CHAPTER FOUR

RELATIONS

العلاقات

نعرف من الهندسة التحليلية أن أي نقطة من مستوي منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين X'OX، Y'OY مثلاً، يكون لها احداثيان هما x و y ونعبر عن ذلك بالرمز $P(x, y)$. يسمى (x, y) زوجاً مرتباً، مركبته الاولى (اليسرى) هي x، ومركبته الثانية (اليمنى) هي y. ومن الواضح أن الزوج المرتب (y, x) لا يساوي الزوج المرتب (x, y) ما لم تكن $x = y$. ومن هنا تبرز اهمية الترتيب في الازواج المرتبة.

Definition 4.1: An ***ordered pair*** of elements x and y is denoted by (x, y) where x is called the first element and y is the second element.

Remark 4.2: Let x, y, z and w are four elements, then:

1) $(x, y) \neq (y, x)$ in general.
2) $(x, y) = (y, x)$ if and only if $x = y$.
3) $(x, y) = (z, w)$ if and only if $x = z$ and $y = w$.

Definition 4.3: Let A and B are two nonempty sets. Then ***the Cartesian product of A to B*** is denoted by $\mathbf{A \times B}$ and defined as follows;

$$A \times B = \{(x, y): (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$
$$(x, y) \in A \times B \text{ if and only if } (x \in A) \wedge (y \in B).$$
$$(x, y) \notin A \times B \text{ if and only if } (x \notin A) \vee (y \notin B).$$

يعرف **حاصل الضرب الديكارتي** للمجموعة A في المجموعة B بأنه المجموعة $A \times B$ حيث:

$$A \times B = \{(x, y): (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

Example 4.4: Let A={1, 2} and B={2, 3}, then find both $A \times B$ and $B \times A$.

Solution: $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

And $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

ملاحظة:

1. من الواضح أن $A \times B \neq B \times A$.
2. في الحالة التي تكون فيها المجموعتان A و B متساويتين يرمز لحاصل ضربهما إختصاراً بالرمز A^2 أو B^2.

Example 4.5: Let A= {x, y} and B= {1, 2, 3}. Find

A× B=

B× A=

A× A=

B× B=

Remark 4.6: If |A|= n and |B|= m, then |A× B|= n(m).

Example 4.7: Let A={x: x∈N ∧ $x^2 \leq 10$}, B={1, 2} and C={3}. Find

A× B=

B× A=

A× A=

B× B=

C× C=

(B∪ C)× A=

(B∩ C)× A=

(A- B)× B=

(A- B)× C=

Theorem 4.8: Let A, B, C and D be nonempty sets. Then:

1) $A\times \varnothing = \varnothing\times A = \varnothing$.
2) $A\times B= B\times A$ if and only if $A= B$.
3) $A\times (B\cap C)= (A\times B) \cap (A\times C)$.
4) $A\times (B\cup C)= (A\times B) \cup (A\times C)$.
5) $A\times (B- C)= (A\times B) - (A\times C)$.
6) $(A\times B) \cap (C\times D)= (A\cap C) \times (B\cap D)$.
7) If $C \subseteq A$ and $D \subseteq B$, then $C\times D \subseteq A\times B$.

Proof: 1) Suppose that $A\times \varnothing\neq \varnothing$. Then,

$\exists(x, y)\in A\times\varnothing \Rightarrow x\in A$ and $y\in \varnothing$ (def. of $A\times B$)

$\Rightarrow x\in A$ and F

$\Rightarrow$ F. ($p\wedge F= F$)

Therefore, $A\times \varnothing= \varnothing$.

In similar way, we can show that $\varnothing\times A= \varnothing$. **(H. W.)**

2). Suppose that $A\times B= B\times A$, to prove $A= B$.

$\forall x\in A$ and $\forall y\in B\Rightarrow (x, y)\in A\times B$ (def. of $A\times B$)

$\Rightarrow (x, y)\in B\times A$ ($A\times B= B\times A$)

$\Rightarrow x\in B$ and $y\in A$ (def. of $B\times A$)

$\Rightarrow A\subseteq B$ and $B\subseteq A$

$\Rightarrow A= B$.

