CHAPTER TWO

SET THEORY

نظرية المجموعات

إن "المجموعة" هي كلمة مألوفة لدينا نستخدمها دائماً في حياتنا اليومية، ولكن يستحيل تعريفها تعريفاً دقيقاً. وربما يكون أحسن ما نقول عنها إنها مفهوم رياضياتي (Mathematical Concept) شأنها شأن النقطة، والمستقيم والمستوي،....أول من استخدم نظرية المجموعات هو العالم الألماني جورج كانتور (1845 – 1918 م).

وللمجموعات لغة و رموز خاصة بها وتعد في حقيقة الامر أساساً ومنطلقاً لكثير من فروع الرياضيات المختلفة، فهي وسيلة ناجحة جداً لتوحيد لغة الرياضيات واعتبارها وحدة متماسكة. وتتكون المجموعة من أشياء متمايزة، ويجب أن تتحدد المجموعة تحديداً دقيقاً لا يقبل اللبس، نعني بذلك أننا إذا اعطينا شيئاً ما فإننا نستطيع الحكم ما إذا كان هذا الشيء ينتمي الى المجموعة المفروضة أم لا.

<u>Definition 2.1:</u>

A ***set*** is an unordered collection of objects. The objects are called ***the elements*** or ***members*** of the set.

المجموعة هي تجمع من الاشياء المعروفة بدون ترتيب والتي تسمى بالعناصر او اعضاء تنتمي للمجموعة.

<u>NOTE:</u>

1. The capital letters usually used to represents sets such as A, B, C, …, etc.
2. The small letters such as a, b, c, …, etc are used to represents the members or the elements of the set.
3. Membership in a set is denoted as follows: $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ denotes that a belong to a set A.
4. Non-membership to a set is denoted as follows: $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ denotes that a does not belong to a set A.

<u>Specifying a Set</u>: طرق التعبير عن المجموعة

<u>1. Listing members of a set:</u> **الطريقة الجدولية**

In this way, we list all non-repeated members of a set separated by commas and contained in braces { }. The members are not in an order.

طريقة الحصر

وهذه الطريقة عبارة عن كتابة عناصر المجموعة بين قوسين من النوع {}، على أن توضع فواصل (فوارز) بين العناصر، ولا أهمية لترتيب العناصر هذه.

Example 2.2:

1. A= {1, 2, -5, 9}, B= {x, y, Ali, fish}, C= {y_1, y_2, y_3} are sets.
2. The set of vowel letters in English: V= {a, e, i, o, u}.
3. The set of even positive numbers less than 5 is: W= {0, 2, 4}.
4. The set of positive numbers less than 50 is: K= {1, 2, …, 49}.

2. Listing a set property: استخدام الصفة المميزة للمجموعة

In this way, we state the property that characterize the elements in a set in as follows: {x: p(x)}, where x is a variable and p(x) is an open sentence.

وهذه الطريقة كثيراً ما تستخدم بواسطة تحقيق هذا العنصر للصفة (أو الصفات) المميزة التي يجب أن يتمتع بها عنصر في هذه المجموعة وعندها نكتب المجموعة على الصورة الاتية:

$S = \{x{:}P(x)\}$ أو $S = \{x \mid P(x)\}$

حيث x (متغير) عنصر إختياري من عناصر المجموعة S و $P(x)$ تعني عبارة أو جملة مفتوحة تحقق خاصية أو خواص معينة (وهذا ما نعني به الصفة أو الصفات المميزة للعنصر x).

Example 2.3:

A={x: $x \in Q$}.

B={x: x *is positive odd and* x <10}={1, 3, 5, 7, 9}.

C={$x \in N$: $1 \le x \le 5$}={1, 2, 3, 4, 5}.

Definition 2.4: Empty Set المجموعة الخالية

The set that contains no elements is called an empty set and is denoted by { } or ∅.

Example 2.5:

1. A={$x \in N$: 2< x< 3}=∅
2. B={$x \in E$: x^2=1} = ∅
3. C= {$x \in N$: x< 0}={ }

If S be any set then, we will denote to it's number of elements by $|S|$.

إذا كانت S مجموعة ما فسنرمز لعدد عناصرها بالرمز $|S|$.

Definition 2.6: If $|S| < \infty$ then, we said that S is finite set, otherwise S is called Infinite Set.

