الدالة التوافقية (Harmonic Function)

تسمى الدالة المكونة من متغيرين x, y بالدالة التوافقية اذا كانت مشتقاتها الجزئية الاولى والثانية مستمرة وتحقق المعادلة التالية

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$$

المعادلة اعلاه تسمى معادلة لابلاس وهي متحققة لكل من الدوال الحقيقة والمعقدة.

نظرية: لتكن $f(Z) = U(x,y) + iV(x,y)$ دالة تحليلية في المجال D، فأن كل من $U(x,y)$ و $V(x,y)$ هما دوال توافقية في D.

مثال اثبت ان $\Phi(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ هي الجزء الحقيقي من دالة تحليلية، وجد الجزء الخيالي لهذه الدالة.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \ \rightarrow \ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -6xy + 2 \ \rightarrow \ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -6x$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

$\Phi(x,y)$ هي دالة توافقية واستنادا الى النظرية فهي جزء من دالة تحليلية.

لإيجاد الجزء الخيالي من الدالة التحليلية، فأننا نستعمل شرطي كوشي ريمان.

$$\because \ U(x,y) = Re(\Phi(x,y))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \ldots\ldots 1$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = 6xy - 2 = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \ldots\ldots 2$$

وبتكامل معادلة رقم (1)، ينتج:

$$V = \int (3x^2 - 3y^2)\, dy = 3x^2 y - y^3 + c(x) \qquad \ldots\ldots 3$$

وبأخذ المشتقة لمعادلة رقم (3) بالنسبة الى x ومقارنتها مع معادلة رقم (2) لأجل إيجاد $c(x)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6xy + c'(x) = -\frac{\partial U}{\partial y} = 6xy - 2$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = -2 \;\Rightarrow\; c(x) = \int -2dx = -2x + D$$

$$\therefore V(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2x + D$$

$$\therefore f(Z) = (x^3 - 3xy^2 + 2y) + i(3x^2y - y^3 - 2x + D)$$

ان قيمة D يمكن ايجادها إذا علمنا في الأقل نقطتين من نقاط $V(x, y)$

المرافق التوافقي Harmonic Conjugate

لتكن $U(x, y)$ دالة توافقية في المنطقة D، فيوجد دالة مرافق توافقي $V(x, y)$ معرفة في المنطقة D بحيث ان $f(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$ هي دالة تحليلية.

ملاحظة: ان المرافق التوافقي للدالة يختلف عن مرافق العدد العقدي.

مثال لتكن الدالة $f(Z) = x^2 - y^2 + i2xy$، هل الجزء الخيالي هو مرافق للجزء الحقيقي (والعكس بالعكس)؟ إذا أبدلنا الجزئين أحدهما بدل الاخر، هل سيكونان مترافقان توافقيا؟

ليكون الجزء الخيالي مترافق توافقيا مع الجزء الحقيقي فأن الجزئين يجب ان يكونان توافقيان ويكونان دالة تحليلية.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2$$

$$\therefore U_{xx} + U_{yy} = 2 - 2 = 0, \text{ دالة توافقية } U$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\therefore V_{xx} + V_{yy} = 0 + 0 = 0, \qquad \text{ دالة توافقية } V$$

$$\left.\begin{array}{r} U_x = 2x = V_y \\ V_x = -2y = -U_y \end{array}\right\} \text{ دالة تحليلية تحقق شرطي كوشي – ريمان }$$

$\therefore$ الجزء الخيالي من الدالة $f(Z)$ هو مرافق توافقي للجزء الحقيقي.

إذا قمنا بأبدال الجزئين، فأن الدالة الجديدة ستكون هي:

$$f(Z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$$

$$U = 2xy, \qquad V = x^2 - y^2$$

$$\left.\begin{matrix} U_x = 2y, & V_y = -2y \\ U_y = 2x, & V_x = 2x \end{matrix}\right\}$$ كلا الجزئين لا يحققان شرطي كوشي – يمان، الدالة غير تحليلية

بالنسبة للدالة الجديدة، فعلى الرغم من ان كلا الجزئين توافقيان الا ان الجزء الخيالي لا يترافق توافقيا مع الجزءالحقيقي لكونهما لا يشكلان دالة تحليلية.