الفصل الرابع
الدوال المثلثية

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

في الفضاء الحقيقي يمكن تعريف الجيب والجيب التمام باستخدام متطابقة أويلر على النحو التالي:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (1)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad (2)$$

بجمع معادلة رقم (1) مع (2)ينتج:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

بطرح معادلة رقم (1) مع (2) ينتج:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ان هذه العلاقات هي صحيحة أيضا في الحقل العقدي ، أي

$$\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}, \qquad \sin Z = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}$$

بعض خصائص الدوال المثلثية Some Properties of the Trigonometric Functions

1. $\sin(-Z) = -\sin Z$ دالة فردية
2. $\cos(-Z) = \cos Z$ دالة زوجية
3. $\sin^2 Z + \cos^2 Z = 1$
4. $\sin(Z_1 \pm Z_2) = \sin Z_1 \cos Z_2 \pm \cos Z_1 \sin Z_2$ نفس الاشارة
5. $\cos(Z_1 \pm Z_2) = \cos Z_1 \cos Z_2 \mp \sin Z_1 \sin Z_2$ عكس الاشارة
6. $\frac{d}{dZ}(\sin Z) = \cos Z$
7. $\frac{d}{dz}(\cos Z) = -\sin Z$

8. $\cos(2Z) = \cos^2 Z - \sin^2 Z$

9. $\sin(2Z) = 2\sin Z \cos Z$

10. $\frac{d}{dZ}(\tan Z) = \sec^2 Z, \qquad \frac{d}{dZ}(\cot Z) = -\csc^2 Z$

11. $\frac{d}{dZ}(\sec Z) = \sec Z \tan Z, \qquad \frac{d}{dZ}(\csc Z) = -\csc Z \cot Z$

12. $\overline{\cos Z} = \cos \bar{Z}, \qquad \overline{\sin Z} = \sin \bar{Z}$

13. $\sin Z = 0, \quad if\ Z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

14. $\cos Z = 0, \quad if\ Z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

15. $\sin(Z + 2\pi) = \sin Z, \quad \cos(Z + 2\pi) = \cos Z$

16. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - Z\right) = \cos Z$

الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

لإيجاد تعريف للدوال المثلثية العكسية فأننا نستعمل متطابقة اويلر:

$$Let\ Z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \qquad \cos^{-1} Z = w$$

$$\Rightarrow e^{2iw} - 2Ze^{iw} + 1 = 0$$

والتي حلها هو:

$$e^{iw} = \frac{-(-2Z) \pm \sqrt{(2Z)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{2Z \pm \sqrt{4Z^2 - 4}}{2} = \frac{2Z \pm 2\sqrt{Z^2 - 1}}{2}$$

$$e^{iw} = Z \pm \sqrt{Z^2 - 1}$$

وباختيار الجزء الموجب من الحل لكونه الفرع الذي يجعل قيمة $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$، ينتج:

$$\Rightarrow e^{iw} = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

$$\log e^{iw} = \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{i}\log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$$

$$\boldsymbol{\cos^{-1} Z = \frac{1}{i}\log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)}$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد:

$$\sin^{-1} Z = \frac{1}{i}\log\left(iZ + \sqrt{1 - Z^2}\right)$$

$$\tan^{-1} Z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i + Z}{i - Z}\right) \qquad \cot^{-1} Z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{Z + i}{Z - i}\right)$$

$$\sec^{-1} Z = \frac{1}{i}\log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - Z^2}}{Z}\right) \qquad \csc^{-1} Z = \frac{1}{i}\log\left(\frac{i + \sqrt{Z^2 - 1}}{Z}\right)$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} Z) = \frac{1}{\sqrt{1 - Z^2}} \qquad \frac{d}{dz}(\cos^{-1} Z) = \frac{-1}{\sqrt{1 - Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\sec^{-1} Z) = \frac{1}{Z\sqrt{Z^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dz}(\tan^{-1} Z) = \frac{1}{1 + Z^2}, \quad Z \neq \pm i$$

$$\frac{d}{dz}(\cot^{-1} Z) = \frac{-1}{1 + Z^2}, \quad Z \neq \pm i \qquad \frac{d}{dz}(\csc^{-1} Z) = \frac{-1}{Z\sqrt{Z^2 - 1}}$$