Example 2.7:

1. A={a, b, c,..., z} is finite set.
2. N={1, 2, 3, ….} is an infinite set.

<u>Quantifiers</u> **المسورات**

Quantifiers are open sentences written in a special way.

There are two types of quantifiers:

1. **Universal quantifiers** العبارة المسورة كلياً
2. **Existential quantifiers** العبارة المسورة جزئياً

1. Universal quantifiers:

Let $p(x)$ be an open sentence on a set A. The notation ‘‘$\forall x\in A: p(x)$’’ denote the **universal quantification "تسوير كلي"** of $p(x)$ and it reads as: ‘‘for all $x\in A: p(x)$’’ or ‘‘for every $x\in A: p(x)$’’ or ‘‘for each $x\in A: p(x)$’’. The symbol $\forall$ is called **universal quantifie** "مسورا" كليا". The set A is called **domain** المجال.

<u>Example 2.8:</u>

Let N be the set of all natural numbers, $p(x)$: $x+2>1$ such that $x\in$ N. This statement is truth for each $x\in$ N, and written as:

$\forall\, x\in \mathrm{N} : x+2>1.$

لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية ولتكن العبارة $P(x)$ هي $x+2>1$ حيث $x\in \mathrm{N}$. إن هذه العبارة صائبة دوماً مهما كانت x في N ونعبر عن ذلك بالصورة $\forall\, x\in \mathrm{N} : x+2>1$.

<u>Example 2.9</u>:

Find the truth value of the following open sentence:

$\forall\, x\in R$: $x+1>x$.

Let $A=R$. Since the statement $p(x)$: $x+1>x$ is true for all $x\in R$, the quantification $\forall\, x\in R$; $x+1>x$ is **true.**

2. Existential quantifiers:

Let $p(x)$ be an open sentence on a set A. The notation ‘‘$\exists\, x\in A, p(x)$’’ denote the **existential quantification"تسويرجزئي "** of $p(x)$ and it read as: ‘‘there exists x; $p(x)$’’ or ‘‘there is x; $p(x)$’’ or ‘‘some x; $p(x)$’’. The symbol $\exists$ is called **existential quantifier** "مسورا" جزئيا". The set A is called **domain** المجال.

<u>Example 2.10:</u> There exists seasons in Iraq do not have rain.

Example 2.11: Let N be the set of all natural numbers, $p(x)$: $x+4 < 6$,then there exists $x \in$ N such that the statement $p(x)$ is truth , and written as :$\exists\, x \in$ N : $x + 4 < 6$.

Remark 2.12:

1. The existential quantifier $p(x)$ on a domain A is **true** if and only if there exists one element at least satisfy the statement $p(x)$.

العبارة المسورة جزئياً تكون صحيحة اذا وجد عنصر واحد على الاقل يحقق العبارة.

2. The existential quantifier $p(x)$ on a domain A is **false** if and only if there is no element satisfy the statement $p(x)$.

العبارة المسورة جزئياً تكون خاطئة اذا لم يكن هناك عنصر يحقق العبارة.

De Morgan's law for the existential quantifier:

قانون دي موركان للعلاقة بين التسوير الجزئي والكلي

$\sim [\exists\, x \in A; p(x)] = \forall x \in A; \sim p(x)$.

Example 2.13: Let E be the set of all even numbers, and R be the set of all real numbers.

1. $\sim[\exists x \in E;\ x+2 \notin E] = \forall x \in E;\ x+2 \in E$.
2. $\sim[\forall x \in \mathrm{R}:\ x+1 > x] \equiv \exists\, x \in \mathrm{R}:\ \sim (x+1 > x) \equiv \exists\, x \in \mathrm{R}:\ x + 1 \leq x$.

ملاحظات:

(1) نفي العبارة $\forall\, x \in \mathrm{S} : \mathrm{P}(x)$.

إذا كانت العبارة "$\forall\, x \in \mathrm{S} : \mathrm{P}(x)$" خاطئة، فإننا نعبر عن ذلك بالصورة $\sim[\forall x \in \mathrm{S}:\mathrm{P}(x)]$، وهذا يعني أنه يوجد على الاقل $x \in \mathrm{S}$ بحيث أن $\mathrm{P}(x)$ عبارة خاطئة وهذا التعبير يمكن أن نترجمه رمزياً بالشكل $\exists\, x \in \mathrm{S} : \sim \mathrm{P}(x)$ أي أن:

$\sim[\forall\, x \in \mathrm{S} : \mathrm{P}(x)] \equiv \exists\, x \in \mathrm{S} : \sim \mathrm{P}(x)$.

