الفصل الثالث

دوال المتغيرات المعقدة

الدالة المعقدة. (Complex Function)

لتكن كل من D, R مجموعتان غير خالية من الاعداد المركبة. تسمى f دالة من D الى R اذا كانت f هي مجموعة الازاوج المرتبة (Z, w) بحيث $(Z, w)\in$ f. تسمى D مجال (منطلق) الدالة و R مجالها المقابل (مستقرها).

بمعنى اخر

$$f : D \to R \ \ such\ that$$
$$f(Z) = (Z, w)$$
$$w = f(Z)$$

الدالة المعقدة تتكون من جزء حقيقي وجزء خيالي

$$\begin{aligned} w = f(Z) &= u + iv \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

مثال/ ان الدالة المعطاة $w = f(Z) = Z^2$ هي دالة معقدة

$$\begin{aligned} w = f(Z) &= Z^2 \\ &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi \\ &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

الدالة الوحيدة القيمة (Single Value Function)

تكون الدالة $w = f(Z)$ وحيدة القيمة في المنطقة D اذا كان لكل $Z \in D$ يقابله قيمة وفقط قيمة واحدة من قيم الدالة $w = f(Z)$.

مثال/ الدالة $w = Z^2 + Z + 1$ وحيدة القيمة.

يعني هنا اي قمية تعوض تعطي قيمة واحدة.

الدالة المتعددة القيم (Multiple Valued Function).

تسمى الدالة $w = f(Z)$ متعددة القيم في المنطقة D اذا كان لكل $Z \in D$ يقابله عدة قيم من قيم الدالة $w = f(Z)$.

مثال/ الدالة $w = Z^{\frac{1}{2}}$ ثنائية القيمة لان لكل Z يقابله قيمتين ل w ولتحقيق ذلك نستعمل الصيغة القطبية $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وبتطبيق نظرية ديموفر نجد ان

$$w = Z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)$$

حيث $k = 0, 1$.

الدالة المتباينة (One to one Function)

لتكن $w = f(Z)$ دالة منطلقها D، تسمى f دالة متباينة اذا وفقط اذا كان لكل $Z_1, Z_2 \in D$

فأن

$$f(Z_1) = f(Z_2) \rightarrow Z_1 = Z_2$$

الدوال العكسية (Inverse Function)

اذا كانت f دالة متباينة منطلقها D ومداها S فان الدالة العكسية للدالة f ويرمز لها f^{-1} هي الدالة التي منطلقها S ومداها D ولكل $w \in S$ ويوجد $Z \in D$ بحيث $w = f(Z)$.

ولحساب الدالة العكسية f^{-1} للدالة f نجد Z بدلالة w ثم نعيد كتابتها بالصيغة $w = f(Z)^{-1}$ لكل $Z \in S$.

مثال/ لتكن الدالة $w = f(Z) = \frac{1}{Z+2}$، $Z \neq -2$ جد معكوسها.

الحل/ نحل المعادلة بدلالة Z

$$Z = \frac{1}{w} - 2, \; w \neq 0$$

يمكن اعادة كتابتها بالصيغة $w = f(Z) = \frac{1}{z} - 2, \; Z \neq 0.$

الدوال المركبة (Composite Functions)

لتكن f دالة معرفة على المنطقة D، g دالة معرفة على المنطقة E. نفرض لكل $Z \in D$ وان $f(Z) \in E$ اي ان جميع قيم f تقع في المنطقة E (منطلق g) عندئذ يمكن تعريف الدالة g(f(Z)) على المنطقة D. ان الدالة g(f(Z)) تسمى الدالة المركبة من g،f.

مثال/ اذا كانت $f(Z) = 3Z + i,\ g(Z) = Z^2 + Z + 1 - i$ احسب g(f(Z))، f(g(Z)).

الحل

$$\begin{aligned} f(g(Z)) &= f(Z^2 + Z + 1 - i) \\ &= 3(Z^2 + Z + 1 - i) + i \\ &= 3Z^2 + 3Z + 3 - 2i. \\ g(f(Z)) &= g(3Z + i) \\ &= (3Z + i)^2 + (3Z + i) + 1 - i \\ &= 9Z^2 + 6Zi + i^2 + 3Z + i + 1 - i \\ &= 9Z^2 + 3Z(2i + 1). \end{aligned}$$

نلاحظ ان $f(g(Z)) \neq g(f(Z))$.

واجبات بيتية

1. اذا كانت $w = f(Z) = Z^2 - 1$ جد $f(-2 + i)$.
2. عين منطلق الدالة $f(Z) = \dfrac{1}{Z^2 + 1}$
3. اذا كانت $w = Z^3 + Z + 1$ اكتبها بالصيغة $u(x, y) + iv(x, y)$.
4. جد معكوس الدالة $f(Z) = \sqrt{Z - 1}$.
5. جد الدوال المركبة $f(g(Z)),\ g(f(Z))$ اذا كانت $f(Z) = Z - 1,\ g(Z) = \sqrt{1 - Z}$.