

محاضرة الدوال

الفصل الأول

النفاصل الجزئي والتفاضل المتكرر

النفاصل الجزئي / يوجد نوعين من الاشتقاق أحادي ومتعدد

الاشتقاق الأحادي : لنفرض $y = f(x)$ دالة للمتغير x فقط غير متغيرة
متغير مستقل و y متغير معتمد فان هذه الدالة يمكن اشتقاقها بالاشتقاق
أحادي لأن المتغير المعتمد y فقط ويرمز له بالرمز $\frac{dy}{dx}$

Ex $y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot x \Rightarrow dy = 2x dx$

وتسمى الدالة التي تحتوي على اشتقاق بالمعادلة التفاضلية ويمكن كتابتها
بالشكل $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) dx$

الاشتقاق الجزئي : لنفرض $z = f(x, y)$ دالة لأكثر من متغير مستقل واحد مثلاً

$z = f(x, y)$ هنا المتغير المعتمد هو z والمتغير المستقل هو x, y وان هذه
الدالة يمكن اشتقاقها جزئياً لـ x مرة واحدة ويرمز للاشتقاق
الجزئي $\frac{\partial z}{\partial x}$ وعليه فان المشتقات الجزئية لـ x ولـ y هي

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

بصورة عامة :
الدالة التي فيها n من المتغيرات المستقلة لها n من المشتقات الجزئية
يتم إيجاد المشتقات الجزئية لهذه المتغيرات باعتبار المتغيرات الأخرى
ثابتة.

أمثلة / في كل المشتقات الجزئية الممكنة

1- $w = x^3 - 2x^2y + y^2 - 4$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + 0 - 0 = 3x^2 - 4xy$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 - 2x^2 + 2y - 0 = -2x^2 + 2y$$

2- $w = \tan\left(\frac{y^2}{x}\right)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{x \cdot 0 - y^2 \cdot 1}{x^2} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \frac{-y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{x \cdot 2y - y^2 \cdot 0}{x^2} = \sec^2\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{2y}{x}$$

3. $f(x, y) = e^x \cdot \cos y$ find f_x / f_y

$$f_x = e^x \cdot \cos y, \quad f_y = e^x \cdot \sin y$$

4. find f_x / f_y / f_z if $P(x, y, z) = x^2 z - y^2$

$$f_x = 2xz - 0 \quad / \quad f_y = 0 - 2y \quad / \quad f_z = x^2$$

تجارب /
كل مسائل الجبرية لكل ما يأتي

1. $w = x^4 - 5x^3y^3 + y^5 - 20$

$$w_x = 4x^3 - 15x^2y^3 \quad / \quad w_y = -15x^3y^2 + 5y^4$$

2. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

$$w_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$w_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$$

3. $f = \cos x + x^2 \sin y$

$$f_x = -\sin x + 2x \sin y \quad / \quad f_y = x^2 \cos y$$

4. $f = x^2 e^{2y+3z} \cos(4w)$

$$f_x = 2x e^{2y+3z} \cos(4w)$$

$$f_y = x^2 \cos(4w) e^{2y+3z} \cdot 2$$

$$f_z = x^2 \cos(4w) e^{2y+3z} \cdot 3$$

$$f_w = x^2 e^{2y+3z} \cdot -\sin(4w) \cdot 4$$

$$s = f = \frac{r(2 - \cos 2\theta)}{r^2 + z^2} \xrightarrow{\text{بالنسبة}} f = \frac{2r - r \cos 2\theta}{r^2 + z^2}$$

$$f_r = \frac{(r^2 + z^2)(2 - \cos 2\theta) - r(2 - \cos 2\theta) \cdot 2r}{(r^2 + z^2)^2}$$

$$f_\theta = \frac{0 - r \cdot -\sin 2\theta \cdot 2}{r^2 + z^2} = \frac{2r \sin 2\theta}{r^2 + z^2}$$

$$f_z = \frac{(r^2 + z^2) \cdot 0 - r(2 - \cos 2\theta) \cdot 2z}{(r^2 + z^2)^2} = \frac{-2rz(2 - \cos 2\theta)}{(r^2 + z^2)^2}$$

$$6- f = \frac{x^2 + y^2}{u^2 + v^2}$$

$$f_x = \frac{2x + 0}{u^2 + v^2} = \frac{2x}{u^2 + v^2}, \quad f_y = \frac{0 + 2y}{u^2 + v^2} = \frac{2y}{u^2 + v^2}$$

$$f_u = \frac{(u^2 + v^2) \cdot 0 - (x^2 + y^2) \cdot 2u}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{-2u(x^2 + y^2)}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$f_v = \frac{(u^2 + v^2) \cdot 0 - (x^2 + y^2) \cdot 2v}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{-2v(x^2 + y^2)}{(u^2 + v^2)^2}$$

ملاحظة / إذا كان المتغير المطلوب يختلف مع المتغير الآخر فنعمل قاعدة (نسبة)
(نسبة والتبسيط)

إذا كان المتغير المطلوب يختلف مع المتغير الآخر فنعمل قاعدة (نسبة والتبسيط)
المتغير الذي يتغيره يختلف عن المتغير المطلوب، متغير معاملة المتغير
الذي يتغيره كما هو ثم نسبق المتغير المطلوب بجانبه

قوانين الاشتقاق المباشرة - (المثبتة)

$$1- f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2- f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$3- f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$4- f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$5- f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_1 + 0$$

$$6- [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$7- [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$8- [f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$9- \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$10- \left[\frac{1}{g(x)} \right]' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$11- f(x) = [P(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n [P(x)]^{n-1} \cdot P'(x)$$

مراجعة جبراً

الموضوع

٢٠١

التاريخ

مراجعة جبراً

٤

12- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) dx$

13- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) dx$

14- $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \sec^2(x) dx$

15- $f(x) = \sec(x) \Rightarrow f'(x) = \sec(x) \cdot \tan(x) \cdot dx$

16- $f(x) = \csc(x) \Rightarrow f'(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x) \cdot dx$

17- $f(x) = \cot(x) \Rightarrow f'(x) = -\csc^2(x) dx$

18- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot dx$

19- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot dx$



5 تكامل المتكامل

التكاملات المتعددة هي تعميمات للتكاملات المزدوجة والتكاملات المثلثية. التكاملات المتعددة هي عمليات على الدوال المتعددة المتغيرات.

التكامل المتكرر مرتين

لنكن P دالة $P: D \rightarrow E$ حيث $P(x, y)$ دالة في متغيرين x و y ولها متغيرات جزئية P_x و P_y .
فإن التكامل لهذه الدالة هو تكامل متكرر مرتين ويجب بالمثل

$$\int \int P(x, y) dx dy \quad \text{أو} \quad \int \int P(x, y) dy dx$$

أي إذا كانت الدالة بالنسبة إلى ثلاث متغيرات أي إذا $P(x, y, z)$ فإنها P_x, P_y, P_z فإن التكامل المتكرر ثلاث مرات يجب بالمثل

$$\int \int \int P(x, y, z) dx dy dz \quad \text{أو} \quad \int \int \int P(x, y, z) dx dz dy \quad \text{أو} \quad \int \int \int P(x, y, z) dy dz dx$$

وهكذا فالتكامل المتكرر n من المرات هو:-

$$\int \int \int \dots \int P(x, y, z, \dots, v) dx dy dz \dots dv$$

طريقة التكاملات المتكررة:-
تتم كل طرق دوال التكامل السابقة وعندما نكامل بالنسبة لمتغير معين نعامل ببقية المتغيرات كمتغيرات

$$\int \left[\int P(x, y) dx \right] dy = \int g(x, y) dy = h(x, y) + c$$

①

②

أ- تكامل بالنسبة لـ x ونعامل y والبقية كمتغيرات
ب- تكامل بالنسبة لـ y ونعامل x والبقية كمتغيرات
وفي الحالة ننتج دالة جديدة

قوانين التكامل الأساسية :-

$$1- \int k dx = kx + C \quad \text{حيث } k \text{ ثابت}$$

$$2- \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$3- \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4- \int e^x dx = e^x + C$$

$$5- \int p^x dx = \frac{p^x}{\ln p} + C \quad p > 0, p \neq 1, p \neq -1$$

$$6- \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7- \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8- \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$9- \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$10- \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$11- \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$12- \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$13- \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$14- \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$15- \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

