تعريف ومفهوم دالة الانتاج:- Production Function

تعرف دالة الانتاج :- بأنها العلاقة الفنية بين عناصر الانتاج الداخلة في العملية الانتاجية وبين كمية الانتاج من سلعة معينة في فترة زمنية محددة اي هي عبارة عن علاقة بين مدخلات الانتاج (الارض و العمل ورأس المال والادارة او التنظيم) ومخرجات الانتاج من السلع المختلفة .

ولغرض التبسيط نفترض ان هناك عنصرين انتاج فقط احدهما ثابت هو(رأس المال) والاخر متغير هو (العمل) بهذا الوصف يمكن التعبير عن دالة الانتاج رياضياً كما يأتي :-

$$Q = F(L , K)$$

حيث ان Q كمية الانتاج و L يمثل عنصر العمل و K عنصر رأس المال .

ملاحظة :- عند قولنا علاقة فنية او عينية نقصد بها ان الاسعار هنا غير داخلة في هذه العلاقة اي فقط العلاقة بين مدخلات انتاج (عوامل الانتاج او مستلزمات الانتاج) ومخرجات الانتاج المتمثلة بالسلع.

ملاحظة اخرى :- قبل الدخول في تفاصيل دالة الانتاج يجب التعرف على بعض المفاهيم والتي لها علاقة وثيقة بدالة الانتاج وهي انواع عوامل الانتاج :-

1. **عوامل الانتاج الثابتة Fixed Factors:- وهي تلك العوامل التي تكون كميتها في الاجل القصير او الموسم الانتاجي ثابته , وعندما يتطلب السوق تغير الناتج او زيادتهِ مباشرةً فليس من السهولة تغير كمية هذه العوامل ومن امثلتها (المكائن والمباني والمعدات الثقيلة الاخرى والموظفين الاداريين الكفوءين والمُعينين بشكل دائم, والارض الصالحة للزراعة ..الخ).**
2. **عوامل الانتاج المتغيرة Variable Factors :- وهي تلك العوامل التي يمكن تغيير كميتها في الاجل القصير اذا تطلب السوق تغيير وزيادة الانتاج مباشرةً ومن امثلة هذه العوامل مثلاً (البذور , و الاسمدة , المبيدات , العمل المؤجر ..الخ) وجميع المواد الاولية الاخرى التي يمكن تغييرها مباشرة او بسهولة عندما يتطلب السوق زيادة الانتاج . وعلى هذا الاساس ينشأ لدينا مفهومين اخرين لدالة الانتاج اذ تمر المنشأة الانتاجية بمرحلتين انتاجيتين مُختلفتين هما كالاتي :-**

اولاً :- دالة الانتاج في الاجل القصير Short- run.

وهي الفترة الزمنية التي لا تكفي او لا تسمح لقيام المنشاة الانتاجية بتغير جميع عناصر الانتاج (الثابتة والمتغيرة) فيبقى على الاقل عنصر من عناصر الانتاج ثابتاً بينما يمكن لها تغير باقي عناصر الانتاج المتغيرة اذا تطلب السوق زيادة الانتاج . بمعنى اخر ان دالة الانتاج في الاجل القصير هي الفترة الزمنية التي تسمح بتغير عناصر او عوامل الانتاج المتغيرة فقط اذا تطلب السوق زيادة الانتاج.

ثانياً:- دالة الانتاج في الاجل الطويل: Long- run

وهي الفترة الزمنية التي تسمح بتغير الانتاج من خلال اجراء التغيرات في جميع عوامل الانتاج اي هي المرحلة التي تكون جميع عناصر الانتاج المُستخدمة قابلة للتغيير. فهي فترة طويلة نسبياً تستطيع المنشأة الانتاجية بتغيير جميع عناصر الانتاج لغرض زيادة الانتاج اذا تطلب السوق ذلك . فتغيير المكائن والآلات والمباني وزيادة مساحات اراضي جديدة بالإضافة الى زيادة الاداريين والعمل المؤجر والاسمدة والبذور .. الخ فكل هذه العوامل نستطيع تغييرها في الاجل الطويل لغرض زيادة الانتاج.