(2) نفي العبارة $\exists\, x \in \mathrm{S} : \mathrm{P}(x)$.

إذا كانت العبارة "$\exists\, x \in \mathrm{S} : \mathrm{P}(x)$" خاطئة، فإننا نعبر عن ذلك بالصورة $\sim[\exists x \in \mathrm{S}:\mathrm{P}(x)]$، وهذا يعني أنه لا يوجد على الاطلاق $x \in \mathrm{S}$ بحيث أن $\mathrm{P}(x)$ عبارة صائبة. وبمعنى آخر فإنه مهما يكن $x \in \mathrm{S}$ فإن $\mathrm{P}(x)$ عبارة خاطئة، وهذا التعبير يمكن أن نترجمه رمزياً بالشكل $\forall\, x \in \mathrm{S} : \sim \mathrm{P}(x)$ أي أن:

$\sim[\exists\, x \in \mathrm{S} : \mathrm{P}(x)] \equiv \forall\, x \in \mathrm{S} : \sim \mathrm{P}(x)$.

Subsets المجموعات الجزئية

Definition 2.14: The set A is a subset of a set B (simply, $A\subseteq B$) if and only if every element of A is an element of B. In other words, ($A\subseteq B$ iff $\forall x; x\in A \Rightarrow x\in B$).

If A is *not a subset* of B then it is denoted by $A\nsubseteq B$, ($A\nsubseteq B$ if and only if $\sim[\forall x; x\in A \Rightarrow x\in B]$ if and only if $\exists x; x\in A \wedge x \notin B$).

A set A is said to be proper subset of B (simply, $A\subset B$) whenever $A\subseteq B$ and $A\nsubseteq B$.

Example 2.15: Consider the sets A= {2}, B= {1, 2, 3} and C = {4, 5} and D= {-2, 1, 2, 3, 4, 5}. Then $A\subseteq B$, $A\subseteq D$, $B\subseteq D$ *and* $C\subseteq D$. It is true that $A\subseteq A$, $B\subseteq B$, $C\subseteq C$ and $D\subseteq D$.

Example 2.16: Let A= {4, 9} and $B=\{x\in N: 1<x<10\}$. Determine whether $A\subseteq B$ or $B\subseteq A$.

Solution: The set B be can be written as B={2,…,9}. Then $\forall x, x\in A \Rightarrow x\in B$. Hence, $A\subseteq B$. But $B\nsubseteq A$ because, for example, $\exists x=5\in B \wedge 5 \notin A$.

Example 2.17: Let $A= \{x\in N: x>3\}$ and $B=\{x\in N: x^2>4\}$. Is $A\subseteq B$? Is $B\subseteq A$?

Solution: Let $x\in A\Rightarrow x\in N$ *and* $x>3\Rightarrow x^2>9$

$\Rightarrow x^2>4 \Rightarrow x\in B$.

Therefore, $A\subseteq B$.

But $B\nsubseteq A$, since $\exists\ x= 3\in B \wedge 3\notin A$.

Theorem 2.18: Let A, B and C are any sets, then

1. $\emptyset\subseteq A$.
2. $A\subseteq A$.
3. If $A\subseteq B$ and $B\subseteq C$ then $A\subseteq C$.

Proof 1: To prove $\emptyset\subseteq A$, we must prove that the statement $\forall x\in\emptyset \Rightarrow x\in A$ is truth. Since, F $\Rightarrow$(T $\vee$ F) = T, then $\emptyset\subseteq A$.

2: To prove $A\subseteq A$, we must prove that the statement $\forall x\in A\Rightarrow x\in A$ is truth. Since, T $\Rightarrow$T=T, then $A\subseteq A$.

3: To prove, if $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$ then $A \subseteq C$, we must prove that $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$.
Since $x \in A$ and $A \subseteq B \Rightarrow x \in B$.
So, $B \subseteq C$ and $x \in B \Rightarrow x \in C$.
Hence, $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$
Therefore, $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$ and $A \subseteq C$.

