المتتابعات والمتسلسلات Sequences and Series

المتتابعات بالصيغة المعقدة Sequences in Complex Form

من الناحية الشكلية، التسلسل المعقد هو دالة مجالها هو الأعداد الصحيحة الموجبة ويكون نطاقها مجموعة فرعية من الأعداد المركبة. فيما يلي أمثلة على المتسلسلات:

$$f(n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right) + i\left(5 + \frac{1}{n}\right), \qquad n = 0,1,2,3, \dots$$

$$g(n) = e^{i\frac{\pi n}{4}}, \qquad n = 0,1,2,3, \dots$$

$$h(n) = 5 + i3 + \left(\frac{1}{n} + i\right)^n, \qquad n = 0,1,2,3, \dots$$

$$r(n) = \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{2}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,3, \dots$$

غاية المتتابعات Limit of a Sequences

ان الغاية $\lim_{n\to\infty} Z_n = \xi$ تعني ان لاي عدد حقيقي $\epsilon > 0$ يوجد مقابلة عدد صحيح موجب N_ϵ (والذي تعتمد قيمته على ϵ) بحيث ان $Z_n \in D_\epsilon(\xi)$ عندما يكون $n > N_\epsilon$. علما ان $|\xi - Z_n| < \epsilon$ عندما $n > N_\epsilon$.

نظرية 1. ليكن $Z_n = x_n + iy_n$ و $\xi = u + iv$ فأن

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \xi, \qquad iff$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \qquad and \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = v.$$

مثال 1. جد غاية المتتابعة $\{Z_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}+i(n+1)}{n}\right\}$

ابتداءً نعيد كتابة المتتابعة Z_n بدلالة جزءه الحقيقي والخيالي وكالتالي

$$Z_n = x_n + iy_n = \frac{\sqrt{n}+i(n+1)}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + i\frac{n+1}{n}$$

وبالتالي فأن الغاية للجزء الحقيقي والخيالي هي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \;\; and \;\; \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

أي ان الغاية للمتتابعة Z_n هي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+i(n+1)}{n} = 0 + i = i$$

المتسلسلات المركبة Complex Series

واحدة من أهم المفاهيم في التحليل في الفضاء (حقيقية أو معقدة) هي نظرية تسمح لنا بإضافة عدد غير منتهي من الحدود. لفهم هذه الفكرة، نبدأ بالمتتابعة $\{Z_n\}$ ، ونكوّن تتابعا جديدًا $\{S_n\}$ ، ويسمى بمتتابعة المجاميع الجزئية، كما يلي.

$$S_1 = Z_1,$$
$$S_2 = Z_1 + Z_2,$$
$$S_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3,$$
$$\vdots$$
$$S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k,$$

المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

ان الصيغة الرسمية $\sum_{k=1}^{\infty} Z_k = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \ , \ldots$ تدعى بالمتسلسلات اللانهائية، وتدعى الحدود $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ بحدود المتسلسلة.

وعند وجود عدد مركب ليكن S الغاية للمتسلسلة

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

عندها نقول ان المتسلسلات اللانهائية $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ تتقارب عند القيمة S، وان S هو مجموع المتسلسلة اللانهائية. عند حدوث ذلك فيمكن ان نكتب ان

$$S = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

نظرية 2.ليكن $Z_n = x_n + iy_n$ و $S = u + iv$ فأن

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \qquad (converges)$$

فقط وإذا فقط كان كلا

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ \ and \ \ v = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad (converge).$$

نظرية 3.إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ هي متسلسلة متقاربة، فأن $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$.

مثال بين ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + i\frac{(-1)^n}{n}\right]$ هي متقاربة.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ هما متسلسلتان متقاربتان. واستنادا الى النظرية 1 فأن المتسلسلة المركبة تكون متقاربة.

مثال بين ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |(1+i)|^n$ هي متسلسلة متباعدة.

على فرض ان $Z_n = (1+i)^n$ فمكننا ان نلاحظ ان

$$\lim_{n\to\infty} |Z_n| = \lim_{n\to\infty} |(1+i)^n| = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = \infty$$

لكون ان $\lim_{n\to\infty} |Z_n| \neq 0$ ، واستنادا الى النظرية 3 فأن المتسلسلة هي متباعدة.

نظرية 4. ليكن $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ هما متسلسلتان متقاربتان، وليكن c عدد مركب، فأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} cZ_n = c\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

متسلسلات تايلر ومكلورين Taylor and Maclaurin Series

لنفترض أن الدالة المعقد $f(Z)$ هي تحليلية في بعض المناطق من المستوى المعقد ولتكن Z_0 نقطة داخل تلك المنطقة. فأن $f(Z)$ تمتلك متسلسلات قوى بمعاملات يمكن احتسابها بوساطة احتساب مشتقات الدالة عند تلك النقطة، ان متسلسلة تايلر للدالة تعطى بالعلاقة التالية.

$$f(Z) = f(Z_0) + \frac{f'(Z_0)}{1!}(Z - Z_0) + \frac{f''(Z_0)}{2!}(Z - Z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}(Z - Z_0)^n + \cdots$$

وعند تحديد قيمة Z_0 للصفر لنجعل المتسلسلة تحتسب عند نقطة الأصل، عندها سنحصل على متسلسلة مكلورين وكما في العلاقة

$$f(Z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}Z + \frac{f''(0)}{2!}Z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}Z^n + \cdots$$

مثال جد متسلسلة تايلر للدالة $f(Z) = \frac{1}{1-Z+Z^2}$ حول نقطة الأصل.

سنحتسب المشتقتين الأولى فقط. بدايتا يجب ان نحتسب

$$f(0) = \frac{1}{1 - 0 + 0^2} = 1$$

وللمشتقة الأولى فأن

$$f'(Z) = \frac{d}{dZ}\left(\frac{1}{1 - Z + Z^2}\right) = \frac{-1}{(1 - Z + Z^2)^2}(-1 + 2Z)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1$$

وللمشتقة الثانية فأن

$$f''(Z) = \frac{d}{dZ}\left(\frac{1}{(1-Z+Z^2)^2}(-1+2Z)\right)$$
$$= \frac{2}{(1-Z+Z^2)^2} - \frac{2}{(1-Z+Z^2)^3}(-1+2Z)^2$$
$$\Rightarrow f''(0) = 0$$

وأخيرا، فأن معامل المشتقة الثالثة

$$f'''(Z) = \frac{d}{dZ}\left(\frac{2}{(1-Z+Z^2)^3} - \frac{2}{(1-Z+Z^2)^2}(-1+2Z)^2\right)$$
$$= \frac{6(-1+2Z)^3}{(1-Z+Z^2)^4} - \frac{12(-1+2Z)}{(1-Z+Z^2)^3}$$
$$\Rightarrow f'''(0) = 6$$

وعليه فأن المتسلسلة بعد تعويض قيم المعاملات هي

$$f(Z) = f(0) + Zf'(0) + \frac{Z^2}{2!}f''(0) + \frac{Z^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$
$$f(Z) = 1 + Z + Z^3 + \cdots$$