ملاحظة مهمة جداً :- لغرض ان يتعرف مدير المشروع او مدير المزرعة او ادارة المنشاة الانتاجية او اي مُستثمر لأي مشروع انتاجي اخر ,عليهِ ان يتعرف على سلوك دالة الانتاج او مراحل الانتاج المختلفة ولغرض فهم دالة الانتاج في المدى القصير يتطلب فهم منا الافتراضات الاتية :-

1. **تستخدم المنشاة عنصرين فقط من عناصر الانتاج , وهما عنصر العمل (L) وعنصر رأس المال (K) وما يعنيه رأس المال من (ارض , ومكائن , معدات , بنايات..الخ).**
2. **يعتبر عنصر العمل (L) العنصر الانتاجي المُتغير , بينما يعتبر رأس المال (K) العنصر الانتاجي الثابت .**
3. **نفترض ثبات المستوى التقني او التكنلوجي المُستخدم في عملية الانتاج.**

وعلى هذه الافتراضات يكون من الممكن زيادة حجم الانتاج فقط من خلال تغيير عنصر الانتاج المُتغير والذي هو هنا يمثل العمل (L) . باعتبار ان كل من رأس المال والمستوى التكنلوجي هما ثابتان .

1. اذا ارادت المنشاة او المشروع الزراعي زيادة الكمية المنتجة , فان ذلك يتطلب استخدام المزيد من عنصر الانتاج المتغير (العمل L) مقابل استخدام حجم معين من العنصر الانتاجي الثابت (رأس المال K).

وهكذا نتدرج الى مفاهيم وتعاريف اخرى وصيغ رياضية مرتبطة بدالة الانتاج وهي كالاتي :-

اولاً:- مفهوم وتعريف الناتج الكلي Total Product

يعرف بانهُ مجموع الكمية الكلية المُنتجة من السلعة خلال العملية الانتاجية . او بعارة اخرى هو عبارة الكمية الكلية من السلعة التي تقوم المنشاة الانتاجية او المشروع الاقتصادي بإنتاجها خلال فترة معينة من الزمن خلال العملية الانتاجية. قد تكون سنة او اقل ويرمز للإنتاج الكلي بالرمز(TP) اي الانتاج الكلي هو حجم الانتاج الكلي من السلع المُنتجة لأي منشاة انتاجية.

ثانياً:- مفهوم الناتج المتوسط Average Product.

يُعرف بأبسط صورة بانهُ هو عبارة الناتج الكلي TP مقسوم على الكمية المُستخدمة او عدد وحدات العنصر المتغير ويرمز لهُ اختصاراً (AP). ويمكن استخراجهِ وفق الصيغة الرياضية الاتية :-

$$\text{الناتج المتوسط AP} = \frac{\text{الناتج الكلي TP}}{\text{عدد وحدات العنصر المتغير}}$$

وهنا يرمز (لعدد وحدات العنصر المُتغير) قد يكون العمل ويرمز له بالرمز L او اي رمز اخر لاي عنصر متغير قد يكون X او اي رمز اخر وحسب ما يعطى بالسؤال .

وهنا يمكن تبسيط الصيغة اعلاه بالاتي : -

$$AP = TP / L$$

حيث ان AP متوسط الانتاج , و TP يمثل الانتاج الكلي, و L يمثل عنصر الانتاج المتغير العمل .

ثالثاً:- مفهوم الناتج الحدي Marginal Product.

يعرف الناتج الحدي بانه مقدار التغير في الناتج الكلي الناجم عن استخدام وحدة اضافية من عنصر الانتاج المتغير . كما يعرف بانه انتاج الوحدة الاخيرة المضافة من عنصر الانتاج المتغير . ويرمز له اختصاراً (MP) .

ويمكن استخراجه وفق الصيغة الرياضية الاتية :-

$$\text{الناتج الحدي } MP = \frac{\text{التغير في الناتج الكلي}}{\text{التغير في عدد وحدات عنصر الانتاج المتغيرة}}$$

وفي دالة الانتاج هذه عنصر الانتاج المتغير هنا هو العمل (L) لذلك يمكن تبسيط الصيغة اعلاه بالشكل الاتي :-

$$MP = \frac{\Delta TP}{\Delta L}$$

ولغرض التعرف على مراحل الانتاج واستخراج كل من الناتج الكلي والناتج المتوسط والناتج الحدي . والتعرف على قانون الغلة المتناقصة . نفترض الارقام الموضحة في الجدول (1) والذي يبين بان هناك عدد من العناصر الثابتة من رأس المال (K) مثلاً (ارض , مكائن) وهناك عنصراً انتاجياً متغيراً ممثلاً بعنصر العمل (L) وسوف نلاحظ من خلال استخدام الصيغ الرياضية السابقة كيف تكون مراحل انتاج المنشاة الانتاجية واستخراج كل من الناتج المتوسط والناتج الحدي .