Definition 2.19: Proper Subset المجموعة الجزئية الفعلية

A set A is called a ***proper subset*** of B and denoted by ($A \subset B$) if and only if $A \subseteq B$ and there exist an element $x \in B$ such that is $x \notin A$.

i.e., $A \subset B$ iff $\{\forall x \in A \Rightarrow x \in B\} \wedge \{\exists y: y \in B \wedge y \notin A\}$.

Example 2.20: Let $A=\{x \in N: x^2-16 \leq 0\}$ and $B=\{x \in N: x^2-16=0\}$. Determine if $A \subset B$ or $B \subset A$.

Solution: $A=\{1, 2, 3, 4\}$ and $B=\{4\}$. It is clear that $B \subset A$, since $B \subseteq A$ and $\exists y=1 \in A \wedge 1 \notin B$.

Example 2.21: (H. W.)**:** Let A={fish, dog, bird}, $B=\{x,y,z,w\}$. Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

Example 2.22: (H. W.): Let $A=\{x \in Z: -2 \leq x \leq 10\}$
and $B=\{x \in Z: x^2+9=0\}$
Determine if $A \subset B$ *or* $B \subset A$.

Definition 2.23: Equal Sets المجموعات المتساوية

Two sets A and B are equal if they both have the same elements or, equivalently, if each is contained in the other.

i.e. $A=B \ iff\ A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\leftrightarrow \{\forall x: x \in A \rightarrow x \in B\} \wedge \{\forall x: x \in B \rightarrow x \in A\}$

$\leftrightarrow \{\forall x: x \in A \leftrightarrow x \in B\}$.

يقال للمجموعة A انها تساوي المجموعة B اذا كان لكل منهما نفس العناصر.

Example 2.24: Let A be the set which elements is the numbers of 6125, and B be the set which elements is the numbers of 1652, then A = {6, 1, 2, 5} and B = {1, 6, 5, 2}. It is clear that A $\subseteq$ B and B $\subseteq$ A, so A = B.

Corollary 2.25: The empty set $\emptyset$ is unique.

المجموعة الخالية $\emptyset$ وحيدة.

Proof: Let $\emptyset_1$ be an empty set such that $\emptyset \neq \emptyset_1$,
1. $\emptyset \subseteq \emptyset_1$ "by Theorem 2.18".
2. $\emptyset_1 \subseteq \emptyset$ "by Theorem 2.18".

So, "by Definition 2.27", we get $\emptyset = \emptyset_1$.

Exercises

1. If A = {0, 1, 2, 3, 4} then, find $|S|$ in the flowing:

a) $S = \{x: (x \in A) \wedge (2x - 4 = 0)\}$.
b) $S = \{x: (x \in A) \wedge (2x > 4)\}$.
c) $S = \{x: (x \in A) \wedge (x + 1 > 0)\}$.
d) $S = \{x: (x \in A) \wedge (x^2 = 0)\}$.
e) $S = \{x: (x \in A) \wedge (x^2 - x = 0)\}$.
f) $S = \{x: (x \in A) \wedge (2x + 1 \leq 0)\}$.

2. Write the following sets by using Listing a set property:
a) S = {4, 5, 6, 7, 8, 9}.
b) S = {1, 4, 9, 16, 25}.
c) S = {3, 6, 9, 12, …}.

3. Let $p(x)$: $\forall x \in \mathbb{N}: x + 5 \geq 11$, then find S_1 and S_2 such that S_1 make $p(x)$ be true for every elements in it and S_2 make $p(x)$ be false for every elements in it, where $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers. So, find $|S_1|$ and $|S_2|$.

Definition 2.26: Power Set مجموعة القوى أو مجموعة الاجزاء

Given a set X, the **power set of X** is the set of all subsets of X. The power set of X is denoted by $P(X)$.

$P(X)=\{A: A\subseteq X\}$ and $A\in P(X)\Leftrightarrow A\subseteq X$.

لتكن X مجموعة يقال لمجموعة كل المجموعات الجزئية من X انها مجموعة القوى ويرمز لها بالرمز $P(X)$.

Example 2.27: Find $P(X)$ for the following sets X:

1. $X=\{1,2,a\}$, $P(X)=\{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}\}$.
2. $X=\{\emptyset\}$, $P(X)=\{\emptyset, X\}$.
3. $X=\{\{-2\}, 3\}$, $P(X)=\{\emptyset, X, \{\{-2\}\}, \{3\}\}$.

