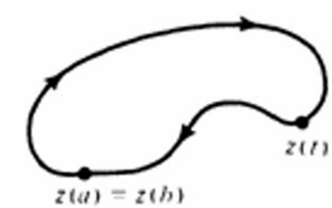
الفصل الخامس

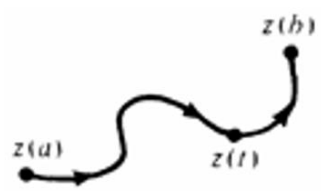
التكامل المعقد

في هذا الفصل سنتعامل مع التعاريف الأساسية التالية:

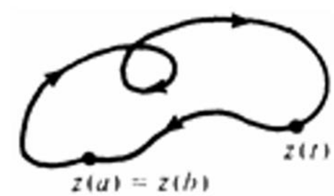
1. المسار (المنحني) المفتوح: وهو المسار الذي لا تلتقي نهايتي طرفيه.
2. المسار (المنحني) المغلق: وهو المسار الذي تلتقي نهايتي طرفيه.
3. المسار (المنحني) البسيط: وهو المسار الذي لا يقاطع نفسه.
4. المسار (المنحني) المتعدد: وهو المسار الذي يقاطع نفسه.



مسار بسيط مغلق

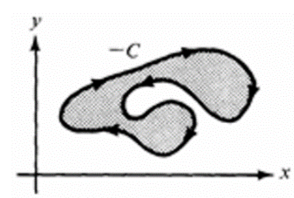


مسار بسيط مفتوح

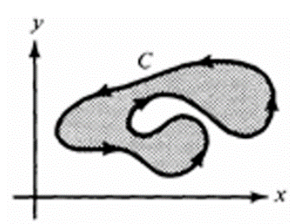


مسار متعدد مغلق

مسار متعدد مفتوح



الاتجاه السالب للمسار (مع عقارب الساعة)

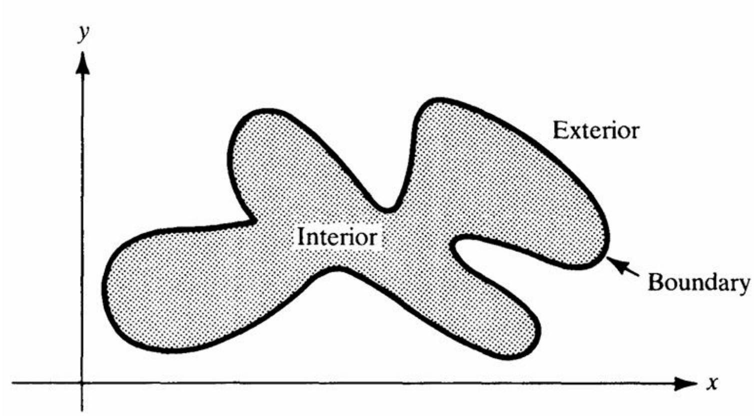


الاتجاه الموجب للمسار (عكس عقارب اساعة)

نظرية منحني جوردن Jordan Curve Theorem

ليكن C مسار مغلق بسيط في المستوي Z، فأن المسار C يقسم المستوي Z الى ثلاث مناطق وهي:

1. النقاط التي تمثل المنحني C نفسها (النقاط الحدودية).
2. النقاط التي تقع داخل المنحني (النقاط الداخلية).
3. النقاد التي تقع خارج المنحني (النقاط الخارجية).



المعادلات البارامترية Parametric Equations

إذا كان Z دالة من متغيرين x & y والتي هي بدورها متغيرين لمتغير اخر ولكن t، أي:

$$Z(x,y) = x(t) + iy(t)$$

ان المتغير t هو متغير بارامتري لكل من x & y و $x(t)$& $y(t)$ يدعيان بالمعادلات البارامترية.