العنصر الثابت رأس المال k 1	العنصر المتغير العمل L 2	الناتج الكلي Q = TP 3	الناتج المتوسط للعمل APL 4	الناتج الحدي للعمل MPL 5	حدود مراحل الانتاج
15	0	0	-	-	حدود المرحلة الاولى مرحلة تزايد الغلة
15	1	5	5	5	
15	2	12	6	7	
15	3	21	7	9	
15	4	32	8	11	
15	5	45	9	13	
15	6	54	9	9	
15	7	58	8.3	4	المرحلة الثانية مرحلة تناقص الغلة
15	8	58	7.25	0	
15	9	52	5.8	-6	المرحلة الثالثة مرحلة التناقص المطلق

ملاحظة:- يعطى في السؤال العمود (2) L العنصر المتغير العمل, وكذلك العمود (3) الناتج الكلي TP ويطلب استخراج العمود (4) او ايجاد متوسط الناتج APL للعمل , وكذلك ايجاد واستخراج الناتج الحدي MPL للعمل اي العمود (5) , مع رسم مراحل دالة الانتاج وفق المعلومات المعطاة في الجدول (1). بينما العمود رقم (1) يمثل عنصر الانتاج الثابت (رأس المال).

ملاحظة :-

1. **بالنسبة لإيجاد متوسط انتاج العمل نستخدم الصيغة الرياضية :- AP= TP/ L**
   لا يجاد عمود متوسط العمل.

مثال :- AP= 5/1= 5 وهكذا باقي ارقام العمود الخاص بالناتج المتوسط.

1. اما بالنسبة لا يجاد الناتج الحدي للعمل نستخدم الصيغة الرياضية :-

$$MP = \frac{\Delta TP}{\Delta L}$$

لا يجاد عمود الناتج الحدي للعمل.

مثال : - MP = 5 - 0 / 1-0 = 5

وهكذا باقي ارقام العمود الخاص بالناتج الحدي للعمل.

عند ملاحظة الجدول (1) نلاحظ ان العملية الانتاجية تمر بثلاث مراحل تسمى مراحل دالة الانتاج وسنوضح حدود ومميزات كل مرحلة من هذه المراحل وهي كالاتي :-

1. المرحلة الاولى :- مرحلة تزايد الغلة او الانتاج .

تبدأ هذه المرحلة من نقطة الاصل (الصفر) وحتى يصل الناتج المتوسط AP لعنصر الانتاج المتغير (العمل) الى نهايتهِ العظمى . (تنتهي عند العامل رقم 6) عندما يصل متوسط الانتاج الى 9 وحدات النهاية العظمى . اي تنتهي هذه المرحلة عند مستوى الانتاج الذي يتساوى فيه الناتج المتوسط مع الناتج الحدي وتتميز هذه المرحلة بما يأتي :-

أ - الناتج الكلي TP يتزايد بمعدل متزايد .

ب -الناتج الحدي MP يكون اكبر من الناتج المتوسط AP.

2- المرحلة الثانية :- مرحلة تناقص الغلة .

تبدأ هذه المرحلة من مستوى الانتاج المقابل للنهاية العظمى للناتج المتوسط AP وتستمر هذه المرحلة حتى يصل الناتج الكلي TP الى نهايتهِ العظمى. اي (عندما يكون الناتج الحدي للعمل MP متناقص حتى يصل الى الصفر) . اي تنتهي هذه المرحلة عند العامل رقم 8 , اذ يصل اعلى انتاج الى 58 وحدة اوطن . وتتميز هذه المرحلة بما يأتي:-

Æ ان الناتج الكلي TP فيها يتزايد بمعدل متناقص.

ÆÆان الناتج الحدي MP يكون اقل من الناتج المتوسط AP.