ملاحظات:

(1) لاحظ أ ن عناصر مجموعة القوى هي مجموعات أي أن $\emptyset,\{a\},\ldots,S \in P(S)$، في حين أن $\emptyset,\{a\},\ldots,S \subseteq S$.

(2) من الملاحظة (1) نستطيع أن نعرف مجموعة القوى لمجموعة ما X كما يلي:

$$P(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

Set's Algebra

1. Union الاتحاد

The **union** of the sets A and B, denoted by $\boldsymbol{A\cup B}$, is the set of elements which belong to A **or** to B.

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A او B .

$A\cup B=\{x: x\in A \text{ v } x\in B\}$.

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$.

$x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B$.

لاحظ ان $A\subseteq A\cup B$ و $B\subseteq A\cup B$.

Example 2.28: Let $A=\{x\in N: 1\leq x\leq 5\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B=\{x\in N: 8\leq x\leq 12\}=\{8, 9, 10, 11, 12\}$.

Find $A\cup B$, $B\cup A$, $A\cup A$ and $B\cup\emptyset$.

Solution: $A\cup B=B\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$A\cup A=A$.

$B\cup\emptyset=B$.

Example 2.29: Let $A = \{x \in R: -2 \leq x \leq 5\} = [-2, 5]$,
$B = \{x \in E: x^2 - 16 = 0\} = \{4, -4\}$.
$C = \{1, 4\}$

Find $A \cup (B \cup C)$, $(A \cup B) \cup C$, $P(B)$, $P(C)$, $P(B \cup C)$.

Definition 2.30: Generalization of the union تعميم الاتحاد

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be any sets. Then:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
$$= \{x : (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)$$
$$= \{x : \exists i : x \in A_i; 1 \leq i \leq n\}$$

2. Intersection: التقاطع

The **intersection** of the sets A and B, denoted by $\boldsymbol{A \cap B}$, is the set of elements which belong to both A **and** B.

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي الى A و B معاً.

$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$.
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.
$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$.

Example 2.31: Let $S = \{1, 2, 3, 4\}$ and $T = \{-1, 2, -3, 4\}$.
Then $S \cap T = \{2, 4\}$.

لاحظ ان $S \cap T \subseteq S$ وان $S \cap T \subseteq T$. إن هذا يعني أن $S \cap T$ مكونة من جميع العناصر المشتركة بين S و T.

Definition 2.32: Generalization of the intersection

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be any sets. Then:

$$\bigcap_{i=1}^{n} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x: x \in A_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

ملاحظة:

يقال عن مجموعتين A و B إنهما منفصلتان (disconnected) إذا واذا فقط كان
$A \cap B = \varnothing$.

Definition 2.33: Universal Set المجموعة الشاملة (الكلية)

Universal set R is the set that contains all the elements or all the sets we have under discussion.

Then for every set S_i then, $S_i \subseteq R$ and $\bigcup_{i=1}^{n} S_i \subseteq R$.

المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي جميع العناصر او المجموعات قيد المناقشة.

Example 2.34: Let $A=\{x, y, 3\}$, $B=\{2, -5, 100\}$, $C=\{2, 3, 1\}$. Find a universal set R.

Example 2.35: Let $A=\{x\in R: 2\leq x\leq 5\}$ *and* $B=\{x\in R: -1\leq x\leq 2\}$. Find a universal set R.

Example 2.36: Find a universal set R where

$A= \{1, 2, 3\}$,
$B= \{1, 2, 3, 4\}$,
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
.
.
.

Then, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ can to be universal sets.

Example 2.37: Let $A= \{a, b\}$, $B= \{l, m\}$, $C= \{u, v\}$. Find a universal set R.

Solution: The sets $A \cup B \cup C = \{a, b, l, m, u, v\}$.

$R = \{\alpha: \alpha$ is the letter of English language$\}$. Can to be Universal sets.

ملاحظة:

إذا اختيرت المجموعة الشاملة فيجب تثبيتها في المسئلة الواحدة. إذ لا يجوز اختيار أكثر من مجموعة شاملة في المسألة الواحدة.

Definition 2.38: The Complement المكملة أو المتممة

Let R be a universal set and A be any subset of R. The **complement** of a set A, denoted by A^c, is the set of elements which belong to R but do not belong to A. i.e, $A^c = \{x: (x\in R) \wedge (x \notin A)\}$.