وبنفس التفاضل السابق الاختلاف يكون بأن التفاضل المتعدد لا يحدود
وليس خارج وعند إيجاد التفاضل المتعدد يجب أن نعوض القيمة العليا ثم
القيمة السفلى من الحدود

أمثلة على التفاضل المتعدد المكونة المربعة :-

$$1- \int_{-1}^1 \int_0^2 (1-6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 (x-2x^3y) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 (2-16y) dy$$

$$= 2y - 8y^2 \Big|_{-1}^1 = 2-8 - (-2-8) = 2-8+2-8 = -4$$

وحدة مربعة

$$2- \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^y dz dx dy = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} z \Big|_0^y dx dy = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} (y-0) dx dy$$

$$= \int_0^2 yx \Big|_0^{4-y^2} dy = \int_0^2 (y(4-y^2)-0) dy = \int_0^2 (4y-y^3) dy$$

$$= 2y^2 - \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 = 8-4 = 4$$

وحدة مكعبة

$$3- \int_{-2}^1 \int_0^{2x} \int_0^{2-x} dz dy dx = \int_{-2}^1 \int_0^{2x} z \Big|_0^{2-x} dy dx = \int_{-2}^1 \int_0^{2x} (2-x) dy dx$$

$$= \int_{-2}^1 (2y - xy) \Big|_0^{2x} dx = \int_{-2}^1 (4x - 2x^2) dx$$

$$= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^1 = (2 - \frac{2}{3}) - (8 - \frac{-8 \times 2}{3})$$

$$= 2 - \frac{2}{3} - 8 + \frac{16}{3}$$

$$= -6 - \frac{18}{3} = -6 - 6 = -12 = 12$$

وحدة مكعبة

$$4 - \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} \int_{4x^2}^{5-x^2} dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} z \int_{4x^2}^{5-x^2} dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (5-x^2-4x^2) dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (5-5x) dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 (5y - 5x^2 y) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (5(1-x) - 5x^2(1-x)) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (5 - 5x - 5x^2 + 5x^3) dx$$

$$= 5x - \frac{5x^2}{2} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 \Big|_{-1}^1$$

$$= (5 - \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4}) - (-5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4})$$

$$= 5 + 5 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 10 \text{ नेकरो}$$

$$5 - \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{x-y}^{x+y+1} dz dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^0 z \Big|_{x-y}^{x+y+1} dy dx = \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^0 [(x+y+1) - (x-y)] dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1+2y) dy dx = \int_0^1 (y+y^2) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 dx$$

$$= \int_0^1 0 - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) dx = \int_0^1 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \text{ नेकरो}$$

$$\begin{aligned}
 6- \int_0^1 \int_0^3 x^2 dx dy &= \int_0^1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (3^3 - 0) dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 27 dy = 9 \int_0^1 dy = 9(y) \Big|_0^1 = 9(1) - 9(0) = 9 \text{ جواب}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7- \int_0^{-1} \int_0^5 2^x dx dy &= \int_0^{-1} \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^5 dy = \int_0^{-1} \frac{2^5 - 2^0}{\ln 2} dy = \int_0^{-1} \frac{32-1}{\ln 2} dy \\
 &= \int_0^{-1} \frac{31}{\ln 2} dy = \frac{31}{\ln 2} \int_0^{-1} dy = \frac{31}{\ln 2} (y) \Big|_0^{-1} \\
 &= \frac{31}{\ln 2} (-1 - 0) = \frac{31}{\ln 2} (-1) = -\frac{31}{\ln 2} = \frac{31}{\ln 2} \text{ جواب}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8- \int_{-2}^2 \int_0^{10} e^{2y} dy dx &= \int_{-2}^2 \left. \frac{1}{2} \int_0^{10} 2 e^{2y} dy \right|_{-2}^2 dx = \int_{-2}^2 \left. \frac{1}{2} e^{2y} \right|_0^{10} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (e^{20} - e^0) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (e^{20} - 1) dx = \frac{1}{2} (e^{20} - 1) \int_{-2}^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} (e^{20} - 1) x \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (e^{20} - 1) (2) - \frac{1}{2} (e^{20} - 1) (-2) \\
 &= \frac{2e^{20}}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2e^{20}}{2} - \frac{2}{2} = 2e^{20} \text{ جواب}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9- \int_{-1}^0 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx dy &= \int_{-1}^0 \left. -\ln |\cos x| \right|_0^{\frac{\pi}{4}} dy = \int_{-1}^0 [-\ln(\cos \frac{\pi}{4}) + \ln(\cos 0)] dy \\
 &= \int_{-1}^0 \left[-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln(1) \right] dy = \int_{-1}^0 -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} dy = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} (y) \Big|_{-1}^0 \\
 &= -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} (0) + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} (-1) = \left| \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \\
 &= \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ جواب}
 \end{aligned}$$

$$10 - \int_{-1}^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cot \theta \, d\theta \, dy = \int_{-1}^1 \ln |\sin \theta| \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\ln |\sin \frac{\pi}{2}| - \ln |\sin -\frac{\pi}{2}| \right] dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\ln |\sin \frac{\pi}{2}| + \ln |\sin \frac{\pi}{2}| \right] dy = \int_{-1}^1 2 \ln |\sin \frac{\pi}{2}| dy$$

$$= \int_{-1}^1 2 \ln |1| dy = \int_{-1}^1 2(0) dy = \int_{-1}^1 (0) dy = (0)y \Big|_{-1}^1$$

$$= (0)(1) - (0)(-1) = 0 \text{ मूल्य}$$

$$11 - \int_0^1 \int_0^2 2x(x^2 - 4)^2 dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{(x^2 - 4)^3}{3} \right]_0^2 dy = \int_0^1 \left[\frac{(4-4)^3}{3} - \frac{(0-4)^3}{3} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(0 - \frac{-64}{3} \right) dy = \int_0^1 \frac{64}{3} dy = \frac{64}{3} \cdot y \Big|_0^1 = \frac{64}{3}(1) - \frac{64}{3}(0) \\ = \frac{64}{3} \text{ मूल्य}$$

$$12 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{1}{\cos^2 x} dy \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} y \Big|_0^2 dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} (2-0) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x dx = 2 \tan x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \left[\tan \frac{\pi}{2} - \tan \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= 2 \left[\tan \frac{\pi}{2} + \tan \frac{\pi}{4} \right] = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \right] = \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ मूल्य}$$

$$13 - \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx dy = \int_{-1}^1 \left[-\ln |1 + \cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[-\ln |1 + \cos \frac{\pi}{2}| + \ln |1 + \cos(0)| \right] dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[-\ln |1 + 0| + \ln |1 + 1| \right] dy = \int_{-1}^1 \left[\ln 1 + \ln 2 \right] dy$$

$$\int_{-1}^1 \ln 2 dy = \ln 2 \cdot y \Big|_{-1}^1 = \ln 2(1) - \ln 2(-1)$$

$$= \ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2$$

$$14 - \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx dy = \int_0^1 \left[\ln |1 + \sin x| \right]_0^{\pi} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\ln |1 + \sin \pi| - \ln |1 + \sin 0| \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\ln |1 + 0| - \ln |1 + 0| \right] dy = \int_0^1 \left[\ln 1 - \ln 1 \right] dy$$

$$= \int_0^1 0 dy = 0 \cdot y \Big|_0^1 = 0(1-0) = 0$$

$$15 - \int_0^{\frac{\pi}{5}} \int_{-1}^1 6 \cos 5x dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{5}} \left[6 \cos 5x \cdot y \right]_{-1}^1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{5}} 6 \cos 5x (1 - (-1)) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{5}} 6 \cos 5x \cdot (2) dx = 12 \int_0^{\frac{\pi}{5}} \cos 5x dx = \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{5}} \cos 5x \cdot 5 dx$$

$$\frac{12}{5} \sin 5x \Big|_0^{\frac{\pi}{5}} = \frac{12}{5} \left[\sin 5 \cdot \frac{\pi}{5} - \sin 5(0) \right]$$

