صيغة اويلر/ الجذور

هذه الصيغة تعتمد على الصيغة القطبية للعدد العقدي Z والتي تعرف بـ

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

اي انه يمكن اعادة كتابة العدد Z كمايلي

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta}.$$

ومن هنا يكون المعكوس الضربي ل Z هو

$$Z^{-1} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

وكذلك حاصل ضرب عددين عقديين Z_1, Z_2 هو

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$$
$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

وناتج القسمة هو

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

ملاحظة:

1. يمكن التعبير عن الدوال المثلثية بدلالة الدالة الاسية والعكس ايضا صحيح

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad (e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{i\theta}{n}}.$

مثال. اثبت ان $e^{\pi i} = -1$.

الحل/

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1.$$

مثال 2. اكتب e^Z بالصيغة العادية.

الحل/

$$.e^Z = e^{x+iy}$$
$$= e^x \cdot e^{iy}$$
$$= e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$
$$= e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

الجذور (Roots)

ليكن Z عدد عقدي معرف و n عدد صحيح موجب. الجذر ذات الرتبة n الى Z او يكتب $Z^{\frac{1}{n}}$ هو العدد العقدي W الذي يحقق المعادلة

$$W^n = Z. \qquad (1)$$

اذا كان

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$W = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فعند تعويض هذه القيم في (1) نحصل على

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

اي ان

$$\rho^n = r \to \rho = r^{\frac{1}{n}}$$

اي الجذر الحقيقي الموجب للعدد r. كما ان

$$n\theta = \theta + 2k\pi = \arg Z$$

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\arg Z}{n}.$$

فيكون

$$W_n^k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

ان معادلة (2) تعطي لنا قيماص مختلفة الى W عندما يكون k عدد صحيح لايقبل القسمة على n وبهذا نحصل على n من الجذور المختلفة الى Z عندما نعوض

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ايضا يمكن كتابة الصيغة المعطاة في (2) بالشكل التالي

$$W = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right). \quad (3)$$

Example 1. Find $Z^3 = 1.$

Sol. (3) او (2) ممكن استخدام الصيغة في

$$W_n^k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$k = 0,1,2,...,n-1$

n =عدد الجذور او القوى المرفوعة لها العدد العقدي

θ = زاوية العدد العقدي

r = |Z|.

r = 1, n =3, k = 0,1, 2, θ = 0.

When k = 0

$$W_3^0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2(0)\pi}{3}\right)$$
$$= \cos 0 + i\sin 0 = 1.$$

When k = 1

$$W_3^1 = \cos\frac{0 + 2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2(1)\pi}{3}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{360}{3} + i\sin\frac{360}{3} = \cos 120 + i\sin 120 = ? + ?i$$

When k = 2

$$W_3^2 = \cos\frac{0+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(2)\pi}{3}$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = ?+?i$$

ملاحظة عندما نجد الجذور ل Z =1 هذا يعني اننا نحتاج ان نحسب فقط

$$W_n^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

اذن القانون اعلاه يسمى قانون ايجاذر جذور العدد العقدي عندما يساوي 1.

اي انه من السهل تطبيق القانون في معادلة (3) بدلا من القانون المعطاة في (2).

Example 2. Solve $(1+i)^{\frac{1}{2}}$.

Sol. $W = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$

$$Z = 1+i,\ r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{4},\ n = 2,\ k = 0,1.$$

When k = 0

$$W_2^0 = \sqrt[2]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/4}{2} + i\sin\frac{\pi/4}{2}\right)\left(\cos\frac{2(0)\pi}{2} + i\sin\frac{2(0)\pi}{2}\right)$$

$$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$$

$$= 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot(1) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{180}{8} + i\sin\frac{180}{8}\right) = ?+?i$$

When k = 1

$$W_2^1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{2(1)\pi}{2} + i\sin\frac{2(1)\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)(-1) = ? - ?i.$$

H.W. Solve $(1-i)^{\frac{1}{3}}$.