الدوال الزائدية Hyperbolic Function

يمكن تعريف الدوال الزائدية بوساطة الدوال الاسية وبنفس الأسلوب المتبع في الفضاء الحقيقي:

$$\cosh Z = \frac{e^Z + e^{-Z}}{2}, \qquad \sinh Z = \frac{e^Z - e^{-Z}}{2}$$

بعض خصائص الدوال الزائدية Some Properties of the Hyperbolic Functions

1. $\sinh(-Z) = -\sinh Z$ دالة فردية
2. $\cosh(-Z) = \cosh Z$ دالة زوجية
3. $\cosh^2 Z - \sinh^2 Z = 1$
4. $\sinh(Z_1 \pm Z_2) = \sinh Z_1 \cosh Z_2 \pm \cosh Z_1 \sinh Z_2$
5. $\cosh(Z_1 \pm Z_2) = \cosh Z_1 \cos Z_2 \pm \sinh Z_1 \sin Z_2$
6. $\frac{d}{dZ}(\sinh Z) = \cosh Z,$ $\frac{d}{dz}(\cosh Z) = \sinh Z$
7. $\frac{d}{dZ}(\tanh Z) = \operatorname{sech}^2 Z,$ $\frac{d}{dZ}(\coth Z) = -\operatorname{csch}^2 Z$

العلاقة بين الدوال المثلثية والزائدية The Relationship Between Trigonometric and Hyperbolic Functions

حيث ان:

$$\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}, \qquad \sin Z = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}$$

بتعويض iZ بدل Z، فأننا نحصل على

$$\cos iZ = \frac{e^{i.iZ} + e^{-i.iZ}}{2}, \qquad \sin iZ = \frac{e^{i.iZ} - e^{-i.iZ}}{2i}$$

$$\cos iZ = \frac{e^{-Z} + e^{Z}}{2}, \qquad \sin iZ = \frac{e^{-Z} - e^{Z}}{2i}$$

$$\boldsymbol{\cos iZ = \cosh Z}, \qquad \boldsymbol{\sin iZ = i \sinh Z}$$

وبنفس الطريقة فأننا يمكننا اثبات ان:

$$\boldsymbol{\cosh iZ = \cos Z\,, \qquad \sinh iZ = i \sin Z}$$

ويمكننا استعمال العلاقات أعلاه لإيجاد ان:

$$\boldsymbol{\sin Z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

$$\boldsymbol{\cos Z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$\boldsymbol{\sinh Z = \sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y}$$

$$\boldsymbol{\cosh Z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y}$$

وايضاً

$$|\sinh Z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\cosh Z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

$$|\sin Z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\cos Z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

مثال : اثبت صحة العلاقة التالية

$$\boldsymbol{\sin Z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

$$As: \cos iy = \cosh(y)\,, \qquad \sin iy = i \sinh y$$

$$\therefore \sin Z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

مثال : استعمل العلاقة $\cos Z = \frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}$ لأثبات ان

$$\boldsymbol{\cos Z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$\cos Z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{i(-x-iy)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)\right]$$

$$= \cos x \left[\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right] - i \sin x \left[\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right] = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

مثال : اثبت صحة العلاقة التالية $|\sin Z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

$$|\sin Z|^2 = |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x \cos iy + \cos x \sin iy|^2$$

$$since \quad \cos iy = \cosh y\,, \sin iy = i \sinh y$$

$$\begin{aligned}|\sin Z|^2 = |\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x \cosh^2 y + (1-\sin^2 x)\sinh^2 y \\ &= \sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x\,(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y\end{aligned}$$

الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Function

$$Let\ Z = \sinh w \quad \Rightarrow \quad w = \sinh^{-1} Z$$

$$\because \sin(iw) = i \sinh w \quad \Rightarrow \quad \sinh w = \frac{1}{i}\sin(iw) = Z$$

$$\Rightarrow \sin(iw) = iZ$$

$$iw = \sin^{-1} iZ$$

$$iw = \frac{1}{i}\log\left(i(iZ) + \sqrt{1-(iZ)^2}\right)$$

$$w = -\log\left(-Z + \sqrt{1+Z^2}\right)$$

$$w = \log\left(\frac{1}{-Z+\sqrt{1+Z^2}}\right)$$

وباستعمال قاعدة القسمة ينتج:

$$w = \log\left(Z + \sqrt{1+Z^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\sinh^{-1} Z = \log\left(Z + \sqrt{1+Z^2}\right)}$$

وبنفس الطريقة يمكننا ايجاد

$$\boldsymbol{\cosh^{-1} Z = \log\left(Z + \sqrt{Z^2-1}\right)}$$

$$\boldsymbol{\tanh^{-1} Z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right), \qquad Z \neq \pm 1}$$

$$\boldsymbol{\coth^{-1} Z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right) = tanh\left(\frac{1}{z}\right), \qquad Z \neq \pm 1}$$

$$\mathbf{sech^{-1}\, Z = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-Z^2}}{Z}\right) = \cosh\left(\frac{1}{Z}\right), \qquad Z \neq 0}$$

$$\mathbf{csch^{-1}\, Z = \log\left(\frac{1+\sqrt{1+Z^2}}{Z}\right) = \sinh\left(\frac{1}{Z}\right), \qquad Z \neq 0}$$

