

الفصل الخامس

اختبار الفرضيات Tests of Hypotheses

الفرضية الاحصائية :

هي عبارة عن ادعاء او تصريح (قد يكون صائبا او خطأ) حول معلمه او اكثر لمجتمع او لمجموعة مجتمعات .

عندما نأخذ عينة من مجتمع ما لمعرفة فرضية معينة نستخدم جميع المعلومات من العينة للوصول الى قرار بقبول او رفض الفرضية الاحصائية . فالإحصائي او الباحث يحاول دائما ان يضع الفرضية بشكل يأمل ان يرفضها . مثلا اذا اراد الباحث ان يقارن صنفا جديدا من الحنطة مع الصنف المحلي فإنه يضع فرضية فحواها بأنه لا يوجد فرق معنوي (او جوهري) بين الصنفين وكذلك اذا اراد ان يبرهن بأن طريقة من طرق التدريس احسن من غيرها فإنه يضع فرضية تقول بعدم وجود فرق بين طرق التدريس هذه وهكذا ان الفرضية التي يضعها الباحث على امل ان يرفضها تدعى بفرضية العدم (Null hypothesis) ويرمز لها بـ H_0 ورفضنا لفرضية العدم يقودنا الى قبول فرضية بديلة عنها هذه الفرضية تدعى الفرضية البديلة (Alternative hypothesis) ويرمز لها بـ H_1 .

مستوى المعنوية Level of significant

يعرف مستوى المعنوية بأنه درجة الاحتمال الذي نرفض فرضية العدم H_0 عندما تكون صحيحة (وهو احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الاول) ويرمز لها بـ α .

هذه الدرجة α تحدد من قبل الباحث وهي اما 1%(0.01) او 5% (0.05) على الاكثر عندما نأخذ مستوى احتمال 1% يعني بأنه اذا تكررت التجربة لعدد كبير من المرات فمن المحتمل ان نرفض فرضية العدم H_0 بالرغم من انها صحيحة مرة واحدة كل ١٠٠ مرة اي ان احتمال الوقوع في الخطأ في الاستنتاج من النوع الاول هو 1% او اقل وان الاستنتاج يكون صائب بدرجة ثقة ٩٩% كما ان مستوى الاحتمال 5% يعني بأنه من المحتمل ان نرفض فرضية العدم H_0 وهي صحيحة خمس مرات في كل ١٠٠ مرة فاحتمال الوقوع في خطأ في الاستنتاج من النوع الاول هو

5% او اقل بينما الاستنتاج يكون سليم بدرجة ثقة 95% اما اذا قبلنا فرضية العدم دل ذلك على عدم وجود فرق جوهري (معنوي) .

المختبر الاحصائي Test statistic :

وهو عبارة عن متغير عشوائي له توزيع معلوم ويصف المختبر الاحصائي العلاقة بين القيم النظرية للمجتمع والقيم المحسوبة للعينه .

منطقة الرفض Rejection Region :

منطقة الرفض (او المنطقة الحرجة) وهي تلك المنطقة التي اذا وقعت قيمة المختبر الاحصائي داخلها تسبب رفض فرضية العدم H_0 والمنطقة الاخرى غير منطقة الرفض تسمى منطقة القبول وهي المنطقة التي اذا وقعت قيمة المختبر الاحصائي داخلها تسبب قبول فرضية العدم H_0 .

اختبار متوسط عينة عشوائية من مجتمع طبيعي : (اختبار معنوي مستند للتوزيع الطبيعي) الاختبار يتعلق بالفرضية الاتية :

$$H_0 = \mu = \mu_0$$

حيث μ هو الوسط الحسابي للمجتمع ، μ_0 هو قيمة معينة معلومة علما ان تباين المجتمع σ^2 معلوم ، وبعبارة اخرى سنقارن هنا متوسط عينة بمتوسط المجتمع لنرى هل ان العينة تنتمي لهذا المجتمع ام لا ؟ فاذا كانت نتيجة الاختبار بالإيجاب ففي هذه الحالة يكون متوسط العينة المحسوب لا يختلف اختلافا جوهريا عن متوسط المجتمع .