Suppose that $A= B$, to prove $A\times B= B\times A$

$A \times B = \{(x, y): (x \in A) \wedge (y \in B)\}$ (def. of $A\times B$)

$= \{(x, y): (x \in B) \wedge (y \in A)\}$ (since $A= B$)

$= B \times A$.

3). $A\times(B\cap C) =\{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B\cap C)\}$ (def. of $A\times B$)

$=\{(x, y): (x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\in C)\}$ (def. of $A\cap B$)

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\in C)\}$

$=\{(x, y): ((x, y)\in A\times B) \wedge ((x, y)\in A\times C)\}$

$= (A\times B) \cap (A\times C).$

4) $A\times (B\cup C) =\{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B\cup C)\}$ (def. of $A\times B$)

$=\{(x, y): (x\in A)\wedge(y\in B \vee y\in C)\}$ (def. of $A\cup B$)

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)\}$

$=\{(x, y): ((x, y)\in A\times B) \vee ((x, y)\in A\times C)\}$

$= (A\times B) \cup (A\times C).$

5) $A\times (B- C)= \{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B-C)\}$ (def. of $A\times B$)

$=\{(x, y): (x\in A) \wedge (y\in B \wedge y\notin C)\}$ (def. of B-C)

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\notin C)\}$

$=\{(x, y): ((x, y)\in A\times B) \wedge ((x, y)\notin A\times C)\}$

$= (A\times B) - (A\times C).$

6) $(A\times B)\cap(C\times D)= \{(x, y): (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in C\times D\}$

$=\{(x, y): (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in C \wedge y\in D)\}$

$=\{(x, y): (x\in A \wedge x\in C) \wedge (y\in B \wedge y\in D)\}$

$=\{(x, y): (x\in A\cap C) \wedge (y\in B\cap D)\}$

$= (A\cap C) \times (B\cap D).$

7) Let $(x, y)\in C\times D \Rightarrow x\in C \wedge y\in D$ (def. of $C\times D$)

$\Rightarrow x\in A \wedge y\in B$ (since, $C\subseteq A$ and $D\subseteq B$)

$\Rightarrow (x, y)\in A \times B$

Hence, $C\times D \subseteq A \times B$.

Remark 4.9: $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A\cup C) \times (B\cup D)$.

For example **(H. W.)**;

Example 4.10: Prove that $(A\times B)\cap(B\times A) = \varnothing \Leftrightarrow A\cap B = \varnothing$.

Proof: Suppose that $(A\times B)\cap(B\times A) = \varnothing$, to prove $A\cap B = \varnothing$. If not, then $\exists x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B$ (def. of $A\cap B$)

$$\Rightarrow (x, x)\in (A\times B)\wedge (x, x)\in (B\times A)$$
$$\Rightarrow (x, x)\in (A\times B)\cap(B\times A)$$
$$\Rightarrow (A\times B)\cap(B\times A)\neq \varnothing.$$

That is a contradiction. Hence, $A\cap B = \varnothing$.

Now, suppose that $A\cap B = \varnothing$, to prove $(A\times B) \cap(B\times A) = \varnothing$. If not, then $\exists (x, y)\in(A\times B)\cap(B\times A) \Rightarrow (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in B\times A$

$$\Rightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in B \wedge y\in A)$$
$$\Rightarrow (x\in A \wedge x\in B) \wedge (y\in A \wedge y\in B)$$
$$\Rightarrow (x\in A \cap B) \wedge (y\in A \cap B)$$
$$\Rightarrow A \cap B\neq\varnothing.$$

That is a contradiction. Hence, $(A\times B)\cap(B\times A) = \varnothing$.

Definition 4.11: (***Generalization of the Cartesian product***)**:**

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be any sets. Then the Cartesian product of these sets is denoted by $\prod_{i=1}^{n} A_i$ and defined as follows;

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n.$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): (x_1\in A_1) \wedge (x_2\in A_2) \ldots \wedge (x_n\in A_n)\}.$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in A_i;\ 1 \le i \le n\}.$$

Example 4.12: Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers. Then

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(a_1,\ldots,a_n): a_i \in \mathbb{R};\ 1 \le i \le n\}.$$

وهذا يعني أن كل عنصر من $\mathbb{R}^n$ مكون من n مركبة من الاعداد الحقيقية وسترى مستقبلاً اهمية دراسة $\mathbb{R}^n$ (والتي تسمى فضاء ذا n بعداً) بعد أن تعّرف عليها عمليات تتصف بصفات معينة). وبصورة خاصة عندما $n = 2$ فإن عناصر المجموعة $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عبارة عن نقاط مستوي منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين. عناصر المجموعة $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ عبارة عن نقاط الفضاء الثلاثي منسوب الى ثلاثة محاور موجهة متقاطعة.