التكامل المعقد Complex Integral

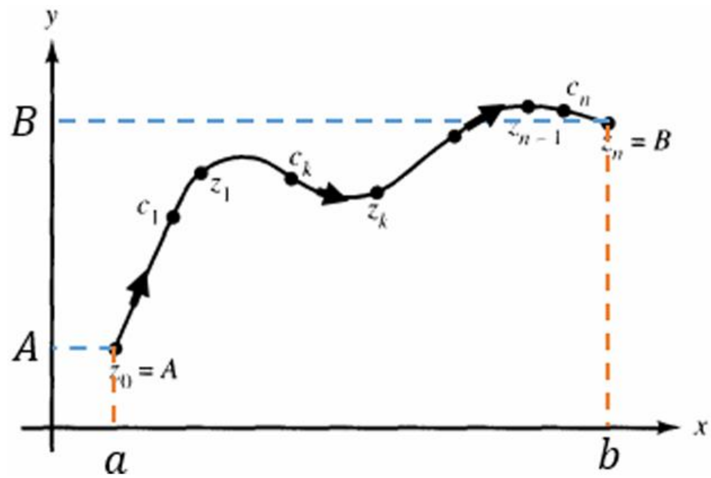
ان تكامل الدالة $f(Z)$ على المسار C (من النقطة a الى النقطة b) هو $F(Z)$، وكالتالي:

$$\int_a^b f(Z)dZ = F(b) - F(a)$$

ان تكامل الدالة ذات المتغيرين $f(x,y)$ هو في العادة دالة بارامترية، يحدد فيها حدود التكامل اعتمادا على مسار التكامل:

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

$$\int_A^B f(x,y)dy$$



Some Properties of the Complex integral **بعض خصائص التكامل المعقد**

1. $\int_c f(Z)dZ = \int_c U dx - \int_c V dy + i\int_c U dy + i\int_c V dx$

2. $\int_a^b f(Z)dZ = -\int_b^a f(Z)dZ$

3. $\int_a^b kf(Z)dZ = k\int_a^b f(Z)dZ$, where k is constant for Z

4. $\int_c [f(Z) + g(Z)]dZ = \int_c f(Z)dZ + \int_c g(Z)dZ$

5. $\int_c f(t)dt = \int_c U(t)dt + i\int_c V(t)dt$

6. $\left|\int_c f(Z)dZ\right| \leq \int_c |f(Z)|dZ$

7. $Re\left(\int_c f(t)dt\right) = \int_c U(t)dt = \int_c Re\big(f(t)\big)dt$

مثال 1 جد قيمة التكامل I ضمن الحدود $0 \le Z \le \pi + 2i$

$$I = \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{Z}{2}\right) dZ$$

$$\int_0^{\pi+2i} \frac{2}{2} \cos\left(\frac{Z}{2}\right) dZ$$

$$I = 2\sin\left(\frac{Z}{2}\right)\Big|_0^{\pi+2i}$$

$$I = 2\left[\sin\left(\frac{\pi+2i}{2}\right) - \sin\left(\frac{0}{2}\right)\right]$$

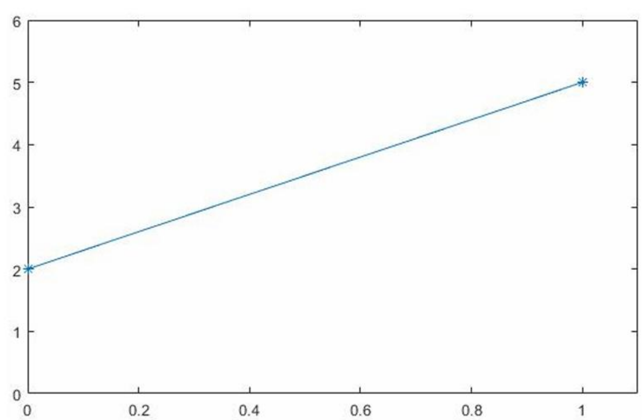
$$I = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$$

$$I = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh 1 + i \sinh 1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$I = 2[1 \times 1.543 + i1.175 \times 0]$$

$$I = 3.086 \approx 3$$

مثال 2. للمستقيم الموضح فيما ادناه، جد قيمة التكامل I ضمن الفترة $2i \le Z \le 1 + 5i$.



