الغايات للدوال المعقدة (Limits of the Complex Functions)

لتكن $f(Z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة معقدة في بعض جوار $Z_0=x_0+iy_0$ ثم تكون للدالة $f(Z)$ غاية $W_0=u_0+iv_0$ عندما يقترب Z من Z_0 اي ان

$$\lim_{Z\to Z_0} f(Z)=W_0=u_0+iv_0$$

اذا وفقط اذا

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \quad and \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

قيمة وحيدة عند الاقتراب الى النقطة Z_0 من اليمين او اليسار.

مثال : جد فيما اذا كانت الدالة التالية تملك غاية عند النقطة (0,0).

$$f(Z)=\begin{cases}3i & Z<0\\ Z^2 & Z\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(0)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y\to 0^-}} f(0)=3i$$

الغاية من اليمين $\neq$ الغاية من اليسار

اذن الدالة لاتمتلك غاية عند النقطة (0,0).

خصائص الغايات Properties of limits

إذا كانت $f(Z)$ & $g(Z)$ دوال لـ Z وكان $\lim_{Z\to Z_0} f(Z)=L$ & $\lim_{Z\to Z_0} g(Z)=M$ فأن:

1. $\lim_{Z\to Z_0}[f(Z)\pm g(Z)]=L\pm M$
2. $\lim_{Z\to Z_0}[f(Z)\times g(Z)]=L\times M$
3. $\lim_{Z\to Z_0}\frac{f(Z)}{g(Z)}=\frac{L}{M}$
4. $\lim_{Z\to Z_0}\frac{1}{g(Z)}=\frac{1}{M}$
5. قاعدة هوسبتال (L' Hospital's Rule)

$$\lim_{Z\to Z_0}\frac{f(Z)}{g(Z)}=\lim_{Z\to Z_0}\frac{f'(Z)}{g'(Z)} \quad if\ the\ first\ limits\ dose\ not\ exist$$

مثال جد الغاية للدوال التالية:

1. $$\lim_{Z\to 1+i}\frac{5Z+1}{5Z-i}=\frac{5+i5+1}{5+i5-i}=\frac{6+i5}{5+i4}=\frac{1}{41}(50+i)$$

2. $$\lim_{Z\to 2i}(Z^2+4Z-2)=-4+8i-2=-6+8i$$

3. $$\lim_{Z\to i}\frac{iZ^3-1}{Z+i}=\frac{i(i)^3-1}{i+i}=\frac{1-1}{2i}=0$$

4. $$\lim_{Z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{Z^3+8}{Z^4+4Z^2+16}=\frac{\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3+8}{\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^4+4\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2+16}=\frac{8e^{i\pi}+8}{16e^{\frac{i4\pi}{3}}+16e^{\frac{i2\pi}{3}}+16}$$

$$=\frac{-8+8}{16[-0.5-i0.866-0.5+i0.866+1]}=\frac{0}{0}$$

لعدم وجود الغاية، فاننا سنستخدم قاعدة هوسبتال

$$f'(Z)=\frac{3Z^2}{4Z^3+8Z}=\frac{3Z}{4Z}\left(\frac{Z}{Z^2+2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{Z}{Z^2+2}\right)$$

$$\lim_{Z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{3}{4}\left(\frac{Z}{Z^2+2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2+2}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{0.5+i0.866}{-1+i1.732}\right)=0.375-i0.217$$

5. $$\lim_{Z\to\infty}\frac{2Z^2+5Z-3}{-Z^2+3Z-1},$$ بالقسمة على اعلى اس

$$\lim_{Z\to\infty}\frac{2+\frac{5}{Z}-\frac{3}{Z^2}}{-1+\frac{3}{Z}-\frac{1}{Z^2}}=-2$$

جد غاية الدوال التالية:

1. $$\lim_{z \to \infty} \frac{5Z-5}{-4Z+1}$$
2. $$\lim_{Z \to 2i} \left[\frac{Z+2-i}{Z^2+Z-1}\right]^2$$
3. $$\lim_{Z \to 1} \frac{(Z-1)+(Z^2-1)}{Z^{16}-1}$$

الاستمرارية (Continuity)

يطلق على الدالة $w = f(Z)$ مستمرة في نقطة $Z = Z_0$ إذا تم تعريفها في Z_0 وجوارها وتستوفي الشروط التالية:

1. $f(Z)$ معرفة في Z_0

$$f(Z) = 2Z^2 - 3Z + 2$$
$$f(1) = 2 - 3 + 2 = 1$$

2. الغاية $\lim_{Z \to Z_0} f(Z)$ موجودة

$$\lim_{Z \to 1}(2Z^2 - 3Z + 2) = 2 - 3 + 2 = 1$$

3. الغاية $\lim_{Z \to Z_0} f(Z)$ تساوي $f(Z_0)$

$$\lim_{Z \to 1} f(Z) = 1 = f(z)$$

الأنواع الأكثر شيوعا من الانقطاعات هي:

1. قيمة الدالة تميل إلى اللانهاية

$$f(Z) = \tan(Z) \quad at\ Z = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ f(Z) = \infty$$
$$f(Z) = \frac{1}{Z-1} \quad at\ Z = 1 \ \Rightarrow \ f(Z) = \infty$$

المشتقة Derivative

للدالة $f(Z)$ المعرّفة في المجال D، ان مشتقتها في النقطة Z_0 (وتكتب $(f'(Z_0)$ كما يلي:

$$f'(Z_0) = \lim_{Z \to Z_0} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0}$$

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z) - f(Z_0)}{\Delta Z}$$

تكون الدالة قابلة للاشتقاق في النقطة Z_0 إذا امكن اشتقاق الدالة في Z_0.

قوانين الاشتقاق Differentiation Formulas

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(cx) = c \;;\quad c = constant$
3. $\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$
5. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

9. $$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

10. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad (Chain\ rule)$$

11. $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$$

12. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

13. $$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$

14. $$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$$

15. $$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

16. $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx} \quad a \neq 0, 1$$

17. $$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

18. $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$$

19. $$\frac{d}{dx}e^u = \frac{e^u du}{dx}$$

20. $$\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}[v\ln u] = e^{v\ln u}\left[vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u\frac{dv}{dx}\right]$$

مثال جد مشتقة الدوال التالية عند النقطة Z_0.

1. $$f(Z) = 3Z^2 - Z^{-1}, \qquad Z_0 = i$$
$$f'(Z) = 6Z + Z^{-2}$$
$$f'(i) = 6(i) + \frac{1}{(i)^2} = -1 + i6$$

2. $$f(Z) = iZ^2 + (\pi - i)Z, \qquad Z_0 = i\pi$$
$$f(Z)' = 2iZ + (\pi - i)$$
$$f'(i\pi) = 2i(i\pi) + \pi - i = -2\pi + \pi - i = -\pi - i$$

Differentiability and Cauchy- قابلية الاشتقاق وشرطي كوشي-ريمان Riemann Conditions

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق $f'(Z)$ فأنها يجب ان تستوفي التالي:

$$U_x + iV_x = -iU_y + V_y$$

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{U_x = V_y} \\ \boldsymbol{V_x = -U_y} \end{matrix}\right\} \quad \text{شرطي كوشي – ريمان}$$

لذلك تكون الدالة $f(Z) = U + iV$ قابلة للاشتقاق عند النقطة Z اذا كانت مشتقاتها الجزئية $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x}$ و $\frac{\partial V}{\partial y}$ موجودة وتحقق شرطي كوشي ريمان.

مثال حدد النقاط التى تكون فيها الدالة التالية قابلة للاشتقاق.

1. $$f(Z) = Z^2$$
$$f(Z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$\Rightarrow U = x^2 - y^2, \qquad V = 2xy$$
$$U_x = 2x, \qquad V_x = 2y$$
$$U_y = -2y, \qquad V_y = 2x$$
$$U_x = 2x = V_y, \qquad U_y = -2y = -V_x$$

$\therefore$ الدالة تحقق شرطي كوشي-ريمان، أي ان الدالة قابلة للاشتقاق في جميع النقاط.

$$f'(Z) = U_x + iV_x = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2Z$$

2.
$$f(Z) = |Z|^2$$
$$f(Z) = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow U = x^2 + y^2, \qquad V = 0$$
$$U_x = 2x, \qquad V_x = 0$$
$$U_y = 2y, \qquad V_y = 0$$

لهذه الدالة فأن شرطي كوشي-ريمان يتحققان فقط عند $x = y = 0$ أي $Z = 0$.

$$\left.\begin{matrix} U_x = V_y \\ V_x = -U_y \end{matrix}\right\} \quad at\ x = 0\ \&\ y = 0\ only$$

$\therefore$ الدالة $f(Z) = |Z|^2$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $Z = 0$ فقط.