مشتقات الدوال الزائدية

$$\frac{d}{dz}(\sinh^{-1} Z) = \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh^{-1} Z) = \frac{1}{\sqrt{Z^2-1}}$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} Z) = \frac{1}{1-Z^2}\,, \qquad Z \neq \pm i$$

$$\frac{d}{dz}(\coth^{-1} Z) = \frac{1}{1-Z^2}\,, \qquad Z \neq \pm i$$

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{sech}^{-1} Z) = \frac{-1}{Z\sqrt{1-Z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{csch}^{-1} Z) = \frac{-1}{Z\sqrt{Z^2+1}}$$

مثال: جد قيمة ما يلي

1. $\mathbf{\sin(i1.8185)}$

$$\sin(0+1.8185i) = \sin 0 \cos i1.8185 + \sin i1.8185 \cos 0$$
$$= 0 \times \cosh 1.8185 + i \sinh 1.8185 \times 1 = i3$$

2. $\mathbf{\sin^{-1} i3}$

Since $\sin^{-1} Z = \frac{1}{i}\log\left[iZ + \sqrt{1-Z^2}\right]$

$$\sin^{-1} i3 = \frac{1}{i}\log\left[i(i3) + \sqrt{1-(i3)^2}\right] = \frac{1}{i}\log\left[-3+\sqrt{10}\right]$$
$$= \frac{1}{i}\log[-3+3.1623] = \frac{1}{i}\log[0.1623] = \frac{1}{i}(-1.8185)$$
$$= i1.8185$$

3. **cosh 2**

$$cosh2 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = \frac{7.389 +}{2} \text{ 63 } \frac{5}{\ } = \frac{7.524}{2} = 3.762$$

4. $\mathbf{cosh^{-1}\,3.762}$

Since $\cosh^{-1} Z = \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$

$\cosh^{-1} 3.762$

$$= \log\left(3.762 + \sqrt{(3.762)^2 - 1}\right)$$
$$= \log\left(3.762 + \sqrt{13.153}\right) = \log(3.762 + 3.627) = \log(7.389)$$
$$= 1.9999 \approx 2$$

5. $\mathbf{sec\,(1 - \mathit{i})}$

$$\sec(1 - i) = \frac{1}{\cos(1 - i)} = \frac{1}{\cos 1 \cosh 1 + i \sin 1 \sinh 1} = \frac{1}{0.8337 + i0.9889}$$
$$= \frac{0.8337 - i0.9889}{0.8337^2 + 0.9889^2} = \frac{0.8337 - i0.9889}{1.6730} = 0.4983 - i0.5911$$

6. $\mathbf{tan(2 - \mathit{i})}$

$$\tan(2 - i) = \frac{\sin(2 - i)}{\cos(2 - i)} = \frac{\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1}{\cos 2 \cosh 1 + i \sin 2 \sinh 1}$$
$$= \frac{\sin 2 \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} - i \cos 2 \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2}}{\cos 2 \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} + i \sin 2 \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2}}$$
$$= \frac{0.909 \times 1.543 - i1.175 \times (-0.416)}{(-0.416) \times 1.543 + i1.175 \times 0.909} = \frac{1.403 + i0.488}{-0.642 + i1.068}$$
$$= \frac{-0.901 + 0.521 - i1.498 - i0.313}{0.6426^2 + 1.068^2} = \frac{-0.38 - i1.811}{1.553}$$
$$= -0.245 - i1.166$$

$$\sinh^{-1} i\frac{\pi}{2} = \log\left[i\frac{\pi}{2} + \sqrt{1 + \left(i\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] = \log\left[i\frac{\pi}{2} + \sqrt{-0.571}\right]$$
$$= \log[i1.571 + i0.756] = \log[2.327i] = \log 2.327 + i\frac{\pi}{2}$$
$$= 0.845 + i\frac{\pi}{2}$$

8. $\mathbf{cos}(\boldsymbol{e^{1+i}})$

$$\cos(e^{1+i}) = \cos(e^1 e^i) = \cos\left(e\left(\cos 1 \times \frac{180}{3.14} + i\sin 1 \times \frac{180}{3.14}\right)\right)$$
$$= \cos(1.4687 + i2.2874)$$
$$= \cos 1.4687 \cosh 2.2874 - i\sin 1.4687 \sinh 2.2874$$
$$= 0.101 \times 4.9754 - i4.8739 \times 0.9948 = 0.5070 - i4.8486$$