الفصل الرابع
الدوال الاساسية

في هذا الفصل سوف ندرس مجموعة من الدوال الاساسية في حقل الاعداد المعقدة والتي هي:

- الدالة الاسية
- الدالة اللوغاريتمية
- الدوال المثلثية
- الدوال الزائدية

الدالة الاسية (Exponential Function)

ليكن $Z = x + iy$، فأن الدالة الاسية تعرف كالتالي:

$$\boldsymbol{e^Z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

حيث ان y تقاس بالزوايا النصف قطرية (rad)

$$\pi = 3.14\ (rad) = 180(\deg)$$

احياناً يتم كتابة الدالة الاسية بالصيغة $\exp\ (Z)$ بدلاً عن e^Z.

بعض خصائص الدالة الاسية Some properties of the Exponential Function

1. $\frac{d}{dZ}(e^Z) = e^Z$
2. اذا كانت الدالة $w = f(Z)$ تحليلية في المجال D فأن e^w تحليلية أيضا في D
3. $|e^Z| = \left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x e^{iy}\right| = e^x|(\cos y + i \sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$

$$|e^Z| = e^x$$

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ (rad)$$

Argument of e^Z is differ from the argument of Z. i.e. $\arg(Z) = \tan^{-1}\frac{y}{x},\ (\deg)$

4. $e^{Z} \neq 0$

If $Z = x + i0 \Rightarrow w = e^{x}$

If $Z = 0 + iy \Rightarrow w = e^{iy} = \cos y + i \sin y$

If $Z = x + iy \Rightarrow w = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$

If $Z = 0 + i0 \Rightarrow w = e^{0} = 1$

5. $\exp(Z_1) \times \exp(Z_2) = \exp(Z_1 + Z_2)$

$\exp(Z_1) / \exp(Z_2) = \exp(Z_1 - Z_2)$

$1/\exp(Z) = \exp(-Z)$

6. $\exp(Z)^{m} = \exp(mZ), \quad m \in Z$

$\mathrm{Exp}(Z)^{\frac{1}{n}} = \exp\frac{1}{n}(Z + i2k\pi), \quad n, k \in Z$

$\exp(Z)^{\frac{m}{n}} = \exp\frac{m}{n}(Z + i2k\pi), \quad n, m, k \in Z$

7. $\exp(Z + i2k\pi) = \exp(Z) \times \exp(i2k\pi)$

and $\exp(i2k\pi) = e^{0}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$

It follows that $\exp(Z + i2k\pi) = \exp(Z)$

8. $\exp(\bar{Z}) = \overline{(\exp(Z))}$

9. $e^{i\pi} + 1 = 0$

امثلة. اكتب التعابير التالية بصيغة $a+ib$.

1. $e^{3+i4} = e^3\left(\cos\left(4\times\frac{180}{3.14}\right)+i\sin\left(4\times\frac{180}{3.14}\right)\right)$
$= 20(\cos 229.2 + i\sin 229.2) = 20(-0.653 - i0.757)$
$= -13.06 - i15.14$

2. $e^i = e^0\left(\cos\left(1\times\frac{180}{3.14}\right)+i\sin\left(1\times\frac{180}{3.14}\right)\right) = \cos 57.296 + i\sin 57.296$
$= 0.540 + i0.842$

3. $e^{e^i} = e^{0.540+i0.842} = e^{0.54}\left(\cos\left(0.842\times\frac{180}{3.14}\right)+i\sin\left(0.842\times\frac{180}{3.14}\right)\right)$
$= 1.716(\cos 48.243 + i\sin 48.243) = 1.716(0.666 + i0.746)$
$= 1.143 + i1.280$

4. $e^{Z^2} = e^{x^2-y^2+i2xy} = e^{x^2-y^2}e^{i2xy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy)$
$= e^{x^2-y^2}\cos 2xy + ie^{x^2-y^2}\sin 2xy$

