نظرية المعادلات التفاضلية / 2
المرحلة الرابعة . قسم الرياضيات ، علوم بنات
أ . د . سعد ناجي علي العزاوي
جامعة بغداد
2019 – 2020

Nonlinear 1^{st} order Systems

درسنا في الفصل الاول حل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى والتي صيغتها العامة

$$\frac{dX_{n\times1}}{dt} = A_{n\times n}(t)\, X(t) + B_{n\times1}(t)$$

وفي هذا الفصل سندرس أنظمة المعادلات التفاضلية اللاخطية من الرتبة الاولى

$$\frac{dX_{n\times n}}{dt} = F_{n\times1}(X,t)$$

وبالتحديد عندما $n=2$ أي سندرس النظام المتكون من معادلتين وتكون صيغته

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad \cdot = \frac{d}{dt} \quad \text{.....}(1)$$
$$\dot{y} = g(x,y)$$

حيث كما هو واضح أن t سيمثل الزمن وهو المتغير المستقل والمتغيرات التابعة هما x و y.
والدوال f و g دوال مستمرة على منطقة معينة D من المستوي xy.

أ.د سعد ناجي علي العزاوي
نظرية المعادلات التفاضلية/ 2 قسم الرياضيات/ علوم بنات/ جامعة بغداد
مرحلة رابعة
2020 - 2019

أخذنا النظام (1) بمعادلتين لأن أغلب التطبيقات نوصف بهكذا أنظمة

*) ليس من السهولة حل النظام (1) ولذلك نلجأ الى ما يسمى السلوك النوعي للحلول qualitative behaviour أي نتعرف صفات الحل دون إيجاده.

وهنا يكون السؤال كيف نتمكن من ذلك والاجابة هي أننا ننظر للنظام (1) على أنه إهتزاز بسيط لنظام خطي أي ننظر الى النظام (1) على أنه بالصيغة

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(x,y) \quad \ldots\ldots(2)$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + g_1(x,y)$$

حيث ان f_1 و g_1 دوال من الدرجة الثانية بالمتغيرين x و y وان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1(x,y) = 0$$

وهذا يعني أننا نهمل تأثير f_1 و g_1 في جوار نقطة الاصل ونقطة الاصل هذه هي نقطة اتزان النظام

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \quad \text{------}(3)$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

يسمى النظام (3) بالجزء الخطي للنظام (1)

د. سعد ناجي علي العزاوي
نظرية المعادلات التفاضلية / قسم الرياضيات / علوم بنات جامعة بغداد
مرحلة رابعة
2019 - 2020

*) رُبَّ سائلٍ يسأل كيف حصلنا على النظام (2)
والجواب هو أننا نشرنا الدالتين f و g بمتسلسلة
تايلر حول النقطة $(0,0)$ أي متسلسلة ماكلورين
نُعيد كتابة النظام (3) بصيغة المصفوفات

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \cdots (4)$$

مبرهنة هارتمان
Hartman Theorem

إن سلوك حل النظام (1) يشبه سلوك حل الجزء
الخطي (3) إذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة A
في النظام (4) ليست خيالية صرفة .

هنا $A_{2\times2}$ مصفوفة من السعة 2×2 ولها قيمتان ذاتيتان
λ_1 و λ_2 وعندما نقول λ_1 خيالية صرفة نقصد أن
جزءها الحقيقي صفر ($\lambda_1 = bi$)

*) نلاحظ من المبرهنة أعلاه أننا سندرس بالتفصيل سلوك
حل النظام (4) بمعنى أننا سنتبع كل نوع الحل
ولنأخذ المثال البسيط الآتي :-

أ.د. سعد ناجي علي العزاوي
نظرية المعادلات التفاضلية / 2 قسم الرياضيات / كلية العلوم للبنات / جامعة بغداد
مرحلة رابعة
2020 - 2019

مثال: ارسم حل النظام

$$\dot{x} = 2x + y$$
$$\dot{y} = -5x - 2y$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