$$I = \int_{2i}^{1+5i} Z^2 dZ$$

من الرسم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(5-2)}{1-0} = 3, \qquad b = 2$$

معادلة خط مستقيم $\because y = mx + b,$

$$\Rightarrow \; y = 3x + 2$$

حيث $Z = (x + iy)$

بالتعويض بدل عن y بـ x في Z، ينتج:

$$Z = (1+3i)x + 2i, \qquad dZ = (1+3i)dx$$

بالتعويض عن قيمة Z و dZ في معادلة التكامل I، ينتج:

$$I = (1+3i)\int_0^1 \left((1+3i)x + 2i\right)^2 dx$$

$$I = (1+3i)\int_0^1 \left((-8+6i)x^2 + 4i(1+3i)x - 4\right)dx$$

$$I = (1+3i)\left[\frac{-8+6i}{3}x^3\Big|_0^1 + 2i(1+3i)x^2|_0^1 - 4x|_0^1\right]$$

$$I = (1+3i)\left[\frac{-8+6i}{3} + \frac{6i(1+3i)}{3} - \frac{12}{3}\right]$$

$$I = (1+3i)\frac{(-38+12i)}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}(-74-102i)$$

مثال 3: جد قيمة التكامل I على المسار $Z = t + it^2,\ \ 0 \le t \le 1$

$$I = \int Z^2 dZ$$

$$I = \int_0^1 (t+it^2)^2\, d(t+it^2)$$

$$I = \int_0^1 (t^2 + i2t^3 - t^4)(1+2it)dt$$

$$I=\int_0^1 (t^2+i2t^3-t^4+i2t^3-4t^4-i2t^5)dt$$

$$I=\int_0^1 (t^2-5t^4)dt+i\int_0^1 (4t^3-2t^5)dt$$

$$I=\left[\frac{t^3}{3}-t^5\right]_0^1+i\left[t^4-\frac{1}{3}t^6\right]_0^1$$

$$I=\left[\frac{1}{3}-1\right]+i\left[1-\frac{1}{3}\right]=-\frac{2}{3}+i\frac{2}{3}$$

$$I=\frac{2}{3}(i-1)$$

مثال4 : جد قيمة التكامل I على المسار $Z(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t,\ \ 0\le t\le 2\pi$

$$I=\int\frac{dZ}{Z}\quad=\int_0^{2\pi}\frac{d(\cos t+i\sin t)}{\cos t+i\sin t}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t+i\cos t}{\cos t+i\sin t}\times\frac{\cos t-i\sin t}{\cos t-i\sin t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t\cos t+i\sin^2 t+i\cos^2 t+\cos t\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} i(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\int_0^{2\pi} i\,dt$$

$$I = it|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0)$$

$$I = i2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \log(e^{it})\Big|_0^{2\pi} = \log(\cos t + i\sin t)|_0^{2\pi}$$

$$I = \left[\log\left(\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) + i\tan^{-1}\frac{\sin t}{\cos t}\right]_0^{2\pi}$$

$$I = [\log(1) + i\tan^{-1}\tan t]_0^{2\pi}$$

$$I = (0 + it)|_0^{2\pi}$$

$$I = i2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt$$

$$I = it|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0)$$

$$I = i2\pi$$

نظرية كوشي-كورسا Cauchy-Gorsat Theorem

لتكن الدالة $f(Z)$ تحليلية في المجال البسيط المتصل D، وليكن c مسار بسيط مغلق يقع داخل المجال D.

$$\int_c f(Z)dZ = 0$$

صيغتي كوشي التكاملية Cauchy's Integral Formulas

لتكن الدالة $f(Z)$ تحليلية في المجال البسيط المتصل D، وليكن c مسار بسيط مغلق موجب الاتجاه يقع داخل المجال D. إذا كانت النقطة Z_0 داخلية بالنسبة للمسار c، فأن:

$$\boldsymbol{f(Z_0) = \frac{1}{i2\pi}\int_c \frac{f(Z)}{Z - Z_0}dZ}\,, \qquad \text{صيغة كوشي التكاملية الاولى}$$

