نظرية الانظمة الديناميكية / 2 رابع , رياضيات علوم ج / بغداد

د. محمد ثامر الدليمي 2019 - 2020

A is similer to $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(I) $A \approx \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

i.e. $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

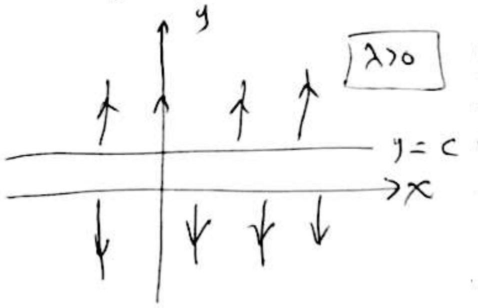
$\dot{x} = \lambda x \quad , \dot{y} = 0 \Longrightarrow y \equiv c$

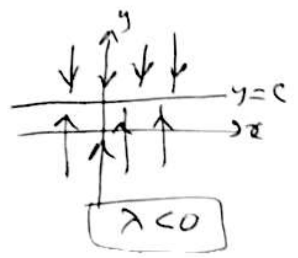
$\Downarrow$

$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } \lambda > 0 \text{: each equil. pt. is unstable} \\ 0 & \text{if } \lambda < 0 \text{: " " " " asympt. stable} \end{cases}$

The equil. pts lie on the line $y \equiv c$





(II) $A \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

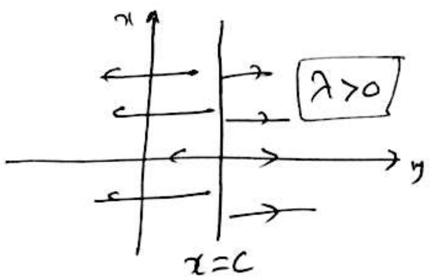
$\dot{x} = 0 \longrightarrow x(t) = c \quad \forall t$

$\dot{y} = \lambda y = y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

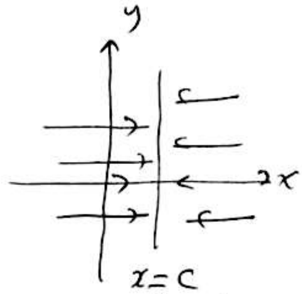
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } \lambda > 0 \\ 0 & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

The equili pts are $\{(x, y) : x(t) = c\}$

which is a line parallel to y-axis



all equil pts are unstable



all equil pts are asymptotically stable

نظرية الصيرورة [illegible] رابع رياضيات علوم ثالثة / بغداد
أ.د. سعد ناجي العزاوي
2020 - 2017

eg Draw the phase portrait

ارسم صور الطور للنظام الآتي

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} X \;,\; X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(I)

Sol $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda$$

$$\therefore \lambda_1 = 0 \;\&\; \lambda_2 = 7$$

نجد المتجهات الذاتية

$$[A - \lambda_1 I] V_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_{11} - 3v_{21} = 0 \longrightarrow v_{11} = 3v_{21} \\ -2(v_{11} - 3v_{21}) = 0 \end{matrix}$$

نفس الدرس

let $v_{21} = 1 \rightarrow v_{11} = 3$

$$\therefore V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -6v_{12} - 3v_{22} = 0 \\ -2v_{12} - v_{22} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_{22} = -2v_{12}$$

let $v_{12} = 1 \rightarrow v_{22} = -2$

$$\therefore V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{7t}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$c_1 = c_2 = 1$$

تطبيقات المعادلات التفاضلية / قسم الرياضيات علوم ... / ...
Suppose $\cancel{c_1 = c_2 = 1}$ 2020 -2019 [illegible]

$$\therefore x(t) = 3 + e^{7t} \longrightarrow e^{7t} = x - 3$$

$$y(t) = 1 - 2e^{7t} \longrightarrow e^{7t} = \frac{1-y}{2}$$

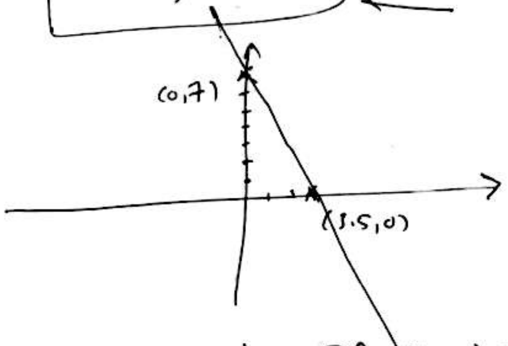
$$\Rightarrow x - 3 = \frac{1-y}{2}$$

$$\therefore 2x - 6 = 1 - y$$

$$\boxed{2x + y - 7 = 0}$$

$c_1 = c_2 = 1$ مجموعة الحلول لهذه

من النسخ هذا



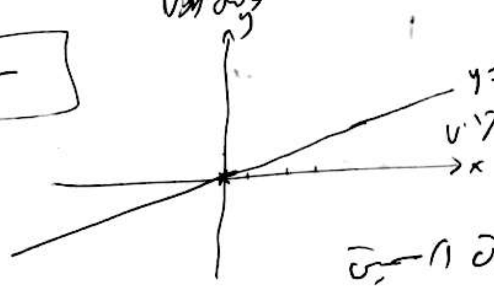
II

ننظر الى نقاط الاتزان للمسألة المعطاة بحل

$$AX = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ -2x + 6y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ متكافئتان معادلة واحدة ونرسم لها