سؤال:

المجموعة $\mathbb{R}$ يمكن اعتبارها فضاء ذا بعد واحد فماذا تمثل عناصرها ؟

Exercises

1) If $A= \{x: x\in N \wedge x\leq 3\}= \{1, 2, 3\}$, $B= \{3, 4\}$ and $C= \{x: x\in N \wedge 15\leq x^2\leq 40\}= \{4, 5, 6\}$. Then find;

(i) $A \times B =$

(ii) $B \times A =$

(iii) $A \times C=$

(iv) $C \times A=$

(v) $B \times C=$

(vi) $C \times B=$

(vii) $(A \times B) \cap (B \times A)=$

(viii) $A \times (B \cup C)=$

(ix) $(A \times B) \cup (A \times C)=$

(x) $A \times (B \cap C)=$

(xi) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

(xii) $A \times B \times C=$

(xiii) $A \times C \times B=$

(xiv) $B \times A \times C=$

(xv) $|A \times B \times C|=$

(xvi) $|(A \times B \times C) \cap (A \times C \times B)|=$

(xvii) $|(A \times B \times C) \cup (A \times C \times B)| =$

(xviii) $(A \times B) \cup (A \times B \times C) =$

(xix) $(A \times B) \cap (A \times B \times C) =$

2) If $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ and $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers, prove that; $A \cap B = \varnothing$.
3) Write the members of a set A, where
$A = \{(x,y): (x, y \in \mathbb{Z}^+) \wedge [(1 \leq x \leq 3) \wedge (1 \leq y \leq 2)]\}$.

Binary Relations العلاقات الثنائية

Definition 4.13: Let A and B are two sets. Any subset R of A×B is called a ***binary relation from A to B***. in other words,

R is a relation from A to B $\Leftrightarrow$ R$\subseteq$ A×B.

(x, y)$\in$ R can be written as xRy or $x \sim y$.

(x, y)$\notin$ R can be written as $x \not R y$ or $x \nsim y$.

If A= B, then R is a relation on A.

إذا كانت A ، B مجموعتين مفروضتين وكانت $R \subseteq A \times B$ قيل إن R علاقة ثنائية من A الى B. وفي الحالة الخاصة التي تكون A = B يقال إن R علاقة ثنائية على A

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 4, 5\}$ فإن:

A×B ={(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5)}

ولو طلب منا إيجاد مجموعة جزئية R من المجموعة A × B بحيث تكون عناصر R مكونة من جميع الثنائيات (الازواج) المرتبة التي تكون مركبتا كل منها متساويتين أي:

$R = \{(x, y): (x, y) \in A \times B \wedge x = y\} \subseteq A \times B$

فإننا نجد أن:

$R = \{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq A \times B$

نقول في هذه الحالة إننا عرفنا علاقة ثنائية R (أو إختصاراً علاقة R إذا لم يكن ثمة إلتباس) من المجموعة A الى المجموعة B وهذه العلاقة هنا ما هي إلا علاقة التساوي المألوفة " = ".

إذا كان $(x, y) \in$ R فإننا نعبر عن ذلك بالشكل "x R y" ونعني بذلك أن المركبة x ترتبط بالمركبة y بواسطة العلاقة R. وعندما تكون $(x, y) \notin$ R فإننا نكتب " $x \not R y$ "

ووفقاً لما تقدم فإنه من الواضح أن $(1,1), (2,2) \in$ R وبالتالي فإن 1 R 1 وكذلك 2 R 2 بينما $(1,2) \notin$R وبالتالي فإن $1 \not R 2$ وحيث أن R هنا هي علاقة التساوي "=" فإنه يمكننا أن نكتب ما سبق كما يلي:

"=" = {(1,1),(2,2)}.

