الفرضية الرابعة

(معدل القيمة او القيمة المتوقعة)

تعطى القيمة المتوقعة للمتغير الديناميكي $\widehat{M}$ بواسطة العلاقة

$$<\widehat{M}> = \frac{\int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وتأخذ العلاقة الشكل

$$<\widehat{M}> = \int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اذا كانت الدالة Ψ معايرة , تساوى القيمة المتوقعة للمتغير الديناميكي مع قيمته الذاتية اذا كانت الدالة Ψ دالة ذاتية للمؤثر $\widehat{M}$

$$<\widehat{M}>=\frac{\int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau}$$

اي اذا كان $\widehat{M}\Psi = m\Psi$

$$<\widehat{M}> = \frac{m\int \Psi^* \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} \Rightarrow <\widehat{M}> = m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

اذا يكون من الواضح انه حسب المعادلة (٧-١) فأننا يمكننا الحصول على قيمة عددية للمؤثر $\widehat{M}$ حتى لو كانت الدالة Ψ دالة غير ذاتية للمؤثر $<\widehat{M}>$

مثال/ ما القيمة العددية لمؤثر الزخم الخطي على المحور x والتي يمكن الحصول عليها من الدالة الحالة $\Psi = 2\, sin(\frac{2\pi x}{L})$ في الفترة من $0 \leq X \leq L$

الجواب/ من الواضح ان الدالة Ψ دالة غير ذاتية للمؤثر $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$بسبب

$$\widehat{P}_x \Psi = -i\hbar \frac{d}{dx}\left(2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) = -i\hbar 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) * \frac{2\pi}{L} = \frac{-2i\pi\hbar}{L}\ 2cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

أي أنه الدالة $2\sin(\frac{2\pi x}{L})$ تغير شكلها وتحولت الى $2\cos(\frac{2\pi x}{L})$ بعد تأثير المؤثر $-i\hbar\frac{d}{dx}$ عليها لذلك لايمكن الحصول على دالة ذاتية لهذه الدالة لمؤثر $\widehat{P}_x$ وبدلاعنها سنحاول الحصول على معدل القيمة او القيمة المتوقعة

$$<\widehat{P}_x>=\frac{\int \Psi^*\widehat{P_x}\Psi\,d\tau}{\int \Psi^*\Psi\,d\tau}=<\widehat{P}_x>=\frac{\int_o^L 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)*-i\hbar\frac{d}{dx}[2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)]dx}{\int_0^L 4\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx}$$

<u>تكامل البسط</u>

$$\int_0^L 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)*-i\hbar\frac{d}{dx}[2\sin(\frac{2\pi x}{L})]d\,x=\int_0^L 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)*-i\hbar\,d(2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right))$$

$$=-i\hbar\int_0^L 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)*\ d(2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right))=-i\hbar\int_0^L \Psi\ d\Psi\ =-i\hbar*\frac{\Psi^2}{2}]_0^L$$

$$=-i\hbar\frac{4\sin^2(\frac{2\pi x}{L})}{2}]_0^L\ =(-2i\hbar)\left[\sin^2\left(\frac{2\pi L}{L}\right)-\sin^2(0)\right]=-2i\hbar*0=0$$

<u>تكامل المقام</u>

$$\int_0^L \Psi^*\ \Psi\,dx\ =\int_0^L 4\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx\Longrightarrow 4\int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$=4\int_0^L\frac{1}{2}(1-\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right))dx\ =2\int_0^L dx-2\int_0^L\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)dx$$

$$=2(L-0)-\frac{2*L}{4\pi}\int_0^L\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)*\frac{4\pi\,dx}{L}=2L-\frac{L}{2\pi}-\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)]_0^L$$

$$=2L+\frac{L}{2\pi}(\sin\left(\frac{4\pi L}{L}\right)-\sin(0))\ =2L+\frac{L}{2\pi}*0=2L$$

$\therefore$ يكون التكامل

$$<\widehat{P}_x>=\frac{\int_0^L\Psi^*\widehat{P_x}\Psi dx}{\int|\Psi|^2dx}=\frac{0}{2L}=0$$