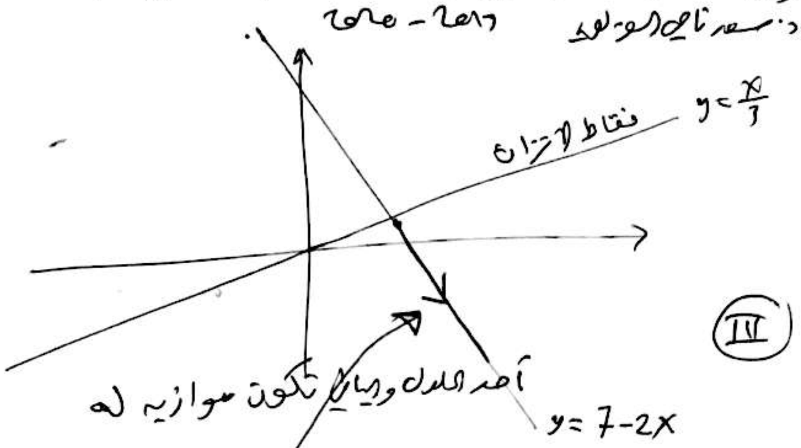
$$\boxed{y = \frac{x}{3}}$$



فنطاق الاتزان

نظرية المعادلات التفاضلية / رابع رياضيات / علوم بنات / بغداد

أ.د. سعد ناجي الموسوي 2020 - 2019



III

أحد الحلول وبيانياً تكون موازية له

<u>ملاحظة</u>: لا يتقاطع هذان المستقيمان (مستقيمات الحلول لا تتقاطع مع مستقيم نقاط الاتزان) وهكذا تبقى مستقيمات الحلول أشعة تتجه مبتعدة عن مستقيم نقاط الاتزان لأن $\lambda_2 > 0$ وذلك لأن

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{t\to\infty}(3+e^{7t}) = \infty \\ \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{t\to\infty}(1-2e^{7t}) = -\infty \end{aligned}\right\}$$

هذا يعني لنا أن هذا الشعاع واقع تحت مستقيم نقاط الاتزان كما مؤشر باللون الأحمر

هذا الشعاع تم تحديده عندما ~~[illegible]~~ $c_1 = c_2 = 1$ المحسوبة من الشرط الابتدائي

محاضرات المعادلات التفاضلية ٢ الرابع رياضيات علوم شبكات / بغداد

2020 - 2019 د. سعد ناجي العزاوي

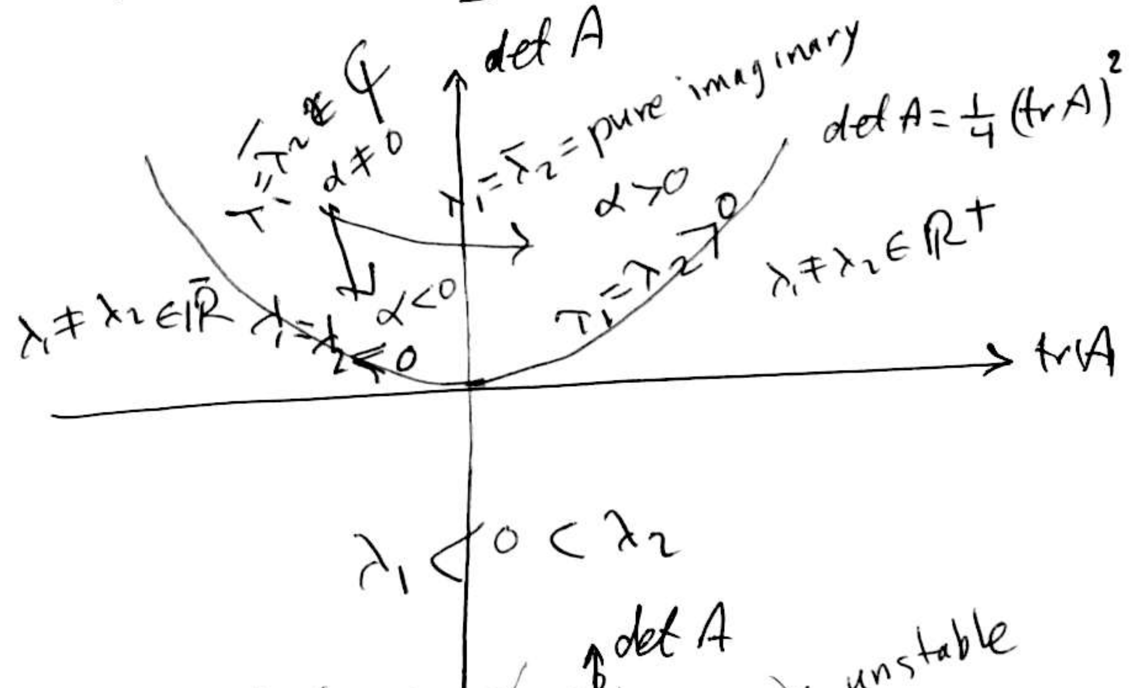
Collecting all the diagrams in one diagram

