right)$$

Examples: Solve the following equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{x - xy^2}{x^2y - y}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)} \Rightarrow y(x^2-1)dy = x(1-y^2)dx$

فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $(x^2-1)(1-y^2)$ ينتج ان:

$$\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{ydy}{1-y^2} = \int \frac{xdx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2ydy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

Examples:

$$\sin^2 x \cos y \, dx + \sin y \sec x \, dy = 0$$

الحل: فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $\cos y \sec y$ ينتج ان:

$$\frac{\sin^2 x}{\sec x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0 \Rightarrow \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3 x}{3} - \int \frac{-\sin y}{\cos y} dy = C \Rightarrow \frac{\sin^3 x}{3} - \ln|\cos y| = C$$

هناك حالة واحد تكون فيها المعادلة غير قابلة للفصل ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات كما ياتي:

اذا كانت $y' = f(x+y)$ اي ان $\frac{dy}{dx} = f(x+y)$ فان

1. افرض $z = x + y$.
2. نشتق الفرضية بالنسبة الى x:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

3. $\frac{dz}{dx} = 1 + f(z)$.
4. نحل المعادلة الناتجة بفصل المتغيرات ثم نرجع الفرضية بعد ايجاد الحل.

$$dz = \left(1 + f(z)\right)dx$$

$$\int \frac{dz}{1+f(z)} = \int dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{1+f(z)} = x + c$$

Examples:

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$$

$$\text{Let } z = x + y \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$$\tan^{-1} z = x + c \rightarrow z = \tan(x+c)$$

$$x + y = \tan(x+c)$$

$$\therefore y = \tan(x+c) - x$$

H.W:

- $2x(y+1)dx - ydy = 0$
- $x^2(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$
- $(y^2+y)dx - (x^2-x)dy = 0$
- $y' = \frac{1+y}{1+x}$
- $y' = e^{x+y}$
- $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$
- $y' = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$
- $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$
- $(1+y^2)dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$

(٢) المعادلات المتجانسة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

:(Homogenous Equations of First Order and First Degree)

<u>**تعريف:**</u> يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n إذا حققت الشرط الآتي:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \qquad (t>0)$$

$$or \quad f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

<u>**أمثلة:**</u> بيِّن فيما إذا كانت الدوال الآتية متجانسة، ثم جد درجة كل منهما:

$$(1) \quad f(x,y)=7x^2+8xy-gy^2$$

الحل: $f(tx,ty)=7(tx)^2+8(tx)(ty)-g(ty)^2=7t^2x^2+8t^2xy-gt^2y^2$

$$=t^2(7x^2+8xy-gy^2)$$
$$=t^2 f(x,y)$$

∴ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٢.

$$(2) \quad f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5y^2x$$

الحل:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - 2(ty)^3 + 5(ty)^2(tx) = t^3x^3 - 2t^3y^3 + 5t^3y^2x$$
$$= t^3(x^3 - 2y^3 + 5y^2x)$$
$$= t^3 f(x,y)$$

∴ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٣.

$$(3) \quad f(x,y) = gx^2 - xy + 2x$$

الحل:

$$f(tx,ty) = g(tx)^2 - (tx)(ty) + 2(tx) = gt^2x^2 - t^2xy + 2tx$$

∴ الدالة ليست متجانسة.

تعريـــف: المعادلــة التفاضــلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ يقــال أنهــا متجانسة، إذا كانت كل من M و N دالة متجانسة ومتساوية بالدرجة.

مثال: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

$N(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢. $M(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢.

∴ المعادلة هي معادلة تفاضلية متجانسة.

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة:

الحل يتم بالتعويض الآتي:

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

فتتحول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية تنفصل متغيراتها يمكن إيجاد حلها بسهولة، وكما هو موضّح في الأمثلة الآتية:

أمثلة:

$$(1) \quad (x^2 - xy + y^2)dx - xy\, dy = 0$$

الحل: المعادلة التفاضلية متجانسة تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة ينتج أن:

$$(x^2 - x(vx) + (vx)^2)dx - x(vx)(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2)dx - x^2v(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2 - x^2v^2)dx - x^3vdv = 0$$
$$\Rightarrow x^2(1 - v)dx - x^3vdv = 0$$

يتم فصل المتغيرات بقسمة الطرفين على $x^3(1-v)$

$$\therefore \frac{dx}{x} - \frac{v}{1-v}dv = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v-1}dv = \int 0$$

$$\Rightarrow \ln x + \int \frac{(v-1)+1}{v-1}dv = C \Rightarrow \ln x + \int dv + \int \frac{dv}{v-1} = C$$

$$\Rightarrow \ln x + v + \ln|v-1| = C \Rightarrow \ln x + \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| = C$$

$$(2) \quad xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0$$

∴ المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الدرجة الأولى تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ينتج أن:

$$x(vdx + xdv) - \left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + \sqrt{x^2(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + x\sqrt{(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - vxdx - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2dv - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \sin^{-1} v - \ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| = C$$

H.W:

(1) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0$

(2) $(2xy + y^2)dx - 2x^2dy = 0$

(3) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$