س/ أعد حل السؤال السابق لمؤثر الطاقة الحركية في بعد واحدعلى نفس الدالة

$$\hat{T}\Psi=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}(2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right))\Rightarrow\ \hat{T}\Psi=\frac{-\hbar^2}{2m}*2\frac{d^2}{dx^2}(\sin(\frac{2\pi x}{L}))$$

$$\hat{T}\Psi = \frac{-\hbar^2}{m}\frac{d}{dx}[* \frac{2\pi}{L}cos(\frac{2\pi x}{L})] \Rightarrow \hat{T}\Psi = \frac{-\hbar^2}{m} * \frac{-4\pi^2}{L}sin(\frac{2\pi x}{L})$$

$$\hat{T}\,[2sin(\frac{2\pi x}{L})] = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL}2sin(\frac{2\pi x}{L})$$

نلاحظ ان الدالةΨ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{T}$ لذلك يكون التكامل

$$\langle\hat{T}\rangle = \frac{\int_0^L \Psi^*\hat{T}\Psi dx}{\int_0^L \Psi^*\,\Psi dx} \Longrightarrow \langle\hat{T}\rangle = \frac{\frac{4\pi^2\hbar^2}{mL}\int_0^L \Psi^*\Psi dx}{\int_0^L \Psi^*\Psi dx} \Longrightarrow \therefore \langle\hat{T}\rangle = \frac{4\pi^2\hbar^2}{mL}$$

نلاحظ انه بالرغم من ان معدل القيمة او القيمة المتوقعة لمؤثر الزخم كانت 0 الى ان القيمة المتوقعة لمؤثر الطاقة الحركية تساوي المقدار $\frac{4\pi^2\hbar^2}{mL}$ ويجب الانتباه هنا ان القيمة المتوقعة لاتعطي القيمة الحقيقية للدالة وانما تعطي احتمالية وبالتالي فأن معنى القيمة المتوقعة للزخم هو تساوي احتمالية توجه الجسم نحو اليسر او نحو اليمين على طول المحور x ان النتيجة العامة لحاصل تأثير مؤثر على دالة حالة بأتحاد خطي لمجموعة من الدوال الاساس لايكون دالة ذاتية مالم تكون القيمة الذاتية للدوال الاساس منحلة اي ان

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} c_i\Phi_i$$

$$\hat{M}\Phi_i = m_i c_i\Phi_i \;= c_i m_i\Phi_i$$

$$\therefore \hat{M}\Psi = \sum_{i=1}^{n} c_i\hat{M}\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} m_i c_i\Phi_i$$

اذا كانت القيم الذاتية منحلة فأن

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_i = m_n = m$$

$$\therefore M\hat{}\Psi = m\sum_{i=1}^{n} c_i\Phi_i \Rightarrow \hat{M}\Psi = m * \Psi$$

وبذلك تكون معدل القيمة للمؤثر هي الطريقة التي يمكن بواسطتها أستخلاص المعلومات من دالة الأتحاد الخطي Ψ ذات القيم الذاتية غير المتساوية (غير المنحلة)

$$\Psi = \sum_{i=1}^{3} c_i\Phi_i$$

$$\hat{M}\Psi = \hat{M}\sum_{i=1}^{3} c_i\Phi_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} c_i m\Phi_i$$

$$\hat{M}\Psi = \sum_{n=1}^{n} m_i c_i\Phi_i$$

$$\therefore\ \langle\hat{M}\rangle = \frac{\int \Psi^*\hat{M}\Psi d\tau}{\int \Psi^*\Psi d\tau}$$

البسط

$$\int \Psi^* \widehat{M}\, \Psi d\tau = \int (\sum_{i=1}^{3} c_i \Phi_i)^* \widehat{M} (\sum_{i=1}^{3} c_i \Phi_i)\, d\tau$$

$$= \int (\sum_{i=1}^{3} c_i^* \Phi_i^* \sum_{i=1}^{3} m_i c_i \Phi_i)\, d\tau$$

$$= \int (c_1^* \Phi_1^* + c_2^* \Phi_2^* + c_3^* \Phi_3^*)(m_1 c_1 \Phi_1 + m_2 c_2 \Phi_2 + m_3 c_3 \Phi_3) d\tau$$

$$= \int m_1 c_1^* c_1 \Phi_1^* \Phi_1 d\tau + \int m_2 c_1^* c_2 \Phi_1^* \Phi_2 d\tau + \int m_3 c_1^* c_3 \Phi_1^* \Phi_3 d\tau$$