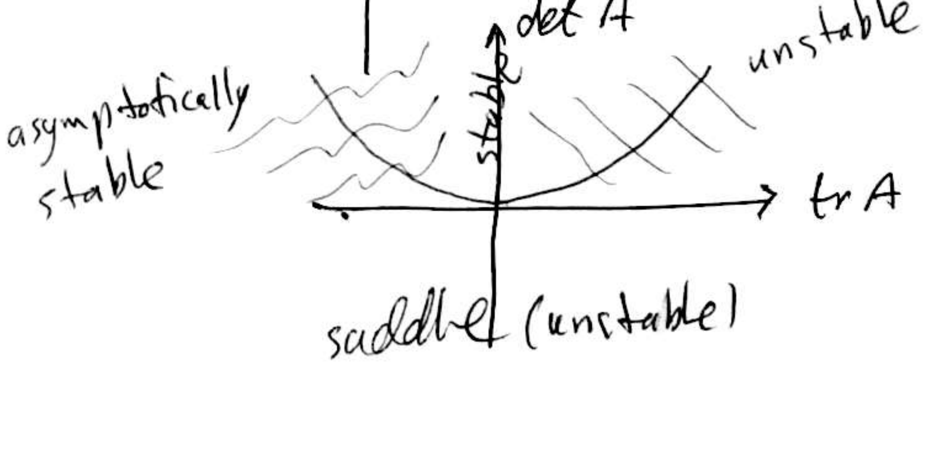
$$\dot{X} = \underset{2\times 2}{A}\, X_{2\times 1} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

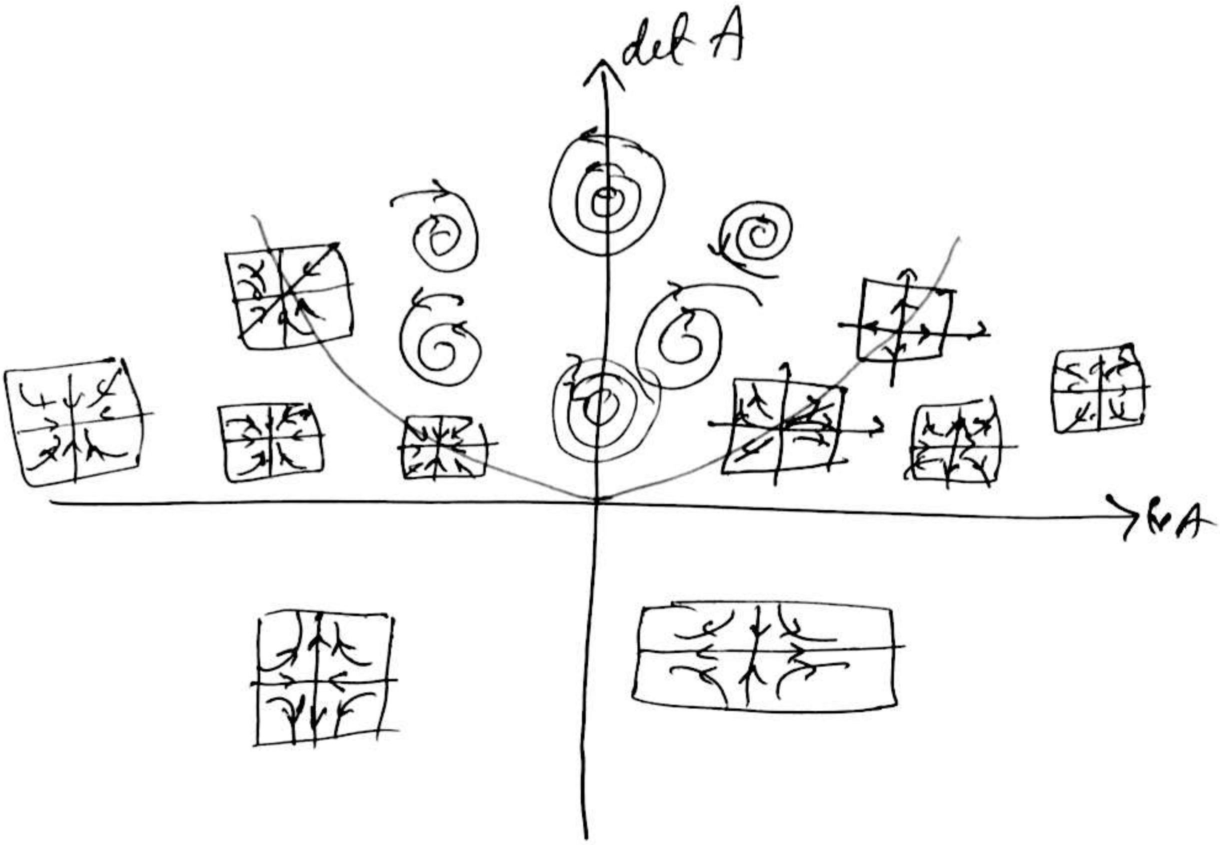
$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \mp \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

