الفصل الثاني / القوى والجذور

القوى (Powers)

يمكن حساب القوى للعدد المعقد باستخدام نظرية ديموفر (De.Movire’s) والتي هي

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

وممكن ان تكتب كما يلي

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$Z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$$
$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)^n.$$

نستفاد من هذه النظرية لحساب القوى للعدد المعقد مهما كانت قيمة القوى.

مثال 1. احسب $(1+i)^{10}$

الحل/ لحساب القوة للعدد العقدي اعلاه نحتاج اولا الى تمثيله بالصيغة القطبية

$$Z = 1 + i \rightarrow (1,1)$$
$$|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$
$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

وثانياً نستخدم نظرية ديموفر لايجاد قوة العدد المعقد المعطى كما يلي

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= r^{10}(\cos 10\theta + i\sin 10\theta) \\
&= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) \\
&= 2^{5}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) \\
&= 32(\cos 450 + i\sin 450) \\
&= 32(0+i) \\
&= 32i.
\end{aligned}
$$

مثال2. احسب $(1+i)^{-8}$.

$$r=\sqrt{2},\quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

$$r=(\sqrt{2})^{-8}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-8}=2^{-4}=\frac{1}{16}.$$

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{-8} &= \frac{1}{16}(\cos\frac{-8\pi}{4} + i\sin\frac{-8\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{16}(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) \\
&= \frac{1}{16}(\cos(2\pi) - i\sin(2\pi)) \\
&= \frac{1}{16}(1-0) \\
&= \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

باستخدم نظرية ديموفر يمكن ان نجد العلاقات التالية:

- If $n = 2$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

باستعمال خواص المساواة، فأننا سنجد ان:

$$\mathbf{\sin 2\boldsymbol{\theta} = 2\cos\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{\cos 2\boldsymbol{\theta} = \cos^2\boldsymbol{\theta} - \sin^2\boldsymbol{\theta} = 1 - 2\sin^2\boldsymbol{\theta} = 2\cos^2\boldsymbol{\theta} - 1}$$

- If $n = 3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$\mathbf{\cos 3\boldsymbol{\theta} = 4\cos^3\boldsymbol{\theta} - 3\cos\boldsymbol{\theta}}$$
$$\mathbf{\sin 3\boldsymbol{\theta} = 3\sin\boldsymbol{\theta} - 4\sin^3\boldsymbol{\theta}}$$

- If $n = 4$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$
$$\mathbf{\cos 4\boldsymbol{\theta} = 8\cos^4\boldsymbol{\theta} - 8\cos^2\boldsymbol{\theta} + 1}$$
$$\mathbf{\sin 4\boldsymbol{\theta} = 4\sin\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\theta}\,(1 - 2\sin^2\boldsymbol{\theta})}$$

واجب بيتي/ استخدم نظرية ديموفر لحساب cos5θ, sin5θ بدلالة sinθ and cosθ.