ولأي قيمة صحيحة لـ $n \geq 0$، يكون:

$$\boldsymbol{f^{(n)}(Z_0) = \frac{n!}{i2\pi}\int_c \frac{f(Z)}{(Z - Z_0)^{n+1}}dZ}\,, \qquad \text{صيغة كوشي التكاملية الثانية}$$

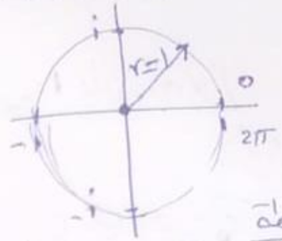
بعض الأمثلة عن نظرية كوشي-كورسات

Example 1. Compute $\int_C \frac{z}{z-2}\,dz$, $C: |z|=1$

$\Downarrow$

دائرة الوحدة

دائرة مركزها (0,0) ونصف قطرها 1



Sol: $z-2=0 \Rightarrow z=2$

هنا $z=2 \notin C$

لأن $z=2$ لا تقع على الدائرة او داخلها

$\Rightarrow$ by (Cauchy-Goursat Thm)

$$\int_C \frac{z}{z-2}\,dz = 0$$

ملاحظة

عندما يكون السؤال معطاً بدون فترة نحن نختار الفترة $[0,2\pi]$

Example 2. Compute $\int_C \frac{3e^z}{z}\,dz$, $C: |z-1|=1$

$t \in [0, 2\pi]$

Sol: $z=0 \Rightarrow z=0 \notin C$

$\Rightarrow$ بواسطة كوشي-كورسات

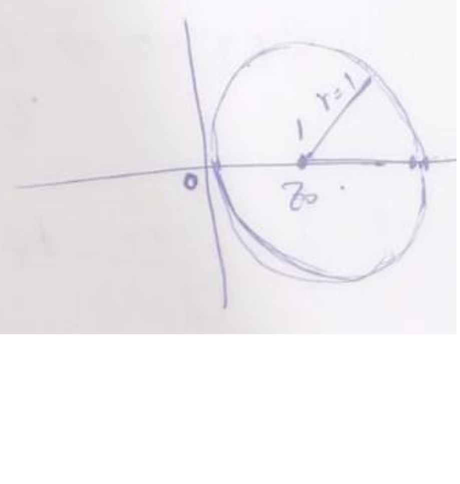
$$\int_C \frac{3e^z}{z}\,dz = 0$$

من $C: |z-1|=1$

$|z-z_0|=r$

$z_0=1$ و $r=1$

$\therefore$ مركز الدائرة = 1



②

الصيغة الاولى لكوشي التكاملية

يمكن ان نكتب

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

او

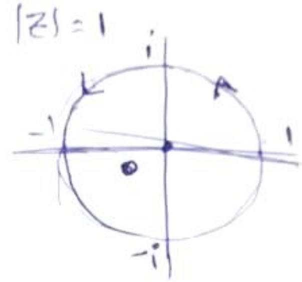
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}$$

Example 1. Compute $\int_C \frac{z^2+1}{z}\,dz$, $C: z(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$

$|z| = 1$

Sol

$z_0 = 0 \in C$



Now, $f(z) = z^2+1 \Rightarrow f(z_0) = 0^2+1 = 1$

$$\Rightarrow \int_C \frac{z^2+1}{z}\,dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i\,(1) = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{z^2+1}{z}\,dz = 2\pi i$$

Example 2. Compute $\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z^2+4)}$, $C: |z-2| = 2$