Example 4.14: Let A= {a, b, c}, B= {b, c, d} and R_1 = {(a,b), (a,c), (b,b), (c,c)}.

1) Is R_1 a binary relation from A to B?
2) Is R_1 a binary relation on A?
3) Is R_1 a binary relation on B?
4) If R$\subseteq$ A×B such that xRy $\Leftrightarrow$ x= y, then write the members of R.

ملاحظة: لاحظ فيما تقدم كنا قادرين على تحديد مجموعة جزئية من المجموعة A × B بواسطة تعريف علاقة R من A الى B. ولكن غالباً ما تعطى المجموعة الجزئية R بصرف النظر عن كوننا قادرين أو غير قادرين عل إيجاد معنى الرابط R (علاقة المساواة، علاقة أصغر،...، أو أية علاقة أخرى) بين المركبتين x و y. فمثلاً $R_1 \subset A \times B$ تعتبر علاقة ثنائية معرفة من A الى B بالرغم من أن معنى الرابط R_1 بين b ، b من جهة وبين a ، c من جهة أخرى ليست واضحة.

Definition 4.15: If R is a relation from A to B, then ***the inverse relation of R*** is denoted by R^{-1} and defined as;

$$R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$$

إذا كانت R علاقة ثنائية من A الى B فإن **العلاقة العكسية** للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كالاتي:

$R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$

من هذا التعريف يتبين أن R^{-1} هي علاقة ثنائية من B الى A لان $R^{-1} \subset B \times A$.

Note: $(R^{-1})^{-1} = R$.

Example 4.16: Let A={1, 2, 4}, B={2, 3, 5} and $R \subseteq A \times B$, such that R= {(1, 2), (1, 3), (2, 2)}. Find;

1) R^{-1}=
2) $\{x: (x \in A) \wedge (x\ R\ y)\}$=
3) $\{x: (x \in A) \wedge x \not R y\}$=

Definition 4.17: Domain of a relation **مجال العلاقة**

The domain of a relation $R \subseteq A \times B$ is the set of the first coordinates of each pair. In other words:

$$\text{dom } R = \{x \in A; \exists y \in B: (x, y) \in R\}$$
$$= \{x \in A; \exists y \in B: xRy\}$$

It is clear that dom $R \subseteq A$.

منطلق العلاقة هو مجموعة المساقط الاولى للعلاقه.

Definition 4.18: Range of a relation **مدى العلاقة**

The range of a relation $R \subseteq A \times B$ is the set of the second coordinates of each pair. In other words:

$$\text{range } R = \{y \in B; \exists x \in A: (x, y) \in R\}$$
$$= \{y \in B; \exists x \in A: xRy\}$$

It is clear that range $R \subseteq B$.

مجال العلاقة هو مجموعة المساقط الثانية للعلاقه.

Example 4.19: If A={1, 3, 5, 7}, B={1, 2, 4, 6} and R = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)}. Then;
dom R={1, 3, 5} and range R={2, 4, 6}.

ملاحظات:

(1) سمينا R حيث $R \subset A \times B$ علاقة ثنائية من A الى B لان R تربط بين عنصرين الاول في A والثاني في B.

(2) بإستطاعتنا أن نعرف علاقة أحادية على مجموعة ما S. فمثلاً لو كانت $S = \mathbb{Z}^+$ فإنه يمكن أن نعرف علاقة أحادية على $\mathbb{Z}^+$ حيث نقول مثلاً إن R_1 تعني أن العنصر $x \in \mathbb{Z}^+$ هو عدد فردي وبذلك يكون لدينا:

$R_1 = \{1, 3, 5, \ldots\} \subset \mathbb{Z}^+$
$R_1^c = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{Z}^+$

لاحظ أن $R_1 \cup R_1^c = \mathbb{Z}^+$ وأن $R_1 \cap R_1^c = \varnothing$ وهذا يعني أن R_1 جزأت $\mathbb{Z}^+$ الى مجموعتين منفصلتين.

(3) بالفكرة نفسها التي وردت في (1) و (2) يمكن أن نقول إن R_n مثلاً هي علاقة نونية على النونيات المرتبة للمجموعة $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

(4) إن العلاقة الثنائية R من A الى B تجزىء المجموعة $A \times B$ الى مجموعتين منفصلتين هما R ومتممتها R^c بالنسبة للمجموعة $A \times B$.