$$= \frac{12}{5} [0 - 0] = \frac{12}{5} [0]$$

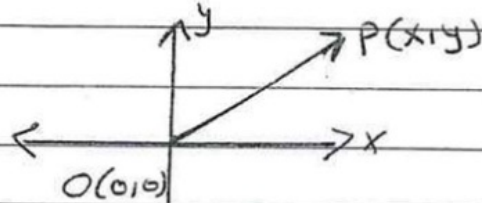
$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \int_0^1 3x^2 e^{x^3+1} dy dx &= \int_{-1}^1 3x^2 e^{x^3+1} \cdot y \Big|_0^1 dx \\
 &= \int_{-1}^1 3x^2 e^{x^3+1} (1-0) dx = \int_{-1}^1 3x^2 e^{x^3+1} dx = e^{x^3+1} \Big|_{-1}^1 \\
 &= e^{(-1)^3+1} + e^{(1)^3+1} = e^{-1+1} + e^{2} = e^0 + e^2 = 1 + e^2 \quad \text{ans}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx dy &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 x - 1) dx dy = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x dx dy - \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[-\cot x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] dy - \int_0^1 x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^1 \left(-\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} + \frac{\cos \frac{-\pi}{2}}{\sin \frac{-\pi}{2}} \right) dy \\
 &\quad - \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{0}{1} + \frac{0}{-1} \right) dy - \int_0^1 0 dy = \int_0^1 0 dy - \int_0^1 0 dy \\
 &= (0)y \Big|_0^1 - (0)y \Big|_0^1 = (0)(1-0) - (0)(1-0) = 0 \quad \text{ans}
 \end{aligned}$$

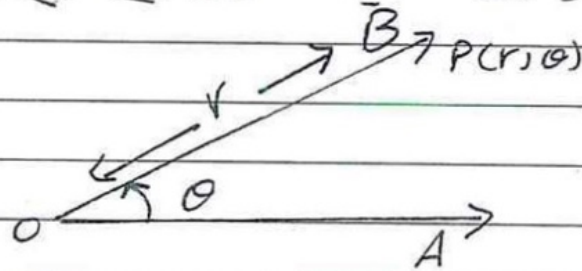
الفصل الثاني

الاهماليات القطبية

التمثيل القطبي: نعرفنا سابقا على كيفية تمثيل نقط (x, y) في المستوى الديكارتي بواسطة الاهماليات الديكارتية. هناك طريقة اخرى لتمثيل النقط بواسطة الاهماليات القطبية ونسبة التمثيل القطبي وتعتمد على المتغيرين (r, θ)

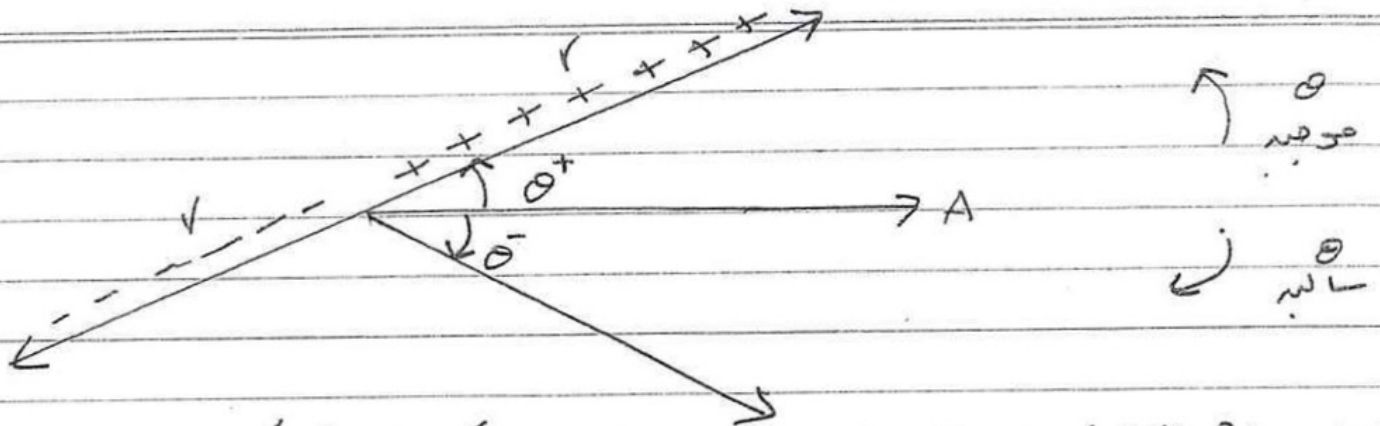


لنكن O أي نقط في المستوى ونمثل $\downarrow$ بنقط الاصل ونسبة القطب. سوف ندرس هنا بعض من القطب الى النقط A بين المحور القطبي او الشعاع الابتدائي هذا الشعاع متجه اليمين وباتجاه الموجب لمحور x لذلك كل نقط في المستوى سوف تتعين بالنسبة لـ O والشعاع OA . لنفرض ان B اية نقط في المستوى تختلف عن نقط الاصل O و r هو البعد من النقط O الى B هي الزاوية المحصورة بين المحور القطبي OA والشعاع OB باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة لذلك فلن B سوف تتعين بالمتغيرين r و θ حيث ان $r > 0$ و θ بين 0 و 2π اي $0 \leq \theta < 2\pi$, $r > 0$

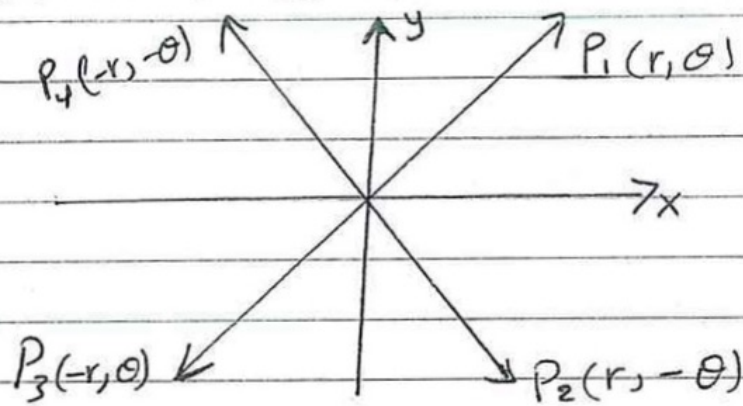


ملاحظات:

- 1- تدعى نقط الاصل في هذا النظام بالقطب ويرمز لها بـ O
- 2- يدعى محور x الموجب بالمحور القطبي
- 3- تمثيل النقط في المستوى يكون بشكل زوج مرتب من الاعداد الكسيفية ويؤخذ (r, θ) θ هي زاوية باتجاه معين من المحور القطبي r هي صافه باتجاه معين من نقط الاصل الى النقط معينه في المستوى
- 4- θ موجبه اذا فيست باتجاه لحركة عقرب الساعة معاكس
- 5- θ سالبه اذا فيست باتجاه عقرب الساعة
- 6- r موجبه اذا فيست على ضلع الزاويه
- 7- r سالبه اذا فيست على ضلع الزاويه وباتجاه معاكس

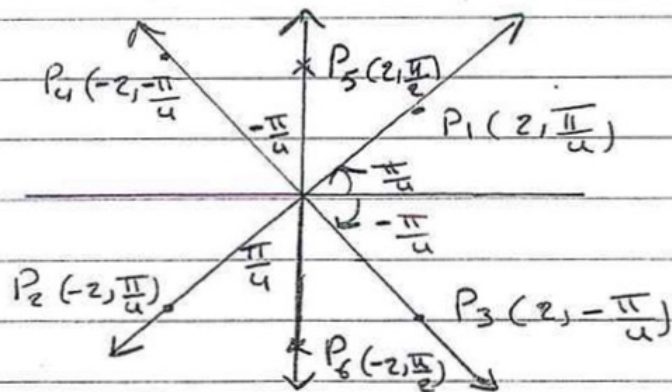


8- مواقع النقط في المستوى بصورة كالتالي تكون بالمثل
 $P_1(r, \theta)$, $P_2(r, -\theta)$, $P_3(-r, \theta)$, $P_4(-r, -\theta)$



مثال/ عين النقاط التالية

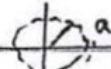
$P_1(2, \frac{\pi}{4})$, $P_2(-2, \frac{\pi}{4})$, $P_3(2, -\frac{\pi}{4})$, $P_4(-2, -\frac{\pi}{4})$, $P_5(2, \frac{\pi}{2})$, $P_6(2, \frac{3\pi}{2})$