نجد القيم الذاتية للمصفوفة A بحل المعادلة

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda - 4 + 5$$

$$= \lambda^2 + 1$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \mp i$$

ثم نجد المتجهات الذاتية العائدة لها

$$[A - iI]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2-i)v_1 + v_2 = 0 \longrightarrow v_2 = (i-2)v_1$$
$$-5v_1 - (2+i)v_2 = 0 \longrightarrow -5v_1 - (2+i)(i-2)v_1 = 0 \longrightarrow 0 = 0$$

أي ان $v_2 = (i-2)v_1$ ونفرض $v_1 = 1$ نحصل

على $v_2 = i - 2$

$$\therefore V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i-2 \end{bmatrix} \Longrightarrow V_2 = \bar{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i-2 \end{bmatrix}$$

∴ الحل هو

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 V_1 e^{it} + c_2 V_2 e^{-it}$$

أي أن

$$x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$

$$= c_1[\cos t + i\sin t] + c_2[\cos t - i\sin t]$$

$$y(t) = c_1(i-2) e^{it} - c_2(i+2) e^{-it}$$

$$= c_1(i-2)[\cos t + i\sin t] - c_2(i+2)[\cos t - i\sin t]$$

ولنفرض أنه بشروط إبتدائية معينة حصلنا

$c_1 = c_2 = 1$ مثلاً

وبالتعويض في أعلاه نحصل على

$$x(t) = 2\cos t \quad , y(t) = -2\sin t$$

ولرسم الحل علينا التخلص من t وذلك لأننا سنرسم الحل بالمستوي xy أي وجوب التخلص من t وببساطة

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$$

أي أن الحل ليس إلا دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وبما أن الحلول متوازية فإن حلول المثال أعلاه دوائر متحدة المركز

*) لاحظنا أننا صرفنا جهداً للحصول على هذه النتيجة والآن نتطلع إلى طريقة تبسط الحل أعلاه بمعنى أننا لا نريد التعامل مع المصفوفة A بل مع واحدة شبيهها (كأن تكون قطرية أو بسيطة) وهذا ما سنقوم به الآن (صيغ Jordan القياسية)

أ.د. سعد ناجي م
نظرية المعادلات التفاضلية /2 قسم الرياضيات علوم بنات جامعة بغداد
مرحلة رابعة
2020-2019

Jordan Canonical Forms

لتكن A مصفوفة من السعة 2×2 ولتكن قيمتاها الذاتيتان هما λ_1 و λ_2 فان A تشبه احدى الصيغ القياسية الآتية

(1) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ if $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ if $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ if A is not diagonal. and the eigen values are identical

(4) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$

if $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ & $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

نعود الى المثال حيث كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ وقيمها الذاتية $\mp i$ فتكون A مشابهة لحالة (4) أي

$$A \approx \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad [\beta = 1 \ \& \ \alpha = 0]$$

أي بدلا من حل المثال

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = iy \ \& \ \dot{y} = -ix \longrightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-ix}{iy} = -\frac{x}{y}$$

أ.د. سعد ناجي علي العزاوي

ومنها نحصل على

$$xdx+ydy=0$$

وحلها هو

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c$$

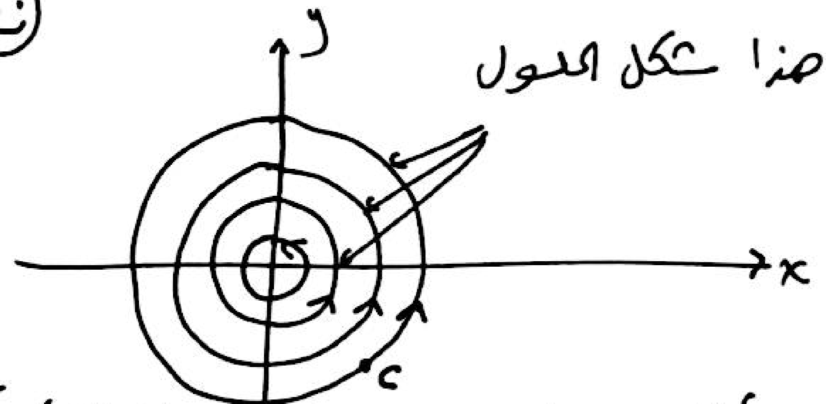
واضح أن $c>0$ ونحصوره $\frac{r^2}{2}$ وبذلك فالحل هو

$$x^2+y^2=r^2$$

وهو عائلة من الدوائر متحدة المركز.