داخل الدائرة

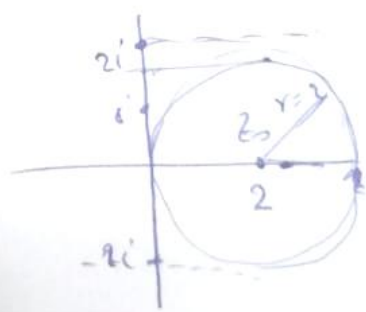
خارج الدائرة

Sol

$z-1=0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C$

$z^2+4=0 \Rightarrow z^2 = -4$

$z = \pm 2i \notin C$



$$\Rightarrow \int_C \frac{\frac{z}{z^2+4}}{(z-1)}\,dz$$

$$f(z) = \frac{z}{z^2+4} \rightarrow f(z_0) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

(3)

$$\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z^2+4)} = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{5}$$

Example 3 Compute $\int_C \frac{\sin z}{z+1}\,dz$, C: $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$

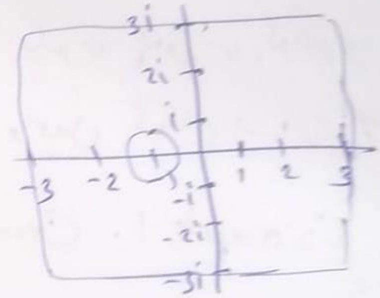
Sol $z+1=0 \Rightarrow z_0=-1 \in C$

$$f(z) = \sin z$$

$$f(z_0) = f(-1)$$

$$= \sin(-1)$$

$$= -\sin(1)$$



$$\Rightarrow \int_C \frac{\sin z\,dz}{z+1} = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$= -2\pi i \sin(1)$$

(4)

الصيغة الثانية لكوشي التكاملية

تكتب هذه الصيغة بالشكل

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

او

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

ملاحظة: تستخدم هذه الصيغة عندما يكون القوس الموجود بالمقام ذات اس اكبر من واحد وبجعل المقام يساوي صفر

Example 1. Compute $\int_C \frac{z^2}{(z-i)^2}\,dz \; : \; C: |z| = 2$

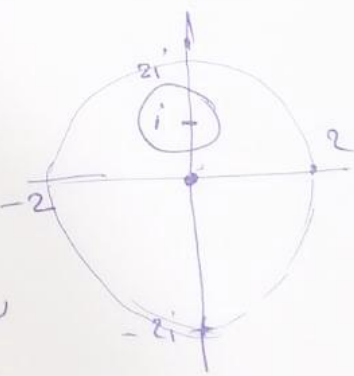
Sol

$(z-i)^2 = 0 \Rightarrow z - i = 0$

$\Rightarrow z = i \in C$

∴ هنا اصبح لدينا نقطة شاذة

وبالتالي $z_0 = i$



$n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$

يعني هنا نحتاج ان نشتق الدالة مرة واحدة

$f(z) = z^2$

$\Rightarrow f^{(1)}(z) = 2z$

$f^{(1)}(z_0) = f^{(1)}(i) = 2i$

$$\int_C \frac{z^2}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}(2i) = -4\pi$$

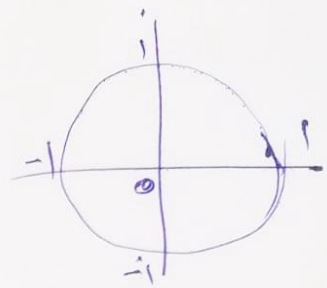
Example 2 Compute $\oint_C \frac{e^{2z}}{z^4}\,dz$, $C: |z| = 1$

Sol

$z^4 = 0$

$\Rightarrow z = 0 \in C$ اذن لدينا نقطة شاذة

$\therefore z_0 = 0$



$n+1 = 4 \Rightarrow n = 3$, $\therefore f(z) = e^{2z}$

$f^{(1)}(z) = 2e^{2z}$

$f^{(2)}(z) = 4e^{2z}$

$f^{(3)}(z) = 8e^{2z} \Rightarrow f^{(3)}(z_0) = f^{(3)}(0) = 8e^{2(0)}$

$= 8$

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}(8)$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{6}_{3}} \cdot 8 = \frac{8\pi i}{3}.$$