$$+ \int m_1 c_2^* c_1 \Phi_2^* \Phi_1 d\tau + \int m_2 c_2^* c_2 \Phi_2^* \Phi_2 d\tau + \int m_3 c_2^* c_3 \Phi_2^* \Phi_3 d\tau$$

$$+ \int m_1 c_3^* c_1 \Phi_3^* \Phi_1 d\tau + \int m_2 c_3^* c_2 \Phi_3^* \Phi_2 d\tau + \int m_3 c_3^* c_3 \Phi_3^* \Phi_3 d\tau$$

$$= m_1 c_1^* c_1 \int \Phi_1^* \Phi_1 d\tau + m_2 c_1^* c_2 \int \Phi_1^* \Phi_2 d\tau + m_3 c_1^* c_3 \int \Phi_1^* \Phi_3 d\tau$$

$$+ m_1 c_2^* c_1 \int \Phi_2^* \Phi_1 d\tau + m_2 c_2^* c_2 \int \Phi_2^* \Phi_2 d\tau + m_3 c_2^* c_3 \int \Phi_3^* \Phi_3 d\tau$$

$$+ m_1 c_3^* c_1 \int \Phi_3^* \Phi_1 d\tau + m_2 c_3^* c_2 \int \Phi_3^* \Phi_2 d\tau + m_3 c_3^* c_3 \int \Phi_3^* \Phi_3 d\tau$$

وحسب قاعدة المعايرة-التعامد orthonormalization

$$\int \Phi_n^* \Phi_m d\tau = \delta_{nm}$$

$$\therefore \int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau = m_1 c_1^* c_1 * 1 + m_2 c_1^* c_2 * 0 + m_3 c_1^* c_3 * 0$$

$$+ m_1 c_2^* c_1 * 0 + m_2 c_2^* c_2 * 1 + m_3 c_2^* c_3 * 0$$

$$+ m_1 c_3^* c_1 * 0 + m_2 c_3^* c_2 * 0 + m_3 c_3^* c_3 * 1$$

$$\int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau = m_1 c_1^* c_1 + m_2 c_2^* c_2 + m_3 c_3^* c_3$$

تكامل المقام

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int (c_1^* \Phi_1^* + c_2^* \Phi_2^* + c_3^* \Phi_3^*)(c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3) d\tau$$

$$\rightrightarrows \int \Psi^* \Psi d\tau = c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3$$

$$\therefore\ \langle \widehat{M} \rangle = \frac{\int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} = \frac{m_1 c_1^* c_1 + m_2 c_2^* c_2 + m_3 c_3^* c_3}{c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3}$$

و هنا يتضح المفهوم الاحتمالي لمربع دالة الموجة حيث ان الاحتمالية الجزئية i تكون $\boldsymbol{P_i = c_i^* c_i}$ للدالة المتناسقة و تكون $\boldsymbol{P_i} = \frac{c_i^* c_i}{c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3}$ للدالة غير المتناسقة

$$\langle \widehat{M} \rangle = \frac{\int \Psi^* \widehat{M} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} = P_1 m_1 + P_2 m_2 + P_3 m_3 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (4)$$

يستخدم القانون اعلاه لحساب القيمة المتوقعة لمؤثر يعمل على دالة اتحاد خطي تكون القيم الذاتية للدوال الاساس التي تكونها غير متساوية.

و عندما تكون الدالة Ψ معايرة يكون حاصل الجمع في المقام ١ اي ١٠٠% وبهذا تكون P_i جزء الاحتمالية التي تحمله الدالة الاساس Φ_i ضمن دالة الموجة الكلية لذلك فمن الافضل معايرة الدالة Ψ قبل ايجاد الاحتماليات الجزئية

س/ احسب احتماليات القياس $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3}$ للدالة $\boldsymbol{\Psi}$ المعرفة كاتحاد خطي للدوال الاساس $\boldsymbol{\Phi_i}$ كالاتي

$$\boldsymbol{\Psi = \Phi_1 + 25i\Phi_2 + 2.4\Phi_3}$$

ج/ ايجاد ثابت التناسق N

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \int (\Phi_1 + 25i\Phi_2 + 2.4\Phi_3)^* (\Phi_1 + 25i\Phi_2 + 2.4\Phi_3) d\tau$$

$$= \int (\Phi_1^* - 25i\Phi_2^* + 2.4\Phi_3^*)(\Phi_1 + 25i\Phi_2 + 2.4\Phi_3) d\tau$$