ملاحظات

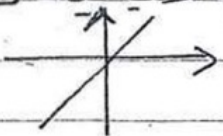
1- إذا كانت $r = 0$ لأي قيمة θ فإن النقط $(0, \theta)$ تمثل نقط الأصل

2- إذا كانت $r = a$ حيث a ثابت لكل قيم θ فإن المعادلة تمثل معادلة دائرة نصف قطرها a



نصف قطرها a

3- إذا كانت $\theta = A$ حيث A زاوية لأي قيم r فإن المعادلة تمثل معادلة مستقيم يمر من نقط الأصل



تجارب / الامم هايي

1- $r=a$

2- $r \leq 2$

3- $r > 2$

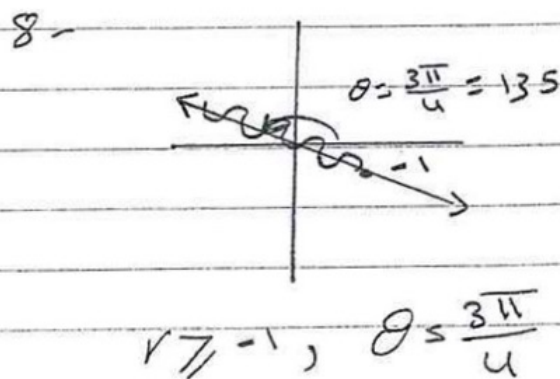
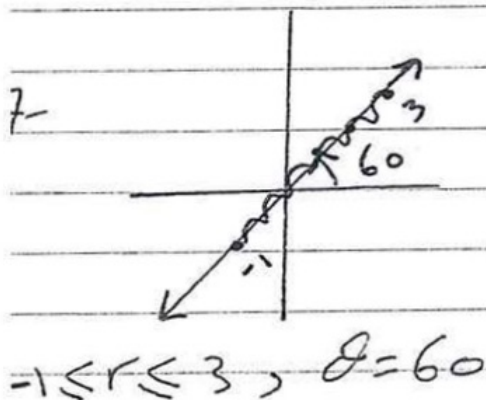
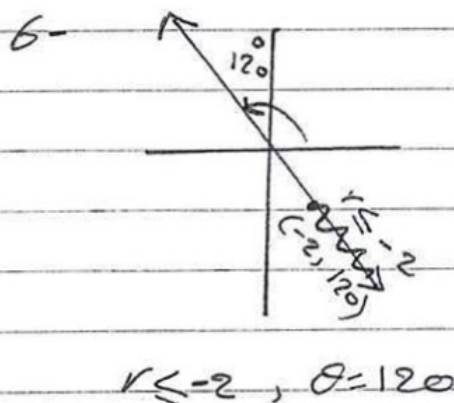
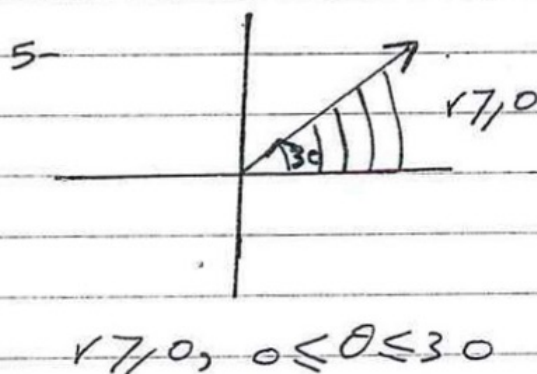
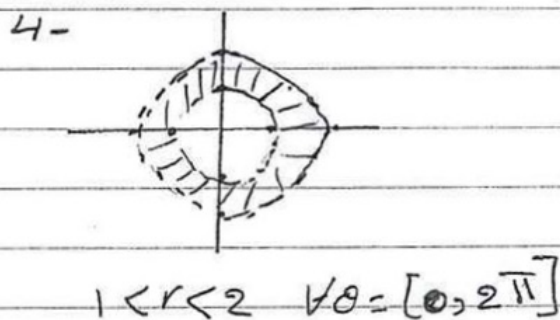
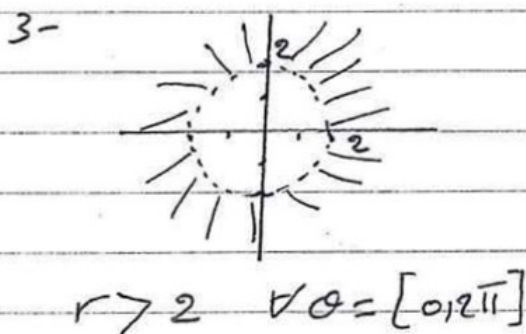
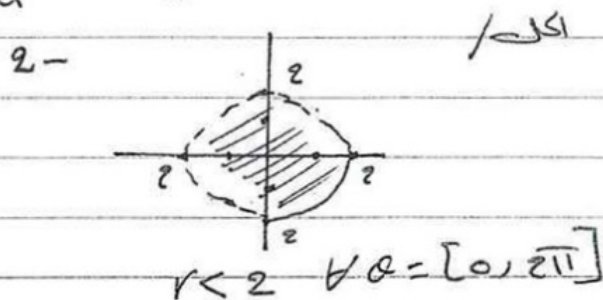
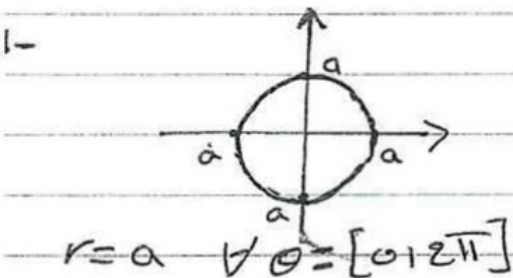
4- $1 < r \leq 2$

5- $0 \leq \theta \leq 30, r \geq 0$

6- $\theta = 120, r \leq -2$

7- $\theta = 60, -1 \leq r \leq 3$

8- $\theta = \frac{3\pi}{4}, r \geq -1$



الفصل الثاني

المحاضرة الرابعة

التحويل من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية وبالعكس

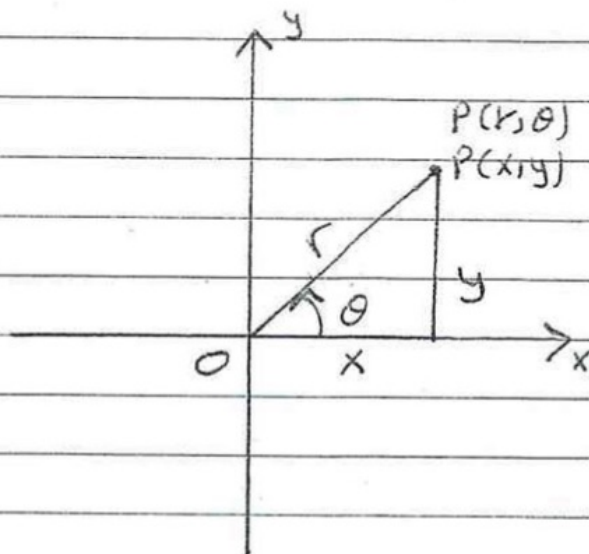
$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



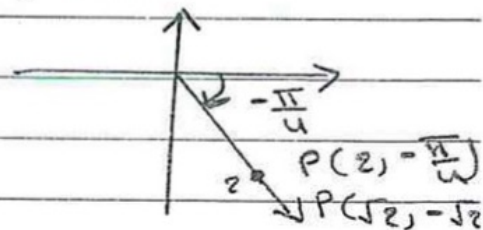
للتحويل من التمثيل القطبي إلى الديكارتى نستخدم العلاقات ①
للتحويل من الديكارتى إلى التمثيل القطبي نستخدم العلاقات ②

مثال / عين القطر تم تحويل الديكارتى لها $(2, -\frac{\pi}{4})$
النقط المعطاة بالتمثيل القطبي

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

∴ النقط بالتمثيل الديكارتى $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

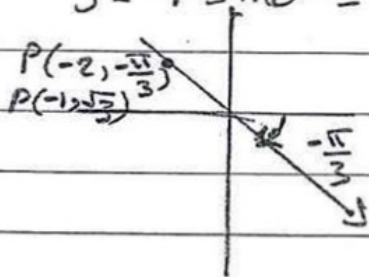


مثال 2 / عين القطر تم تحويل الديكارتى لها $(-2, -\frac{\pi}{3})$

$$x = r \cos \theta = -2 \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cos \left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$y = r \sin \theta = -2 \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