مثال:

لتكن $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث $R = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$، $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية.

(أ) ماذا تمثل مجموعة النقاط في المستوي $\mathbb{R}^2$ التي تنتمي الى R؟

(ب) بيّن أي العناصر ينتمي الى R مما يلي:

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); (-1,0); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); (1,0); (1,1); (0,1).$$

الحل: **(أ)** إن R تمثل نقاط المستوي الواقعة على محيط الدائرة التي مركزها (0,0) ونصف قطرها الوحدة.

(ب) كل العناصر تنتمي الى R ما عدا النقطتين $(1,1)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ لان كلاً منهما لا تحقق معادلة الدائرة $(x^2 + y^2 = 1)$.

Properties of Binary Relation on a Set

خواص العلاقة الثنائية على مجموعة

إن دراسة العلاقة الثنائية R على (أو في) مجموعة A لها أهمية كبيرة لكثرة تطبيقاتها في الرياضيات خاصة وفي بعض العلوم الاخرى عامة.

Definition 4.20: A relation R on a set A is called ***reflexive*** if the pair $(x, x) \in R$ for each $x \in A$.

$$R \text{ is reflexive relation on } A \Leftrightarrow (x, x) \in R, \forall\, x \in A.$$
$$\Leftrightarrow x \sim x, \forall\, x \in A.$$
$$R \text{ is not reflexive relation on } A \Leftrightarrow \exists\, x \in A, (x, x) \notin R.$$
$$\Leftrightarrow \exists\, x \in A, x \nsim x.$$

إذا كانت R علاقة ثنائية على المجموعة A (أو إختصاراً: R علاقة على A) وكانت xRx محققة لجميع عناصر A (أي: $\forall\, x \in A: x\, R\, x$) قلنا إن R **علاقة انعكاسية** (Reflexive Relation).

Definition 4.21: A relation R on a set A is called ***symmetric*** if the pair $(y, x) \in R$ whenever the pair $(x, y) \in R$.

In other words, the relation R on a set A is ***symmetric*** if the following condition satisfied:

$$\text{If } (x, y) \in R, \text{ then } (y, x) \in R \quad \forall x, y \in A.$$

And the relation R on a set A is ***not symmetric*** if

$$\exists (x, y) \in A \times A;\ (x, y) \in R \text{ but } (y, x) \notin R.$$

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

قلنا إن R **علاقة تناظرية** (**أو متماثلة أو متناظرة**) (Symmetric Relation).

Definition 4. 22: A relation R on a set A is called ***transitive*** if the pair $(x, z) \in R$ whenever the pairs $(x, y), (y, z) \in R$.

In other words, the relation R on a set A is ***transitive*** if the following condition satisfied:

$$\text{If } (x, y), (y, z) \in R, \text{ then } (x, z) \in R \quad \forall x, y, z \in A.$$

And the relation R on a set A is ***not transitive*** if

$$\exists (x, y), (y, z) \in A \times A;\ (x, y), (y, z) \in R \text{ but } (x, z) \notin R.$$

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط

$$(x,y), (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

قلنا إن R **علاقة متعدية** (**ناقلة**) (Transitive Relation).

Definition 4. 23: A relation R on a set A is called ***Equivalence relation*** if it is reflexive, symmetric and transitive.

إذا كانت R علاقة على A وكانت R علاقة انعكاسية و تناظرية ومتعدية قلنا إن R **علاقة تكافؤ** على A (Equivalence Relation).

ملاحظات:

(1) لاحظ في التعاريف السابقة أن بإمكاننا الاستعاضة عن $(x, y) \in R$ بالتعبير $x \, R \, x$ أي أن

$$x \, R \, y \Leftrightarrow (x,y) \in R$$

(2) تكون R علاقة غير انعكاسية إذا وجد عنصر x في A بحيث:

$$x \not R \, y \Leftrightarrow (x, x) \notin R$$

(3) تكون R علاقة غير تناظرية إذا وجد عنصر $(x, y) \in R$ بحيث:

$$\exists x \, R y \Leftrightarrow y \not R x$$

(4) تكون R علاقة غير متعدية إذا وجد عنصران $(x,y), (y,z) \in R$ بحيث $(x,z) \notin R$ وهذا يكافىء

$$\exists (x \, R y \wedge y \, R z) : x \not R z$$

(5) لا تكون R علاقة تكافؤ إذا لم يتحقق واحد على الاقل من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف (4. 23) (أي الشرط اللازم والمكافىء لتكون R علاقة تكافؤ على المجموعة A هو أن تحقق R الشروط الثلاثة معاً وهي الانعكاسية والتناظرية والتعدي).