$$= \int \Phi_1^* \Phi_1 d\tau - (25)^2 i^2 \int \Phi_2^* \Phi_2 d\tau + (2.4)^2 \int \Phi_3^* \Phi_3 d\tau$$

$$= 1 + 625 + 5.76 = 631.76$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{\int \Psi^* \Psi d\tau}} = \frac{1}{\sqrt{631.76}} \Longrightarrow \overline{\Psi} = N\Psi = \frac{1}{\sqrt{631.76}} (\Phi_1 + 25i\Phi_2 + 2.4\Phi_3)$$

$$P_1 = N^2 c_1^* c_1 = \frac{1}{631.76} * 1 * 1 = \frac{1}{631.76}$$

$$P_2 = N^2 c_2^* c_2 = \frac{1}{631.76} * (-25i * 25i) = \frac{625}{631.76}$$

$$P_3 = N^2 c_3^* c_3 = \frac{1}{631.76} * (2.4 * 2.4) = \frac{5.76}{631.76}$$

حل اخر

$$P_1=\frac{c_1^*c_1}{c_1^*c_1+c_2^*c_2+c_3^*c_3}=P_1=\frac{1*1}{1*1+(-25i)(+25i)+2.4*2.4}=P_1=\frac{1}{1+625+5.76}=\frac{1}{631.76}$$

$$P_2=\frac{c_2^*c_2}{c_1^*c_1+c_2^*c_2+c_3^*c_3}=P_2=\frac{(-25i)(+25i)}{1*1+(-25i)(+25i)+2.4*2.4}=P_2=\frac{625}{1+625+5.76}=\frac{625}{631.76}$$

$$P_3=\frac{c_3^*c_3}{c_1^*c_1+c_2^*c_2+c_3^*c_3}=P_3=\frac{2.4*2.4}{1*1+(-25i)(+25i)+2.4*2.4}=P_3=\frac{5.76}{1+625+5.76}=\frac{5.76}{631.76}$$

و عند جمع الاحتماليات للدالة المعايرة

$$P_1+P_2+P_3=\frac{1}{631.76}+\frac{625}{631.76}+\frac{5.76}{631.76}=\frac{631.76}{631.76}=1$$

س/ احسب القيمة المتوقعة لمؤثر الزخم الخطي في بعد واحد على دالة الاتحاد الخطي المكونة من الدوال

$$\boldsymbol{\phi_1=e^{-ix},\phi_2=e^{-2ix},\phi_3=e^{-i3x}}$$

ج/ ان الدوال اعلاه هي دوال ذاتية لمؤثر الزخم الخطي و قيمها الذاتية هي $(-\hbar\,,-2\hbar\,,-3\hbar)$ على التوالي و هي قيم ذاتية مختلفة لذلك حسب (النتيجة ٢) في المحاضرة السادسة تكون هذه الدوال متعامدة مع بعضها و في الوقت نفسه هي دوال متناسقة مع نفسها الا انه حسب (النتيجة ٥) في المحاضرة السادسة تكون دالة الاتحاد الخطي لهذه الدوال غير ذاتية دالة الاتحاد الخطي لها لا تحقق معادلة القيمة الذاتية لذلك تحسب القيمة المتوقعة من المعادلة (4)

$$\langle\widehat{p_x}\rangle=\frac{\int \Psi^*\widehat{p_x}\Psi d\tau}{\int \Psi^*\Psi d\tau}=P_1m_1+P_2m_2+P_3m_3$$

$$\langle\widehat{p_x}\rangle=\frac{c_1^*c_1}{c_1^*c_1+c_2^*c_2+c_3^*c_3}*m_1+\frac{c_2^*c_2}{c_1^*c_1+c_2^*c_2+c_3^*c_3}*m_2+\frac{c_3^*c_3}{c_1^*c_1+c_2^*c_2+c_3^*c_3}*m_3$$

$$\langle\widehat{p_x}\rangle=\frac{1*1}{1*1+1*1+1*1}(-\hbar)+\frac{1*1}{1*1+1*1+1*1}(-2\hbar)+\frac{1*1}{1*1+1*1+1*1}(-3\hbar)$$

$$\langle\widehat{p_x}\rangle=\frac{1}{3}(-\hbar)+\frac{1}{3}(-2\hbar)+\frac{1}{3}(-3\hbar)=\frac{-6}{3}(\hbar)=-2\hbar$$