∴ النقط بالتمثيل الديكارتى $(-1, \sqrt{3})$

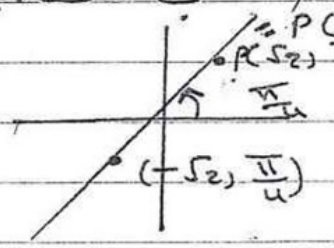


مثال 3- / عين النقط (1,1) ثم جد التمثيل القطبي لها

Sol $r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ $\therefore$ النقط بالتمثيل القطبي

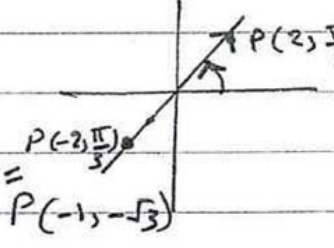


مثال 4- / عين النقط $(-1, -\sqrt{3})$ ثم جد التمثيل القطبي لها

Sol $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$(2, \frac{\pi}{3})$ $\therefore$ النقط بالتمثيل القطبي



ملاحظة / يمكن تحويل المعادلات القطبية الى معادلات ديكارتية وبالعكس باستخدام القواسم التالية للتحويل

مثال /

جد المعادلة القطبية للمعادلة الديكارتية $x^2 + y^2 - 4x = 0$

Sol $r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 4r \cos \theta = 0$

$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 4r \cos \theta = 0$

$r^2 - 4r \cos \theta = 0 \Rightarrow r(r - 4 \cos \theta) = 0$

$r = 0$ نقطة الازم or $r - 4 \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 4 \cos \theta$

معادلة النائرة بالصيغة القطبية

مثال 2- / جد المعادلة الديكارتية للمعادلة القطبية $r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 3$

Sol $r(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}) = 3$

$r(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta) = 3$

$\frac{1}{2} r \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \theta = 3$

$\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y = 3 \Rightarrow x + \sqrt{3} y = 6$ المعادلة بالصيغة الديكارتية

مثال ٢ / حل المعادلة البيكارتية المعادلة القطبية

$$r^2 = 2 \sin 2\theta$$

$$\text{Sol} \quad (r^2) = 2 \cdot (2 \sin \theta \cos \theta) \Rightarrow r^2 = 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$(r^2) = 4 \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{4xy}{r^2} \Rightarrow r^4 = 4xy$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4xy$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4xy = 0$$

بعض القواسم المهمة

$$① \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$② \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$③ \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$④ \cos(A \mp B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B$$

$$⑤ \sin(A \mp B) = \sin A \cos B \mp \cos A \sin B$$

$$⑥ \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad , \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \quad , \quad \cos 2\theta = -2\sin^2 \theta + 1$$

$$⑦ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$⑧ \sin 0 = \cos 90 = 0 \quad , \quad \cos 0 = \sin 90 = 1$$

$$⑨ \sin 60 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60 = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$⑩ \sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال 4 / جد المعادلة الكارتيزية للمعادلة القطبية

$$\text{أو } r^2 = 3 \cos 2\theta$$

$$(x^2 + y^2) = 3(2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$(x^2 + y^2) = 6 \cos^2 \theta - 3$$

$$(x^2 + y^2) = 6 \frac{x^2}{r^2} - 3 \Rightarrow \left[(x^2 + y^2) = 6 \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} - 3 \right] \cdot (x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 6x^2 - 3(x^2 + y^2)$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 6x^2 - 3x^2 - 3y^2$$

$$x^4 + y^4 + 3x^2 + 3y^2 + 2x^2y^2 = 0$$

مثال 5 / جد المعادلة القطبية للمعادلة الكارتيزية

$$(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$$

$$\left[r^2 = 4 \cdot r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta \right] \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$1 = 4 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

المصفوفات

تعريف / المصفوفة ترتيب منظم للكل من اعداد حقيقية او معقدة وتسمى هذه الاعداد اجزاء المصفوفة وتكون مرتبة في كل صفوفها وعمودها ونرمز للمصفوفة بالقوس $[]$ او $()$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

المصفوفات الخاصة

1- اذا كانت جميع عناصر المصفوفة اصفار نسمي المصفوفة الصفرية $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2- المصفوفة $B = b_{ij}$ سمى المصفوفة $m \times n$ نسمي مصفوفة مربع اذا كانت $m = n$ حين m عدد الصفوف و n عدد الاعمدة

سمى المصفوفة $n \times n$ هي عدد الصفوف والاعمدة ونرمز لها بالرمز $M \times n$

3- المصفوفة $1 \times n$ نسمي مصفوفة سطر $[1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n]$

4- المصفوفة $m \times 1$ نسمي مصفوفة عمود $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}$

5- المصفوفة المربع $A = a_{ij}$ نسمي مصفوفة متثلثة عليا اذا

كانت العناصر فوق القطر الرئيسي اصفار $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

ونسمي مصفوفة متثلثة عليا اذا كانت العناصر تحت القطر الرئيسي اصفار

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6- نسمي المصفوفة المربع التي تكون فيها العناصر المتناظرة مع القطر الرئيسي متساوية مصفوفة متناظرة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

7- نسمي المصفوفة القطرية $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ التي تكون متثلثة كل عنصر من

عناصر قطرها مساوية للواحد 1 ولها المصفوفة الحادية من الرتبة n وتقال معامل الواحد $(n$ دليل مصفوفة)

٨- صفوف المصفوفات / وهي المصفوفات الناتجة من تبديل الصفوف مع الأعمدة
 مثال / المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ صفوف المصفوفات $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و نرى
 صفوف المصفوفات A^T

ملاحظة / صفوف المصفوفات المتناظرة يساويها

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

٩- نقول للمصفوفة المربعة $A = a_{ij}$ التي تكون فيها جميع العناصر الواقعة على القطر
 الرئيسي متساوية أي $a_{ii} = c$ لكل $i = j$ وأن $a_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$
 بالتحديد $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات /

١- جمع المصفوفات إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الصف $m \times n$
 فإن حاصل جمع A و B هو المصفوفة $A + B = C$
 أي حصلنا على C بجمع العناصر المتناظرة من A و B

مثال / لنأخذ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

ملاحظة / خواص الجمع المصفوفي :-

$$A + B = B + A \quad -P$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad -U$$

$$A + 0 = A \quad -D$$

$$A + (-A) = 0 \quad -S$$

٢- الضرب العددي إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الصف $m \times n$ وكان r
 عدداً حقيقياً فإن المضاعف العددي للمصفوفة A في r ، rA هو المصفوفة
 $B = [b_{ij}]$ من الصف $m \times n$ حيث $b_{ij} = r \cdot a_{ij}$ أي حصلنا على B بضرب
 كل عنصر من عناصر A في r

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال / إذا كانت $r = -3$ وكانت

$$rA = \begin{bmatrix} -12 & 6 & -9 \\ -6 & 15 & 0 \\ -9 & -18 & 6 \end{bmatrix} \quad 2$$

ملاحظة: خواص ضرب المصفوفات /

ليكن كل من r و s أعداد حقيقية وكل من A و B مصفوفتين طابقتين

$$r(sA) = (rs)A \quad -P$$

$$(r+s)A = rA + sA \quad -U$$

$$r(A+B) = rA + rB \quad -D$$

$$A(rB) = r(AB) = (rA)B \quad -S$$

٤- ضرب المصفوفات /

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من المصفوفات $m \times p$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من المصفوفات $p \times n$ فإن جداء المصفوفات A و B هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ من المصفوفات $m \times n$ والمعرف بالمصفوفة

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

$$\text{حيث } (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

يجب أن نتحقق القاعدة

عدد الأعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

$$\text{مثال / } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(-2) + (2)(4) + (-1)(2) & (1)(5) + (2)(-3) + (-1)(1) \\ (3)(-2) + (1)(4) + (4)(2) & (3)(5) + (1)(-3) + (4)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ملاحظة: خواص ضرب المصفوفات

إذا كانت A و B و C مصفوفات أصنافها مناسبة طابقتين

$$A(BC) = (AB)C \quad (P)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad (U)$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad (D)$$