Example 4. 24: Let A= {1, 2, 3, 4} and R⊂ A×A such that
R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)}. Then is R;
(i) Reflexive?
(ii) Symmetric?
(iii) Transitive?
(iv) Equivalence?

مثال:

ناقش العلاقات الاتية من حيث كونها انعكاسية أو تناظرية أو متعدية ومن ثم بيّن أياً منها علاقة تكافؤ:

(أ) علاقة التعامد "$\perp$" على مجموعة مستقيمات المستوي $\mathbb{R}^2$.

(ب) علاقة أصغر من "<" على مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}$.

(حـ) علاقة قاسم لـ "|" على مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}^*$.

الحل:

(أ) إن علاقة التعامد على مجموعة مستقيمات المستوي ليست علاقة انعكاسية لان المستقيم لا يتعامد مع نفسه. ولكنها تناظرية لانه إذا كان $D, D' \in \mathbb{R}^2$ وكان $D \perp D'$ فإن $D' \perp D$. في حين انها لست متعدية لانه إذا كان $D, D', D'' \in \mathbb{R}^2$ وكان

$$D \perp D' \wedge D' \perp D'' \not\Rightarrow D \perp D''$$

نستنتج مما تقدم أن علاقة التعامد ليست علاقة تكافؤ.

(ب) إن علاقة أصغر من "<" على المجموعة $\mathbb{Z}$ ليست انعكاسية لانه $\forall x \in \mathbb{Z} : x \not< x$. كما إنها ليست تناظرية فواضح أنه إذا كانت $x, y \in \mathbb{Z}$ وكانت $x < y$ فإن $y \not< x$. ولكنها متعدية لانه إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{Z}$ وكان $x < y \wedge y < z$ فإن $x < z$. نستنتج مما تقدم أن العلاقة "<" ليست علاقة تكافؤ.

(حـ) إن علاقة قاسم لـ "|" على $\mathbb{Z}^*$ انعكاسية لان أي عدد في $\mathbb{Z}^*$ قاسم لنفسه. ولكنها ليست تناظرية فمثلاً $2|6$ في حين $6\nmid 2$ وهي علاقة متعدية لانه إذا كانت $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ وكانت $x \mid y$ و $y \mid z$ فإن $x \mid z$. نستنتج مما تقدم ان العلاقة "|" ليست علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}^*$.

سؤال:

هل أن علاقة التوازي "||" على مجموعة مستقيمات المستوي علاقة تكافؤ؟ أثبت ذلك.

سؤال:

هل أن علاقة تشابه المثلثات في المستوي $\mathbb{R}^2$ علاقة تكافؤ؟

Definition 4. 25: A relation R on a set A is called ***Anti-symmetric*** if x= y whenever the pair (x, y)∈ R and (y, x)∈R.

In other words, the relation R on a set A is ***anti-symmetric*** if the following condition satisfies:

$$\forall x, y \in A;\ \text{if } (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y.$$

And the relation R on a set A is ***not anti-symmetric*** if

$$\exists x, y \in A;\ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \text{ but } x \neq y.$$

نقول عن علاقة R معرفة على مجموعة A إنها **علاقة تخالفية** (Anti-Symmetric) إذا حققت الشرط الاتي

$$(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$$

Definition 4.26: Let x and y are integers with $x \neq 0$. Then "x divides يقسم y" is denoted by $x \mid y$ and defined as:

$$x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ such that } y = kx$$

من أمثلة العلاقات التخالفية علاقة قاسم "|" على مجموعة الاعداد $\mathbb{Z}^*$ فواضح انه إذا كان $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}^*: y \mid x \wedge x \mid y$ فإن $x = y$.