1. **المرحلة الثالثة :- مرحلة تناقص الغلة المطلق وفيها يبدأ الناتج الكلي TP في التناقص ويكون الناتج الحدي للعمل MP في هذه المرحلة سالباً. وتتميز هذه المرحلة بما يأتي :-**

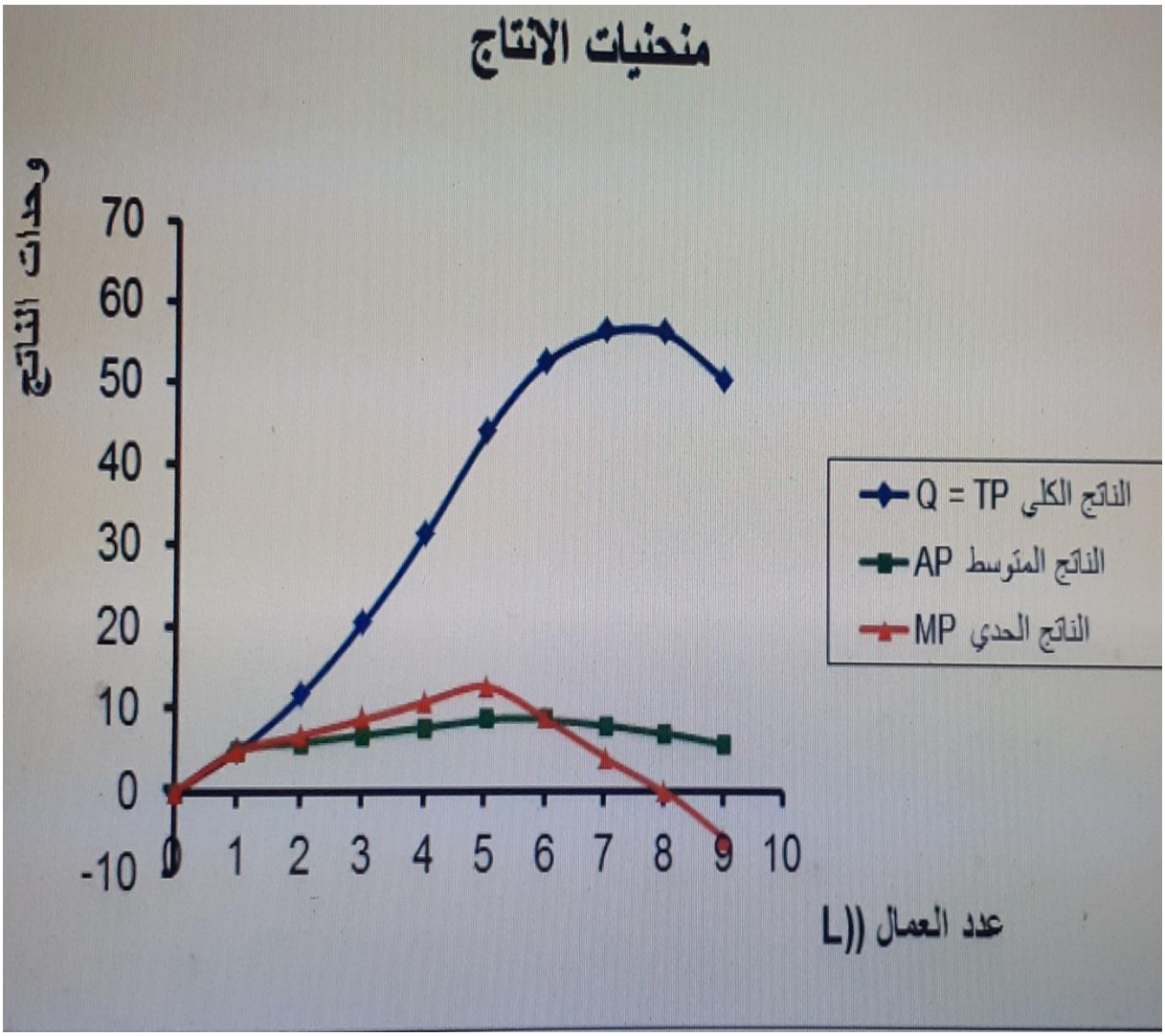
أ - ان الانتاج الكلي TP فيها يكون متناقصاً.

ب -ان الانتاج الحدي MP يكون فيها سالباً.