ملاحظة: خواص منقول المصفوفة

ليكن كل من A و B مصفوفة وليكن r عدد حقيقي طابقتين

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (E)$$

$$(A^T)^T = A \quad (F)$$

$$(rA)^T = rA^T \quad (S)$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad (U)$$

اصول على الخصائص / لتسا
 $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $r=2$, $s=-3$ بين ما يلي:-

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (1)
 طرف (1) $A + (B + C)$
 $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$
 $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
 طرف (2) $(A + B) + C$
 $= \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
 - طرف (1) = طرف (2)

$r(SA) = (rS)A$ (2)
 طرف (1) $r(SA)$
 $= 2(-3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix})$
 $= 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -12 & -18 \end{bmatrix}$
 طرف (2) $(rS)A$
 $= ((2)(-3)) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
 $= -6 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -12 & -18 \end{bmatrix}$

$(A + B)C = AC + BC$ (3)
 طرف (1) $(A + B)C$
 $= \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15-2 & -3+3 \\ 30-6 & 6+9 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -17 & 0 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$
 طرف (2) $AC + BC$
 $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 10+6 & 2+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15-4 & -3+6 \\ 20+0 & 4+0 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 16 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -19 & 3 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 0 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$
 - طرف (1) = طرف (2)

$(A^T)^T = A$ (4)
 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (5)
 طرف (1) $(A \cdot B)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right)^T$
 $= \begin{bmatrix} 0-4 & 0+0 \\ -6+12 & 4+0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^T$
 $= \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
 طرف (2) $B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T$
 $= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0-4 & -6+12 \\ 0+0 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
 - طرف (1) = طرف (2)

$(rA)^T = rA^T$ (6)
 طرف (1) $(rA)^T = \left(2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}^T$
 $= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
 طرف (2) $r \cdot A^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T$
 $= 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
 - طرف (1) = طرف (2)

المحاضرة السادسة

المحددات / محدد التاليف

تعريف / لنكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الصف $n \times n$ يعرف $|A| = \det(A)$

$$\det(A) = |A| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

حيث $j_1, j_2, \dots, j_n$ هي محددات المصفوفات المربعة فقط أي 1×1 أو 2×2 أو 3×3 أو $\dots$ و $j_1, j_2, \dots, j_n$ وليست مصفوفة

مثال / إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الصف 1×1 فإن قاعدة $|A| = a_{11}$ (أي العنصر يقع بين قوسين)

مثال 2 / إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مصفوفة من الصف 2×2 قاعدة

فإن $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}$ (أي ضرب عناصر القطر الرئيسي - حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي)

مثال / إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ محدد

$$|A| = (2)(5) - (-3)(4) = 22$$

مثال 3 / إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ مصفوفة من الصف 3×3 قاعدة

لغرض حساب $|A|$ توجد طريقتان (طريقة الأقطاب) في هذه الطريقة نضرب العنصرين الأول والثاني في اليسمين من المصفوفة ثم نضرب الأقطار من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين (القطر الرئيسي) بسلسلة موجبة ومن أعلى اليمين إلى أسفل اليسار (القطر الثانوي) بـ إشارة سالبة ثم جمع خواصل الضرب

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال / حسب محدد المصفوفة بطريقة الأقطاب

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-3)(1)(3) + (-1)(0)(1) + (2)(-2)(2) - (2)(1)(1) - (-3)(0)(2) - (-1)(-2)(3) = -9 - 8 - 2 - 6 = -25$$

٥) طريقة السباديل

- ١) نوزع الاشارات بالتتابع على عناصر الصف الاول في المصفوفة
- ٢) نأخذ العنصر مع اشارته ونخل الصف والعمود الذي يحتويه
- ٣) نحل عايقه من المصفوفة في كل مرة مضروباً بالعنصر الذي أخذناه بحيث يكون الكثر النهائي من المصفوفة هي مصفوفة من الرسم 2×2 والتي نحسب قيمه محددها بطرح حاصل ضرب القطر اليمين من حاصل ضرب القطر اليسار

ملاحظه / محدد المصفوفه موجب

مثال / $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ محدد $|A|$ بطريقة السباديل

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(3) - (-1)(-6) + (2)(-5) = 9 - 6 - 10 = -7$$

خواص المحددات /

١) اذا كانت A اي مصفوفه مربعه تحتوي على صف او عمود عناصره

اصفار فان $\det(A) = |A| = 0$

٢) اذا كانت A مصفوفه مثلثيه عليا او سفلى فان $\det(A)$ هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس للمصفوفه

٣) اذا كانت B مصفوفه ناتجه من ضرب المصفوفه A بعدد وليكن

$$k \text{ فان } \det(B) = k \det(A)$$

٤) اذا كانت B مصفوفه ناتجه من ابدال صفوف المصفوفه A فان

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \quad (5)$$

$$|A+B| \neq |A| + |B| \quad (6)$$

ام ب الحمد للمصفوفات الان

Sol:

$|A| = 0$ (مصفوفة خاصة)

لنتك
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Sol

$|B| = -1 * 2 * 3 = -6$ (مصفوفة خاصة)

لنتك
 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

لنتك
 $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Sol ①

طريقة ١

$$|A \cdot B| = \left| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 0-1 & 0-0 \\ -4+3 & 8+0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 0 = -8$$

طريقة ٢
 $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$|A+B| \neq |A| + |B|$

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - -2 = +2$

$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$

$\therefore |A| \cdot |B| = +2 * -4 = -8$

نتيجة = نتيجة

Sol ②

طريقة ١

$$|A+B| = \left| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right| = -6 - 9 = -15$$

طريقة ٢

$$|A| + |B| =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0-2) + (0-4)$$

$$= (-2) + (-4) = -6$$

نتيجة ١ $\neq$ نتيجة ٢

الفارسي

2) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

find $A+B$, $A-B$, $4B-2A$, $4A$ تم بحمد الله
 ان امكن اكتبه هنا ؟

Sol
 $A+B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

$A-B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

$4B-2A = \begin{bmatrix} 12 & -16 & 4 & 8 \\ 4 & 20 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 12 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & -16 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 10 & -20 & 6 & 8 \\ -4 & 20 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

$4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 16 & 0 & 8 & 4 \\ 8 & -20 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

5) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Find $(A \cdot B) \cdot C$

Sol
 $(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+4 & 4+2 \\ 1+6 & -4+3 \\ -3+0 & 12+0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -1 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+12 & 0+18 \\ 7-2 & 0-3 \\ -3+24 & 6+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 18 \\ 5 & -3 \\ 21 & 36 \end{bmatrix}$

المحاضرة السادس العمل الرابع المحتملات

كل متجه في المستوى الديكارتي يمثل بسهم ويكون طول السهم هو طول المتجه واتجاه السهم يمثل اتجاه المتجه ولكل متجه نقطته بداية ونهاية وهذه النقاط هي إحداثيات في المستوى أو الفضاء الذي يقع فيه المتجه. فمثلاً تعتبر الكميات الفيزيائية كسر ما عطا مقدار لها بدلالة وحدة معينة مثل الكتلة والطول. وهناك بعض الكميات يكون فيها الاتجاه مختصراً مهم للمقدار مثل السرعة والقوة، ونرمز للمتجه عادة بحرف $\vec{v}$ ←

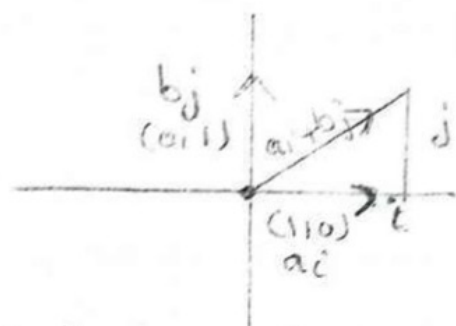
بعض الحواشي والتعاريف الأساسية /

- 1- يكون المتجهان متساويين إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه.
- 2- المتجه الصفرى هو المتجه الذي طول له يساوي صفر ويرمز له بالرمز (0) .
- 3- متجه الوحدة هو المتجه الذي طول له يساوي وحدة واحدة ويرمز له (u) .
- 4- المتجه $(\vec{v})$ هو طول المتجه $\vec{v}$ مضروباً في C حيث C ثابت يأخذ نفس الاتجاه إذا كان C ايجابياً صفر وعكس الاتجاه إذا كان C أقل من صفر.