$$\text{trace}(A) = a_{11} + a_{22} \quad , \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \mp \sqrt{(trA)^2 - 4\det A}}{2}$$







All phase portraits are collected in this diagram

Nonlinear Systems

الأنظمة اللاخطية

It's form is:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad , \quad \dot{} = \frac{d}{dt}$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

where f and g are nonlinear functions.

س١) لماذا أخذنا النظام مكون من معادلتين؟
ج: لأن أغلب النماذج توصف بها
س٢) كيف نحل هذا النظام؟
ج: ليس بالضرورة إيجاد الحل بل معرفة تصرف الحل.
س٣) كيف نعرف تصرف الحل؟
ج: في جوار نقاط الاتزان، علماً أن نقاط الاتزان هي حلول لكنها ليست دوال بل نقاط.
س٤) كيف نعرف أن الحل يقترب أو يبتعد عن نقطة الاتزان؟
ج: حسب الاستقرارية لنقاط الاتزان
س٥) أين (المكان) ندرس سلوك الحل؟
ج: في جوار نقاط الاتزان وتسمى الدراسة المحلية.

نظم المعادلات التفاضلية /٢ رابع رياضيات علوم بنات / بغداد

أ.د. سعد ناجي علي

2019 - 2020

س٦ : كيف تختبر استقرارية نقاط اتزان الانظمة اللاخطية ؟

ج : ما دراسة استقرارية الانظمة الخطية . أي حسب القيم الذاتية

س٧) ما هي العلاقة بين حلول الانظمة اللاخطية وجزءها الخطي ؟

ج : حسب مبرهنة هارتمان .

س٨) هل هنالك حلول عبارة عن منحنيات مغلقة ؟

ج : نعم ولكن ليس لكل الانظمة اللاخطية .

س٩) ماذا يسمى الحل الذي هو منحني مغلق معزول ؟

ج : يسمى دارة غايتية . limit cycle

س١٠) كيف نضمن وجود دارة غايتية ؟ وكيف نجدها ؟

ج : حسب مبرهنات سنأخذها وأحدها تسمى مبرهنة بوانكاريه وتخمين الدارة الغايتية بالاحداثيات القطبية أو بالحاسبة .

سنبدأ أولاً بأمثلة لحساب نقاط الاتزان

---

eg Find the equilibrium points of :-

① $\dot{x} = x^2 + y^2 + 1$, $\dot{y} = x^2 - y^2$

② $\dot{x} = \cos y$, $\dot{y} = \sin x$

③ $\dot{x} = \alpha x - \beta x y$, $\dot{y} = (kx - d) y$

④ $\dot{x} = x(1 - x - y)$, $\dot{y} = 2y\left(1 - \frac{y}{2} - \frac{3x}{2}\right)$

<u>Answer</u>

تذكر أن نقاط الاتزان $\dot{x}=f(x,y)$ ، $\dot{y}=g(x,y)$

هي مجموعة النقاط (x,y) التي تجعل كلاً من $f(x,y)=0$

و $g(x,y)=0$

<u>Sol.(1)</u> This system has no equilibrium points because

$f(x,y)=x^2+y^2+1\neq 0$

<u>Sol.(2)</u> $f(x,y)=0 \longleftrightarrow \cos y=0 \longleftrightarrow y_n=\frac{2n+1}{2}\pi$

$n=0,\mp1,\mp2,\dots$

$g(x,y)=0 \longleftrightarrow \sin x=0 \longleftrightarrow x_m=m\pi \quad , m=0,\mp1,\mp2,\dots$

Therefore this system has infinite number of equilibrium points

نقاط الاتزان

$(x_m,y_n)=(m\pi\ ,\ \frac{2n+1}{2}\pi)$