ويمكن توضيح هذه المراحل بشكل منحنيات توضح كل من الناتج الكلي TP ومتوسط انتاج العمل AP والناتج الحدي للعمل MP ومن ثم توضيح العلاقة بين هذه المنحنيات والتعرف على قانون تناقص الغلة من خلال هذه المنحنيات .

ملاحظة :- ولغرض رسم هذه المنحنيات يجب ان نتبع الاتي :-

1. **رسم كل من المحور العمودي والذي يمثل وحدات او كميات الانتاج الكلي TP والناتج المتوسط AP, والناتج الحدي MP.**
2. **رسم المحور الافقي والذي يمثل وحدات العنصر المُتغير وهنا هو عنصر العمل L .**
3. **نختار مقياساً موحداً للمحور العمودي وعادتاً يظم اعلى رقماً للإنتاج الكلي وهو , 58 وحدة. اذ يتم اختيار 10 وحدات الى ان نصل الى رقم 60 وحدة تظم اعلى انتاج. وكذلك بالسالب (10-).**
4. **وكذلك الحال بالنسبة للمحور الافقي نختار مقياساً يظم اعلى وحدة من وحدات العنصر المُتغير (العمل) وهنا هو اعلى وحدة هي 9 وحدات . اذا نختار مقياساً يبدأ من 1 وينتهي ب 10 وحدات وبهذا تظم اعلى رقم لوحدات العنصر المتغير.**


منحنيات الانتاج
وحدات الناتج
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
عدد العمال (L)
الناتج الكلي Q = TP
الناتج المتوسط AP
الناتج الحدي MP

شكل رقم (1) يوضح منحنى الناتج الكلي ومنحنى متوسط الانتاج ومنحنى الناتج الحدي

توضيح للشكل اعلاه :-

1. **المنحنى الكبير الازرق يمثل منحنى الانتاج الكلي Q او TP وهو علاقة ناتجة بين عنصر الانتاج المتغير (العمل L) ووحدات الانتاج الكلي على المحور العمودي.**
2. **المنحنى الثاني ذو اللون الاخضر منحنى متوسط الانتاج AP وهو علاقة ناتجة ايضاً بين وحدات العنصر المتغير العمل L وحدات الناتج المتوسط على المحور العمودي.**
3. **المنحنى الثالث الواضح باللون الاحمر يمثل الناتج الحدي وهو ايضاً علاقة بين وحدات العنصر المتغير العمل L ووحدات الناتج الحدي على المحور العمودي.**

1. **قانون الغلة المتناقصة باستخدام مفهوم الناتج الكلي:-**

ينص هذا القانون انهُ ((عند اضافة وحدات متتالية من عنصر الانتاج المُتغير الى عناصر الانتاج الثابتة فان الناتج الكلي يزداد اولاً بمعدل متزايد الى ان يصل الى نقطة معينة تسمى نقطة الانقلاب . وبعدها يستمر في التزايد ولكن بمعدل متناقص حتى يصل الى اعلى مستوى له وبعد ذلك يبدأ في التناقص المطلق)).

2- قانون الغلة المتناقصة حسب مفهوم الناتج الحدي :-

ينص قانون الغلة المتناقصة على انه ((عند استخدام وحدات متتالية من العنصر الانتاجي المُتغير مثلاً (العمل) مع بقاء الكمية المُستخدمة من العنصر الانتاجي الاخر (رأس المال) ثابتاً, فان الناتج الحدي سوف يزداد اولاً بزيادة وحدات العنصر المُتغير ثم يبدأ بالتناقص حتى يصل الى الصفر وعند الاستمرار في استخدام وحدات اضافية من عنصر الانتاج المُتغير فان الانتاج الحدي يصبح سالباً)).