صياغة فرضيتا العدم والبديلة :

عند اختبار متوسط المجتمع μ يساوي قيمة معينة μ_0 ضد الفرضية القائلة بان μ لا يساوي μ_0 فأنا نكتب الفرضيتان بالشكل الاتي :

$$H_0 = \mu = \mu_0$$

$$H_1 = \mu \neq \mu_0$$

عند رفض فرضية العدم فان الفرضية البديلة تأخذ مدى من القيم يشمل جميع القيم الممكنة لمعلمة المجتمع .

مثلا:

عند اختبار درجة تعبئة معمل تعليب معجون الطماطة التي تزن (250) غم فأننا نضع فرضية العدم (H_0) بان متوسط وزن علبة المعجون هو (250) غم ، اما الفرضية البديلة فهي في هذه الحالة ان متوسط علبة المعجون لا تساوي (250) غم اي :

$$H_0: \mu = 250$$

$$H_1: \mu \neq 250 \text{ فاذا}$$

رفضنا فرضية العدم وقبلنا الفرضية البديلة يعني ذلك ان متوسط وزن العلبة لا يساوي (250) غم وهذا معناه ان متوسط الوزن قد يكون اكثر او اقل من (250) غم .

مثال اخر :

نفرض ان وزارة الصحة تريد اختبار فاعلية دواء مستحدث عن الدواء الحالي في علاج مرض معين فاذا كان متوسط شفاء المرضى المصابين بهذا المرض بعد تناولهم الدواء الحالي هو (70%) اي ان ($p=0.70$) بينما اذا اعطيت للمرضى الدواء الجديد الذي قيل بأنه اكثر فعالية من الدواء الحالي فإن (p) في هذه الحالة ستكون اكثر من (70%) اي ($p > 0.70$) اي ان فرضية العدم والبديلة ستكون

$$H_0: p = 0.70$$

$$H_1: p > 0.70$$

واذا كان العكس فان الفرضيتان تكون :

$$H_0: p = 0.70$$

$$H_1: p < 0.70$$

اتخاذ القرارات :

حالات الاختبار	$\alpha: \alpha$ رفض H_0 اذا كانت قيمة	$\alpha: 0.05$ رفض H_0 اذا كانت قيمة	$-\alpha: 0.01$ رفض H_0 اذا كانت قيمة
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ and } Z \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ or } Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z \geq 1.96 \text{ and } Z \leq -1.96 \text{ or } Z \geq 1.96$	$Z \geq 2.58 \text{ and } Z \leq -2.58 \text{ or } Z \geq 2.58$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$Z \geq Z_{\alpha}$	$Z \geq 1.65$	$Z \geq 2.33$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$Z \leq -Z_{\alpha}$	$Z \leq -1.65$	$Z \leq -2.33$

مثال:

ينتج معمل للتعليب قناني فاكهة مفروض ان يكون متوسط وزنها (15) باوند وبانحراف قياسي هو (0.5) باوند للتأكيد من ان المعمل لا زال ينتج عند المستوى المطلوب اخذت عينة مكونة من (50) علبة فوجد ان متوسط وزنها (14.8) باوند فاذا كان وزن العلبة متغير عشوائي تتوزع توزيع طبيعيًا فهل تدل العينة على ان انتاج المعمل لازال (15) باوند باختبار $\alpha = 0.01$ كمستوى معنوية ؟

الحل :

- فرضية العدم $H_0: \mu = 15$
- الفرضية البديلة $H_1: \mu \neq 15$
- مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$
- منطقة الرفض $Z \geq 2.58 \text{ or } Z \leq -2.58$
- المختبر الاحصائي $x = 14.8, n = 50, \sigma = 0.5$

$$Z = \frac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{14.8 - 15}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}} = -2.83$$

- القرار : بما ان قيمة Z المحسوبة (-2.83) هي اقل من قيمة Z الجدولية (-2.58) اي ان قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة .

$$H_0: \mu = 15$$

$$H_1: \mu \neq 15$$

اي ان المعمل لا ينتج علب اوزانها (15) باوند

مثال :

كان معدل انتاج احد الاصناف المحلية من الحنطة في السنين الخمس السابقة هو 1600 كغم/ هكتار وقد ادعى احد المزارعين بانه قد استنبط سلالة من هذا الصنف يعطي انتاج اكثر ولاختبار صحة الادعاء اخذت عينة عشوائية مؤلفة 81 نباتا من السلالة الجديدة ووجد ان متوسط انتاجها 1630 كغم / هكتار بانحراف قياسي 15 كغم هل نتائج العينة تؤيد ادعاء الباحث تحت مستوى معنوي 0.01 ؟

الحل: فرضية العدم $H_0: \mu = 1600$

- الفرضية البديلة $H_1: \mu > 1600$

- مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$

- منطقة الرفض $Z \geq 2.33$

- المختبر الاحصائي $x = 1630$, $n = 81$, $\sigma = 15$

$$Z = \frac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1630 - 1600}{\frac{15}{\sqrt{81}}} = 18$$

- القرار : بما ان قيمة Z المحسوبة (18) هي اقل من قيمة Z الجدولية (2.33) اي ان

قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة

اي ان ادعاء المزارع كان صحيحا .

مثال :

ادعت احدى شركات انتاج البنجر السكري بانها انتجت صنفا من البنجر السكري نسبة السكر فيه لا تقل عن (0.18) غم / اي 18 لكل (100) غم وبانحراف قياسي قدره (2.5) غم ولاختبار هذا الادعاء اخذت عينة عشوائية مؤلفة من (36) ثمرة من البنجر وحسبت منه نسبة السكر فكان وسطها الحسابي (17.2) غم/ (100) غم فهل ادعاء الشركة عند مستوى احتمال (0.05) مقبولا ؟

الحل:

فرضية العدم $H_0: \mu = 18$

- الفرضية البديلة $H_1: \mu < 18$

- مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

- منطقة الرفض $Z \leq -1.65$

- المختبر الاحصائي $x = 17.2, n = 36, \sigma = 2.5$

$$Z = \frac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{17.2 - 18}{\frac{2.5}{\sqrt{36}}} = -1.9$$

القرار : بما ان قيمة Z المحسوبة (-1.9) هي اقل من قيمة Z الجدولية (-1.65) اي ان قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذا ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة اي بعبارة اخرى ان ادعاء الشركة غير صحيح تحت مستوى احتمال 0.05

واجب /

نفس المثال ولكن استخدم $\alpha = 0.01$

اختبارات تتعلق بمتوسطين Tests Concerning Two Means

في بعض الاحيان نحتاج مقارنة متوسطي مجتمعين فمثلا نقارن بين نوعين من التغذية للأطفال او مقارنة صنفين من الذرة الصفراء الخ .

ففي هذه الحالة ستتضمن الفرضية مقارنة الفرق بين متوسطين هما μ_1, μ_2 وتباينهما σ_1, σ_2 وسوف نختبر الفرضية القائلة ان الفرق بين المتوسطين يساوي قيمة معينة اي

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

حيثان هي القيمة المعلومة اما الفرضية البديلة ستكون احدى الفرضيات الاتية

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$$

مفهوم درجة الحرية Concept of degree of freedom

لتوضيح هذا المفهوم نفرض ان عينة حجمها (5) اي (n=5) وكما هو معلوم فان مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوي صفر اي ان

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

لذا سيكون لدينا (5) انحرافات ولكن d1 , d2, d3, d4, d5 فاذا عرفنا اربعة من هذه الانحرافات فأننا بسهولة سنعرف الخامس فليس لنا حرية الاختيار قيمة له لأنه قد حددت قيمة بعد معرفة القيم الاربعة

مثلا:

$$d1=5 , d2=3 , d3=1 , d4=6$$

والمطلوب ايجاد قيمة d5 هي

$$d1+d2+d3+d4+d5=0$$

$$5+(-3) +1+6+d5=0$$

$$d5=9$$