الفصــل الثالث

المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

Exact First Order Differential Equations

لتكن المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = o \qquad (1)$$

فالشرط اللازم والكافي لتكون هذه المعادلة تامة هو:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

طريقة الحل:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

1- نثبت ان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

2- حل المعادلة التامة سيكون بالصيغة:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0$$

حيث ان n هي جزء من الدالة N بحيث انه لايحتوي على المتغير x. او نستخدم الصيغة الاخرى:

$$\int N\,dy + \int m\,dx = 0$$

حيث ان m هي جزء من الدالة M بحيث انه لايحتوي على المتغير y .

Example Solve the differential equation:

$$(ye^x + 2x\cos y)dx + (e^x - \cos y - x^2\sin y)dy = 0$$

Solution:

$$M = ye^x + 2x\cos y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^x - 2x\sin y$$

$$N = e^x - \cos y - x^2\sin y \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = e^x - 2x\sin y$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

The differential equation is **exact** and the general solution is:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0$$

$$\rightarrow \int (ye^x + 2x\cos y)\,dx + \int -\cos y\,dy = 0$$

$$\boxed{\therefore ye^x + x^2\cos y - \sin y + c = 0}$$

Example Solve the differential equation:

$$(e^y + x\sin xy)\frac{dy}{dx} + y\sin xy = 0$$

Solution: $y\sin xy\,dx + (e^y + x\sin xy)dy = 0$

$$M = y\sin xy \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = y\cos xy\,.\,x + \sin xy$$

$$= xy\cos xy + \sin xy$$

$$N = e^y + x\sin xy \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = x\cos xy\,.\,y + \sin xy$$

$$= xy\cos xy + \sin xy$$

$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, The differential equation is **exact** and its solution is:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{-\cos xy + e^y + \mathbf{c} = 0}$$

H.W:

- $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = o$
- $(e^x \sin y + 3y)dx - (3x - e^x \sin y)dy = o$
- $(4x^3y^2 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = o$
- $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = o$