أرأيتم ؟ مبسطة هذه الطريقة

هذا شكل الحلول



لو بدأنا من النقطة c على الدائرة في هذا الشكل كيف سيكون الدوران ؟ هل مع عقرب الساعة أم مع العكس والجواب بما أنه $\beta=1>0$ فإن الدوران عكس عقرب الساعة وهكذا فالدوران أو الحركة على هذه الدوائر تكون عكس عقرب الساعة حول نقطة الأصل.

أعطينا برهنة هارتمان في الصفحة الثالثة متى يكون سلوك المنظومة اللاخطية وجزء الخطي متشابه

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = F(x,t) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = AX + G(x,t) = AX + \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ g_1(x,y) \end{bmatrix}$$

ومما توصلنا إليه أنه سندرس بالتفصيل سلوك حلول النظام $\dot{X} = AX$ حيث A مصفوفة ثابتة وقلنا سندرس هكذا النظام أولاً إعتماداً على صيغ جوردان القانونية المعطاة في الصفحة السادسة أي سندرس بالتفصيل سلوك حلول الأنظمة

(1) $\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} X$ (2) $\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X$

(3) $\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X$ (4) $\dot{X} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} X$

Def $\dot{X} = AX$ is called simple dynamical system if $|A| \neq 0$ and it is called nonsimple if $|A| = 0$

Case 1 Simple dynamical system

$$|A| \neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 \neq 0 \;\&\; \lambda_2 \neq 0$$

نظرية المعادلات التفاضلية 2/ [illegible]

Def: (equilibrium point نقطة اتزان)

A point (x_0, y_0) is called an equilibrium point of

$$\dot{x} = f(x, y) \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

if $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$

Note Every equilibrium point of system (1) is solution.

أي لكل نقطة الإتزانية هناك حلول إما يشكل تقاطع أو منحنيات غير مغلقة أو منحنيات مغلقة.

Note All of us study the qualitative behavior (السلوك النوعي) of the solution in a neighbourhood (جوار) of the equilibrium points

Def: Phase space is the plane of the variables x & y. (xy-plane)

نظرية المعادلات التفاضلية 2/ ث ج ، رياضة د. سعد [illegible]

Def Phase portrait صور الطور

is the shape of the solutions

هو صور المنحنيات (الحلول) أي صور ر.ت

العلاقة بين x و y.

Note

In the example in pages 6-7,

$$\dot{x} = 2x + y$$
$$\dot{y} = -5x - 2y$$

i.e. $\dot{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} X$

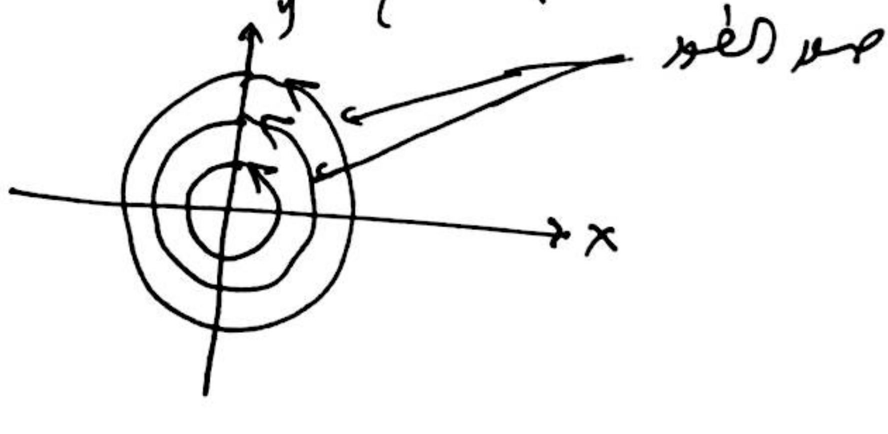
$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\therefore$ It is simple dynamical system

Its equil. pt. is the sol. of

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ -5x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0$$

$(0,0)$ is the equil. pt



Scanned with CamScanner