We can show that $A \cap A^c = \varnothing$ and $A \cup A^c = R$.

Example 2.39: Let R={1, 2, …, 10},

$A=\{x\in N: 1\le x\le 3\}=\{1, 2, 3\}$,

$B=\{x\in N: 8\le x\le 10\}=\{8, 9, 10\}$,

$C=\{x\in N: 1\le x\le 2\}=\{1, 2\}$.

Find A^c, B^c, C^c, $(A\cup B)$, $(A\cap C)$ and $(C\cup B)$.

Solution: $A^c=\{4, 5,\dots, 10\}$.

$B^c=\{1, 2,\dots, 7\}$.

$C^c=\{3, 4, 5, \dots, 10\}$.

$(A\cup B)^c=\{1,2,3,8,9,10\}^c=\{4,5,6,7\}$.

$(A\cap C)^c=\{1, 2\}^c=\{3, 4,\dots, 10\}$.

3. Difference or relative complement: الفرق أو الفضلة

Let A and B are two sets. The **difference** between A and B, denoted as A-B or $A\backslash B$, is the set of all elements which belong to A but do not belong to B.

$$A/B \equiv A - B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

يقال لمجموعة العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى B بأنها فضلة A على B .

Proposition 2.40: If R is a universal set, A and B are two subsets of R then, $A - B = A \cap B^c$.

Proof: $A- B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B^c)\} = A \cap B^c$.

4. Symmetric Difference الفرق التناظري

The **symmetric difference** between two sets A and B is denoted by $A\Delta B$ and is defined as:

$$A\Delta B = \{x: ((x\in A) \wedge (x\notin B)) \vee ((x\in B) \wedge (x\notin A))\}.$$
$$= \{x: (x\in A- B) \vee (x\in B- A)\}.$$
$$= (A- B) \cup (B - A).$$

Example 2.41: If $A = \{\ell, m, n, t\}$ and $B = \{n, p, s\}$ then,

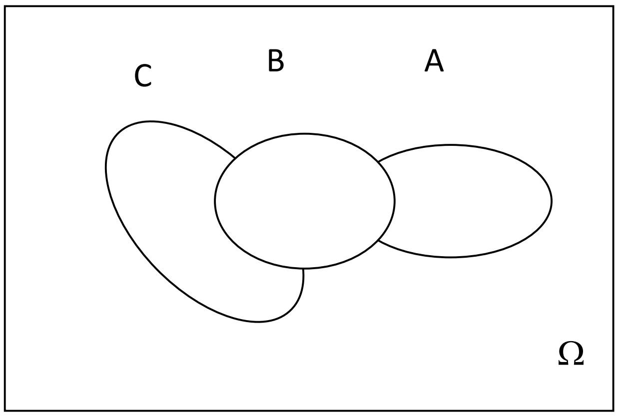
$$A\Delta B = (A- B) \cup (B- A)$$
$$= \{\ell, m, t\} \cup \{p, s\}= \{\ell, m, t, p, s\}$$

Question: Prove or disprove the following statement;

$$A\Delta B= B\Delta A.$$

أشكال ڤن Venn Diagrams

جون ڤن عالم رياضياتي إنجليزي (1843 – 1923 م). وهو أول من إستخدم الاشكال لتمثيل المجموعات، وقد ساعد استخدام الاشكال في تصوير وإدراك وتذليل كثير من الصعوبات فيما يتعلق بنظرية المجموعات. غير أن استخدام اشكال ڤن في برهنة المبرهنات غير مرغوب فيه، لوجود طرق أفضل وادق في التعبير وإنما يكتفي بأشكال ڤن للتوضيح فقط. لقد مّثل ڤن المجموعة برقعة مستوية محاطة بمنحن مغلق لا يتقاطع مع نفسه كأن تحاط عناصر المجموعة بدائرة أو مستطيل أو نحو ذلك. ويستخدم الشكل المستطيل كثيراً ليمثل المجموعة الشاملة Ω مثلاً، بينما توضح المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضوية أو دائرية داخل المستطيل. كما يلي:



جداول الانتماء

تعرّف جداول الإنتماء بطريقة مشابهة للطريقة التي عُرّفت بها جداول الصواب (الحقيقة) في وحدة المنطق الرياضياتي. وإذا كانت $S \neq \varnothing$ مجموعة مفروضة وكان x عنصراً ما، فإما أن يكون $x \in S$ وإلا فإن $x \notin S$ ونعبر عن هذا (اختصاراً) بالجدول (1). وإذا كانت S_1 و S_2 مجموعتين مختلفتين وغير خاليتين، وكان x عنصر ما، فإن الجدول (2) يصف الاحتمالات الممكنة لانتماء هذا العنصر أو عدم إنتمائه للمجموعتين S_1 و S_2.