ويمكن تفسير ومناقشة مراحل الانتاج المختلفة حسب مراحلها كما موضح في الجدول (1). اذ نجد عند استخدام عامل واحد فان الناتج الكلي بلغ 5 وحدات (مثلا 5 طن) وعند قسمة الناتج الكلي على العدد المُستخدم من العمال يكون معدل الانتاج 5 طن , ولكن عند استخدام عاملان فان الناتج الكلي يكون 12 طن وهكذا نجد معدل الانتاج عند هذا المستوى من الانتاج 6 طن اي ان الناتج الكلي قد تغير ب 7 طن وهو يساوي الناتج الحدي للعامل الثاني , وهذا الارتفاع في المعدل يعود الى ان العناصر الثابتة من رأس المال هي اكثر من ان يستخدمها عامل واحد بكفاءة , لذا عند استخدام عاملان ارتفع معدل الانتاج , وعند استخدام العامل الثالث نجد ان الانتاج الكلي ارتفع الى 21 طن , وان معدل الانتاج عند هذا المستوى من الانتاج كان 7 طن , وان الانتاج الكلي قد تغير بمقدار 9 طن وهو يساوي الناتج الحدي للعامل الثالث . وهكذا كلما يتم اضافة عنصر من عناصر الانتاج المتغيرة (العمل) نلاحظ هناك زيادة في الانتاج ومعدل الانتاج والناتج الحدي الى ان نصل الى العامل 6 فيكون الانتاج 54 طن والناتج المتوسط 9 طن والناتج الحدي ايضاً 9 طن.

وهكذا نجد ان هذه المرحلة تتميز بان الانتاج الكلي فيها يتزايد بمعدل متزايد وتسمى هذه المرحلة بمرحلة تزايد الغلة (الانتاج).

ولكن لو استخدم العامل السابع كما موضح بالجدول(1) نجد ان الناتج الكلي يرتفع الى 58 طن , ومعدل الانتاج انخفض الى 8,3 طن وذلك لان الناتج الحدي انخفض الى 4طن. وهكذا عند اضافة وحدات من عنصر الانتاج المتغير الى العناصر الثابتة يستمر الناتج الكلي بالزيادة ولكن هذه الزيادات تكون بشكل متناقص الى ان نصل الى العامل الثامن يكون الانتاج الكلي 58 طن والناتج الحدي للعامل المتغير يساوي صفر, وهكذا نجد

ان هذه المرحلة تتميز بأن :

الانتاج الكلي فيها يتزايد ولكن بمعدل متناقص ولهذا تسمى هذه المرحلة بمرحلة تناقص الغلة . ولكن عند استخدام العامل التاسع نجد ان الانتاج الكلي انخفض الى 52 طن , وذلك لان الناتج الحدي في هذه المرحلة كان سالباً (-6) ولذا تسمى هذه المرحلة بمرحلة التناقص المطلق للغلة .

ملاحظة مهمة جداً :- ان تفسير هذا الصعود والنزول في الغلة . هوان جميع عناصر الانتاج من الناحية الفنية يكون اكفأ او كفوءة اذا جمعت هذه العناصر بنسب مثلى , فالذي يحصل في بداية الامر هو انه عند استخدام وحدات عنصر الانتاج المتغير يكون هذا العامل لوحدهِ غير متناسب تناسباً تاماً مع عناصر الانتاج الثابتة (رأس المال) لان الاخير الذي هو رأس المال اكبر من طاقة عنصر الانتاج المتغير الاول, لذا نجد ان الناتج الحدي للعامل يزداد الى ان يصل الى النسبة المثلى لتحقيق الكفاءة وهو عند العامل 6 اذ يكون الناتج المتوسط والناتج الحدي متساويان 9 طن . ولهذا زيادة عنصر الانتاج المتغير(العمل) عن هذه النسبة ووفرتهِ وكثرتهِ عن رأس المال الثابت سيؤدي الى اختلال هذه العلاقة وتكون هناك بطالة في عنصر الانتاج المتغير بحيث يصبح العامل لا يضيف اي انتاجية حدية للناتج الكلي كما حدث عند العامل الثامن اذ كانت انتاجيتهُ مساوية للصفر. واذا تم الاستمرار في اضافة اعداد اخرى من عنصر الانتاج المتغير الى عنصر الانتاج الثابت (رأس المال) سوف تكون الانتاجية الحدية للعامل المضاف سالباً كما حصل ذلك عند العامل التاسع اذ كانت انتاجيتهُ الحدية سالبة -6 والناتج الكلي انخفض الى 52 طن مقارنة عما كان عليه في المرحلة الاولى . فيجب على مدير المشروع او المنشاة الانتاجية استخدام التوليفات المثلى لعناصر الانتاج , اي استخدام التوليفات الكفوءة عند مزج عناصر الانتاج فيما بينها للحصول على الانتاجية الكفوءة من السلع المنتجة.