5. $e^{i^{\frac{1}{2}}}, \quad let\ Z = i^{\frac{1}{2}}$

$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2, \quad k = 0,1$

$Z = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]$

$for\ k = 0, \quad \Rightarrow \quad Z = 0.7071 + i0.7071$

$for\ k = 1, \quad \Rightarrow \quad Z = -0.7071 - i0.7071$

$e^{0.7071+i0.7071} = e^{0.7071}e^{i0.7071}$
$= e^{0.7071}\left(\cos\left(0.7071\times\frac{180}{3.14}\right)+i\sin\left(0.7071\times\frac{180}{3.14}\right)\right)$
$= 1.542 + i1.318$

$e^{-0.7071-i0.7071} = e^{-0.7071}e^{-i0.7071}$
$= e^{-0.7071}\left(\cos\left(-0.7071\times\frac{180}{3.14}\right)+i\sin\left(-0.7071\times\frac{180}{3.14}\right)\right)$
$= 0.375 - i0.320$

واجب بيتي

اكتب التعابير التالية بصيغة $a + ib$.

1. e^{3-i4} $\quad -13.129 + i15.201$
2. $e^{-e^{-i}}$ $\quad 0.389 + i0.434$
3. $e^{e^{Z}}$ $\quad 2.708 + i1.291$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

$$w = logZ \iff Z = e^{w}$$

$$\because w = U + iV$$

$$Z = e^{w}$$

$$r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = e^{U}(\cos V + i\sin V)$$

$$\Rightarrow r = e^{U} \Rightarrow U = \log r \ \ \& \ V = \theta + 2k\pi = \arg(Z)$$

$$\boldsymbol{w = \log Z = U + iV = \log r + i\,(\theta + 2k\pi)}, \qquad \boldsymbol{k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

- من هذا التعريف، نجد أن هناك قيم لانهائية لـ $\log Z$ التي تختلف بمقدار $2k\pi i$ ، كل قيمة لـ k تعطي لـ $\log Z$.
- بالنسبة إلى $k = 0$ ، قيمة $\log Z$ عندها تُسمى القيمة الأساسية.
- نحن نعني بـ $\log Z$ بالدالة $\ln Z$.

بعض خصائص دالة اللوغاريتمية Some Properties of the Logarithmic Function

1. $\frac{d}{dz}(\log Z) = \frac{1}{Z}$
2. $\log Z_1 + \log Z_2 = \log(Z_1 Z_2) = \log(r_1 r_2) + i[\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi]$
3. $\log Z_1 - \log Z_2 = \log\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + i[\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi]$
4. $\log Z^k = k\log Z$

5. $e^{\log Z} = Z$

6. $\log e^{Z} = Z + 2k\pi i$

الأسس (القوى) المركبة Complex Exponents

Let $w = \log Z$ 1

And $Z = e^{w}$ 2

Substituting eq. 1 in 2 we get:

$$Z = e^{\log Z}$$

$$(Z)^{w} = \left(e^{\log Z}\right)^{w}$$

$$\boldsymbol{Z^{w} = e^{w \log Z}}$$

امثلة. اذا علمت ان $Z^{w} = e^{w \log Z}$ جد قيمة ما يلي:

1. i^{i}

$$Let\ Z = i\ \&\ w = i$$

$$i^{i} = e^{i \log i}$$

$$\log i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$i^{i} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.208$$

2. $(1+i)^i$

$\Rightarrow \quad Z=(1+i), \qquad w=i$

$$\log Z=\log(1+i)$$

$$r=\sqrt{2}, \qquad \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\log(1+i)=\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}=0.347+i0.785$$

$$(1+i)^i=e^{i\log(1+i)}=e^{i(0.347+i0.785)}=e^{-0.785+i0.347}$$

$$(1+i)^i=e^{-0.785}.e^{i0.347}=0.456\left[\cos 0.347\times\frac{180}{3.14}+i\sin 0.347\times\frac{180}{3.14}\right]$$

$$(1+i)^i=0.456[0.94+i0.34]$$

$$(1+i)^i=0.429+i0.155$$

واجب بيتي

اذا علمت ان $Z^w=e^{w\log Z}$ جد قيمة ما يلي:

1. $\log(-i4)$ $\qquad \log 4+i\frac{3\pi}{2}$
2. $\log(2-i2)$ $\qquad \log 2\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}$
3. $\log(\sqrt{3}-i)$ $\qquad 0.693-i0.524$