Definition 4. 27: A relation R on a set A is called ***partially ordered relation*** **(P.O.R.)** or ***partially ordering*** if it is reflexive, anti-symmetric and transitive. The pair (A, R) is called partially ordered set.

R is P.O.R. ⇔ R is reflexive ∧ anti-symmetric ∧ transitive.

R is not P.O.R. ⇔ R is not reflexive ∨ not anti-symmetric ∨ not transitive.

نقول إن R **علاقة ترتيب جزئي** على مجموعة A إذا كانت R علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية.

Definition 4. 28: A relation R on a set A is called ***totally ordered relation*** **(T.O.R.)** or ***totally ordering*** if it is satisfied the following conditions:

(i) R is P.O.R.

(ii) $\forall\, x, y \in \mathrm{A}: x\ \mathrm{R}\ y \vee y\ \mathrm{R}\ x.$

نقول إن R **علاقة ترتيب كلي** على A إذا كانت علاقة ترتيب جزئي وتحقق الشرط الآتي:

$$\forall\, x, y \in \mathrm{A}: x\ \mathrm{R}\ y \vee y\ \mathrm{R}\ x$$

إن هذا التعريف يعني أن كل علاقة ترتيب كلي هي علاقة ترتيب جزئي ولكن قد لا يكون العكس صحيحاً.

إن العلاقة "$\subseteq$" على مجموعة القوة P(A) هي علاقة ترتيب جزئي على . في حين ان العلاقة "$\leq$" على مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي علاقة ترنيب كلي على $\mathbb{R}$.

Exercises

(1) If A={1, 2, 3, 4, 5} and B={3, 5, 7, 8}, then answer the following statements:

(i) Find A× B=

And B× A=

(ii) If R= {(1, 3), (1, 5), (2, 7), (2, 8)}. Then, is R binary relation from A to B?
Why?
If your answer "yes", then find dom R=
And range R=

(iii) Find R^{-1}=
Is R^{-1} binary relation from B to A?
Why?
If your answer "yes", then find dom R^{-1}=
And range R^{-1}=

(iv) If R = {(2, 5), (3, 4), (4, 5)}, then answer the following:

Is R binary relation from A to B?

Why?

Is R binary relation from B to A?

Why?

Is R binary relation on A?

Why?

Is R binary relation on B?

Why?

(v) Is R= A× B binary relation from A to B?

Find dom R=

Range R=

R^{-1}=

Is R^{-1}= B× A?

(vi) If R⊆ A× B, then R and R^{-1} in each of follows:

a) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y - 2$

R=

R^{-1}=

b) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y$

R=

R^{-1}=

c) $x \, R \, y \Leftrightarrow x > y - 2$

R=

R^{-1}=

d) $x \, R \, y \Leftrightarrow x = y + 3$

R=

R^{-1}=

(2) If A= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, then any of the following relations on A is reflexive? Symmetric? Transitive? Equivalence? Anti-symmetric?

(i) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(ii) $R_2 = R_1 - \{(5, 5)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(iii) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(iv) $R_4 = R_3 \cup \{(2, 2)\}$
Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(v) $R_5 = \{(2, 6)\}$
Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(vi) $R_6 = \{(1, 5),(5, 1)\}$
Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(vii) $R_7 = \{(3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(viii) $R_8 = A \times A =$

Reflexive?

Symmetric?

Transitive?

Equivalence?

Anti-symmetric?

(3) Let $\mathbb{Z}^+$ be the set of positive integer numbers, and R be a relation on $\mathbb{Z}^+$ defined as follows:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z}^+ : x\ R\ y \Leftrightarrow x + 2y = 12$$

Find R=

Dom R=

Range R=

R^{-1}=

(4) If $\mathbb{Z}$ be the set of integer numbers, then any of the following relations on $\mathbb{Z}$ is reflexive? Symmetric? Transitive? Equivalence? Anti-symmetric? P.O.R.? T.O.R.?

(i) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z} : x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow x \mid y$

x يقسم y ، او y يقبل القسمة على x

(ii) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z} : x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow x < y$

(iii) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z} : x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow x > y$

(iv) $\forall$ x, y $\in \mathbb{Z} : x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow x \leq y$