S_1	S_2
$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$

Table 2

S
$\in$
$\notin$

Table 1

هذا ويمكن ان نعمم هذه الفكرة لتشمل أكثر من مجموعتين مختلفتين. والآن لننشيء جداول الانتماء الخاصة ببعض العمليات معتمدين على التعاريف الاساسية لتلك العمليات.

أولاً : جدول الانتماء لعملية الاتحاد لمجموعتين A و B مبين في الجدول (3).

ثانياً : جدول الانتماء لعملية التقاطع لمجموعتين A و B مبين في الجدول (4).

ثالثاً : جدول الانتماء لمتممة مجموعة A بالنسبة لمجموعة معلومة مبين في الجدول(5).

رابعاً : جدول الانتماء للفرق بين مجموعتين A و B مبين في الجدول (6).

خامساً : جدول الانتماء للفرق التناظري لمجموعتين A و B مبين في الجدول (7).

A	B	$A \cup B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 3

A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 4

A	A^c
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

Table 5

A	B	$A - B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 6

A	B	$A \Delta B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 7

ملاحظات

(1) يمكن استخدام العددين 1 و 0 عوضاً عن الرمزين $\in$ و $\notin$ على الترتيب في جميع جداول الانتماء.

(2) لاحظ أن جداول الانتماء مبينة على أساس التعاريف، وبالتالي فمن الممكن إعتبارها صالحة كتعاريف للإتحاد والتقاطع ...الخ.

(3) إن جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جداً في برهنة كثير من المبرهنات المتعلقة بالمجموعات والعمليات عليها.

Some propositions (properties) of the set's al-gebra

Let A, B and C are three subsets of a universal set Ω.
Then, the following statements are hold:

(i) $A \cup A = A$ and $A \cap A = A$.

(ii) $A \cup B = B \cup A$ and $A \cap B = B \cap A$.

(iii) $(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C)$ and $(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C)$.

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
and $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(v) $A \cup \varnothing = A$ and $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(vi) $A \cup \Omega = \Omega$ and $A \cap \Omega = A$.

(vii) $\Omega^c = \varnothing$ and $\varnothing^c = \Omega$.

(viii) $(A^c)^c = A$.

(ix) $A \cup A^c = \Omega$ and $A \cap A^c = \varnothing$.

(x) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ and $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(xi) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$.

(xii) $(A - B) \neq B - A$.

(xiii) $A - B \subseteq A$.

يتم برهان هذه المبرهنات (الخواص) بطريقتين: الاولى باستخدام تعاريف التقاطع، الاتحاد،...الخ والثانية باستخدام جداول الانتماء.

سنبرهن الخاصية (iv) والتي تنص على أن عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع. تاركين البقية كتمارين للطالب.

الطريقة الاولى:

$A \cup (B \cap C) = \{x: (x \in A) \vee x \in (B \cap C)\}$ من تعريف الاتحاد

$= \{x: (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$ من تعريف التقاطع

$= \{x: [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)]\}$

لان اداة الربط "$\vee$" تتوزع على اداة الربط "$\wedge$"

$= \{x: x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\}$ من تعريف الاتحاد

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ من تعريف التقاطع

الطريقة الثانية:

A	**B**	**C**	**A∪B**	**A∪C**	**B∩C**	**A∪(B∪C)**	**(A∪B)∩(A∪C)**
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Table 8

Exercises

(1) Let A, B and C are three nonempty subsets of a universal set Ω. Prove the following statements by using three methods;
(a) Definitions (b) Belongs tables (c) Propositions.

(i) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.

(ii) $[A^c \cap (A \cup B)]^c = A \cup B^c$.

(iii) $[A^c \cap (B \cap C^c)]^c = A \cup B^c \cup C$.

(iv) $(A \cap B) \cap (A^c \cap B^c) = \varnothing$.

(2) Let A, B and C are three nonempty subsets of a universal set Ω. Prove the following statement;

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C).$$