- 5- أي متجه في المستوى هو عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (a, b) حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ويمثل $\vec{v}$ المتجه من نقطة الأصل O إلى النقطة (a, b) ويمكن كتابته $\vec{v} = (a, b)$. نلاحظ أن متجه الوحدة يرسم من نقطة الأصل $(0,0)$ إلى النقطة $(1,0)$ على محور X ويرمز له بالرمز (i) ومتجه الوحدة من نقطة الأصل إلى النقطة $(0,1)$ على محور Y ويرمز له بالرمز (j) . نلاحظ أن (i, j) هما متجهين متعامدين في المستوى الشاكي حيث $(1,0) \cdot (0,1) = 0$ أي أن (a, b) متجه طوله (a) واتجاهه لليمين إذا كان $a > 0$ ولليسار إذا كان $a < 0$ وكذلك $(0, b)$ متجه طوله (b) ويرسم للدلالة إذا كان $b > 0$ وللأسفل إذا كان $b < 0$ ويرسم a على محور X و b على محور Y أو ما يوازيهما

$$\begin{aligned}
 OP = V &= (a, b) \\
 &= (a, 0) + (0, b) \\
 &= a(1, 0) + b(0, 1) \\
 &= ai + bj
 \end{aligned}$$



أو قد نعرف المتجه في المستوى هو

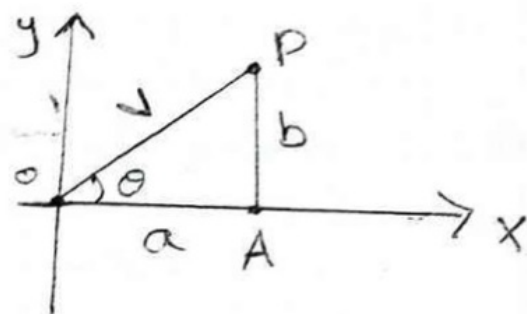
$$OP = V = (a, b) \iff V = ai + bj$$

6- للتصير بين النقط والمتجه فان $V(a, b)$ نقطه و $V = (a, b)$ متجه

طول المتجه واتجاهه في المستوى / ① المتجه المنطلق من نقطه الاصل و ياتي بنقطه بالمتجه

ليكن $V = (a, b)$ متجه و θ الزاويه التي يصنعها V مع محور X فان طول المتجه V يكتب بالشكل $|V|$ وبقدر طول المتجه V و ياتي في المثلث القائم الزاوي OPA حسب نظريه فيثاغورس

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{طول المتجه } V$$



$$\text{dir}(V) \quad \text{واتجاه المتجه } V \text{ يكتب بالشكل}$$

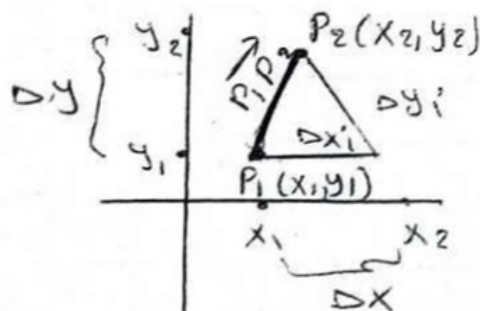
$$\text{dir}(V) = \tan \theta = \frac{b}{a} \quad \text{اتجاه المتجه } V$$

طول المتجه واتجاهه بالمستوي / ② المتجه الواقع بين نقطتين P_1, P_2 بالمستوي

$$\begin{aligned}
 P_1 P_2 &= \Delta x i + \Delta y j \\
 &= (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j
 \end{aligned}$$

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{مسافة او طول المتجه } P_1 P_2$$



$$\text{dir } |P_1 P_2| = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{اتجاه المتجه } P_1 P_2$$

خواص المتجهات في المستوى /
ليكن V_1 و V_2 متجهان في المستوى بحيث

$$V_1 = (a_1, b_1) \Leftrightarrow V_1 = a_1 i + b_1 j$$

$$V_2 = (a_2, b_2) \Leftrightarrow V_2 = a_2 i + b_2 j$$

① جمع المتجهات /

$$V_1 + V_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_3, b_3)$$

② طرح المتجهات /

$$V_1 - V_2 = (a_1, b_1) - (a_2, b_2)$$

$$= (a_1 - a_2, b_1 - b_2) = (a_3, b_3)$$

③ ضرب المتجه في ثابت /

ليكن $V = (a, b)$ متجه و c ثابت

$$cV = c(a, b) = (ca, cb)$$

$$|cV| = c|V|$$

④ تساوي المتجهات /

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

⑤ تقاطع المتجهات /

$$V_1 \parallel V_2 \Leftrightarrow V_1 = cV_2$$

$$\Leftrightarrow (a_1, b_1) = c(a_2, b_2)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = ca_2 \wedge b_1 = cb_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = c \wedge \frac{b_1}{b_2} = c$$

$$\therefore V_1 \parallel V_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = c$$

⑥ المتجه الصفري /

$$V = (a, b) = 0 \Rightarrow |V| = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

$$V = (a, b) = 0 \Leftrightarrow V = 0i + 0j \text{ or } V = (0, 0)$$

المخاضة الثانية مع الـ الرابع

$$U = \cos \theta i + \sin \theta j$$

معنى الوحدة U في المستوى يكون بالمثل

ليكن U متجه الوحدة في الزاوية التي يصنعها متجه الوحدة U مع محور X

$$U = x i + y j$$

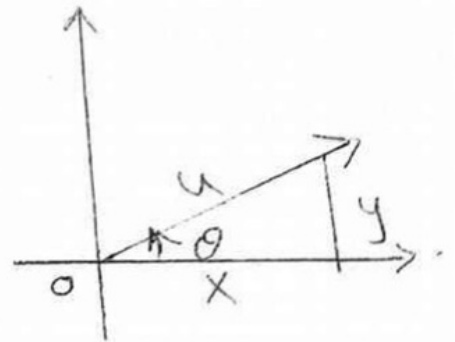
$$|U| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$x = r \cos \theta = \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = \sin \theta$$

$$U = \cos \theta i + \sin \theta j$$

$$|U| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$$



U هو متجه الوحدة

مثال / معنى الوحدة U الذي له نفس اتجاه المتجه V حيث ان

$$V = a i + b j$$

$$\therefore V = a i + b j \Rightarrow \text{dir } V = \frac{b}{a}$$

$$\text{Let } u = \frac{V}{|V|} = \frac{a i + b j}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} i + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} j$$

$$|u| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{1} = 1$$

U هو متجه الوحدة

$$\text{dir } u = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{b}{a}$$

U هو نفس اتجاه V

$$\therefore u = \frac{V}{|V|}$$

مثال / يمكن
 $\vec{P_1 P_2} = \vec{P_2 P_1}$
 $\vec{P_1 P_2} = \vec{P_2 P_1}$
 $\vec{P_1 P_2} = \vec{P_2 P_1}$
 $\vec{P_1 P_2} = \vec{P_2 P_1}$

Sol
 $\vec{P_1 P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = (-4 - 2)\mathbf{i} + (2 - 0)\mathbf{j} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$\vec{P_2 P_1} = (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j} = (2 + 4)\mathbf{i} + (0 - 2)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$\vec{P_1 P_2} + \vec{P_2 P_1} = (-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = (-6 + 6)\mathbf{i} + (2 - 2)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 0$
 المتجه الصفرى

$|\vec{P_1 P_2}| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

$\text{dir}(\vec{P_1 P_2}) = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

مثال / حدد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Sol $V = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$u = \frac{V}{|V|} \Rightarrow u = \frac{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$

$|u| = \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$

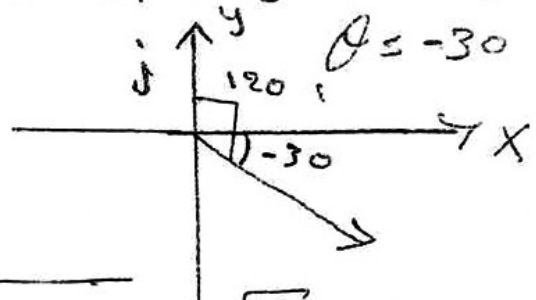
ن u هو متجه وحدة

$\text{dir}(u) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = -\frac{2}{3}$

$\text{dir}(V) = -\frac{2}{3}$

u له نفس اتجاه V

سؤال / حدد متجه الوحدة الناتج من تدوير المتجه $\vec{u}$ بمقدار (120°) باتجاه عقارب الساعة؟
 حل / التدوير المتجه $\vec{u}$ باتجاه عقارب الساعة بمقدار (120°) يعطي متجه $\vec{v}$



$$\begin{aligned} \vec{u} &= \cos(-30^\circ)\vec{i} + \sin(-30^\circ)\vec{j} \\ &= \cos 30^\circ\vec{i} - \sin 30^\circ\vec{j} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \end{aligned}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$\vec{u}$ هو متجه الوحدة المطلوب

سؤال / حدد المتجه $\vec{OP}$ حيث O نقطة الأصل و P نقطة التقاطع للمتجه $\vec{P_1P_2}$ اذا علمت ان $P_1(2, -1)$ ، $P_2(-6, 3)$ ؟

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{2+(-6)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = P(-2, 1) \Rightarrow \vec{OP} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

واجب / (أ) اذا كانت $\vec{u} = 2\vec{j}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$ ، $\vec{w} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$

$$\vec{u} \neq (\vec{v} + \vec{w}) \quad \vec{u} = 2\vec{j} \quad \vec{v} + \vec{w} = 4\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{i} + 5\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

(ب) حدد طول كل متجه والزوايا والاتجاه

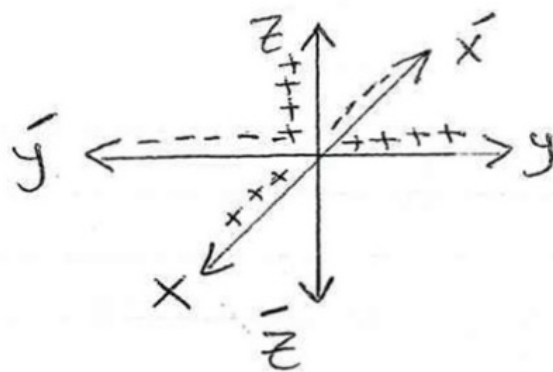
$$\vec{u} = 2\vec{j} \quad \vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j} \quad \vec{w} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$$

المعادنات في الفراغ

الاعدادات في الفراغ الثلاثي (الفراغ) /

النظام الديكارتي في الفراغ /

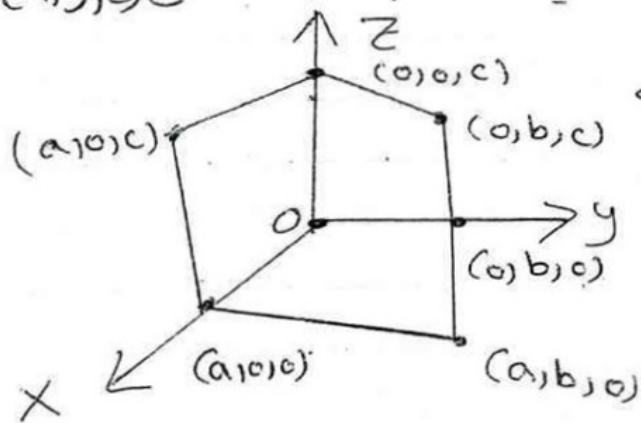
هناك ثلاثة مستويات في الفراغ هي المستوي XY ، XZ ، و YZ .
 تسمى المستويات الاعدادية . كل اثنان منها متعامدان اي ان
 $XY \perp XZ$ و $YZ \perp XZ$. وكل مستويين منها يتقاطعان بخط مستقيم وهو
 التقاطع لكل مستويين هي XX' و YY' و ZZ' ونقول خطوط التقاطع
 بالمتوازيات العددية وهذه المتوازيات تكون كل اثنان منها متعامدان اي
 ان $XX' \perp YY'$ و $YY' \perp ZZ'$ و كذلك تقاطع في نقطة واحدة تحت
 نقطة الاصل O على الرسم



شكل يو بين الاتجاه الموجب والسلب
 للمتوازيات في الفراغ الثلاثي

نقطة في الفراغ /

هي ثلاثي مرتب من الاعداد الحقيقية وتكتب بالمثل $P(x,y,z)$
 حيث x, y, z اعداد حقيقية
 ونلاحظ ان المستويات العددية المتوازية
 تقسم الفراغ الى اجزاء
 لذلك لا يمكن ان يكون في الفراغ (8) المتواليات
 وهي :-

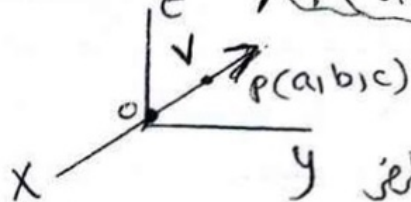


$P_1(a,b,c)$, $P_2(a,b,-c)$, $P_3(a,-b,c)$
 $P_4(-a,b,c)$, $P_5(a,-b,-c)$, $P_6(-a,-b,c)$
 $P_7(-a,b,-c)$, $P_8(-a,-b,-c)$

المختصات في الفراغ /

المعبر في الفراغ الثلاثي هو ثلاثي مرتب من الاعداد الحقيقية وتكتب

$V = (a,b,c)$ حيث a, b, c اعداد حقيقية (اي ان المعبر V يمثل)
 المتجه من نقطة الاصل O الى النقطة $P(a,b,c)$



اي ان $OP = V = (a,b,c)$
 * فمعبر الوحدة من نقطة الاصل O الى
 النقطة $(1,0,0)$ على محور X ونرمزه بالمثل i

* الوحدة من نقطة الأصل إلى النقطة (a, b, c) على محور z نرسم
 * بالرمز $\vec{V}$ الوحدة من نقطة الأصل إلى النقطة (a, b, c) على
 محور z نرسم بالرمز $\vec{V}$ وهذه المتجهات + المحاور الثلاثة
 في الفراغ الثلاثي

$$\vec{OP} = \vec{V} = (a, b, c) \Leftrightarrow \vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$|\vec{OP}| = |\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{طول المتجه}$$

$$\text{dir } \vec{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad \text{الاتجاه المتجه بالفراغ}$$

المتجه الواصل بين نقطتين في الفراغ

نستعين $\vec{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ $\vec{P}_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{P_1P_2} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

or $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

هذا هو الطول بين نقطتين في الفراغ

مثال / اوجد $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ طول واتجاه المتجه

Sol

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{dir } \vec{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

خواص المتجهات في الفضاء الثلاثي
 ليكن V_1 و V_2 متجهان بالفضاء بحيث ان

$$V_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow V_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

$$V_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow V_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

(1) جمع المتجهات /

$$V_1 + V_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$V_1 - V_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \quad \text{(2) طرح المتجهات /}$$

(3) ضرب المتجه بثابت /
 ليكن $V = (x, y, z)$ و c ثابت
 $cV = c(x, y, z) \Rightarrow (cx, cy, cz)$
 $|cV| = c|V|$

(4) تساوي المتجهات /

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$$

(5) توازي المتجهات /

$$V_1 \parallel V_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = c$$

(6) المتجه الصفري /

$$V = (x, y, z) = 0 \Rightarrow |V| = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$$

$$V = (x, y, z) = 0 \Leftrightarrow V = 0i + 0j + 0k$$

ثابت /
 $V_2 = 2i - 3j - \sqrt{5}k$ و $V_1 = 2i + 3j + \sqrt{5}k$ کے لیے
 $V_1 - V_2$ و $V_1 + V_2$ →

Sol

$$V_1 + V_2 = (2i - 2i) + (3j - 3j) + (\sqrt{5}k - \sqrt{5}k) \\ = 0i + 0j + 0k = 0$$

$$V_1 - V_2 = (2i - (-2i)) + (3j - (-3j)) + (\sqrt{5}k - (-\sqrt{5}k)) \\ = 4i + 6j + 2\sqrt{5}k$$

؟ CV و $V = 5i + 2\sqrt{3}j + 6k$ ، $C = \sqrt{3}$ کے لیے / $\sqrt{3}$

Sol

$$CV = \sqrt{3} \cdot 5i + 2 \cdot \sqrt{3} \sqrt{3}j + 6\sqrt{3}k \\ = 5\sqrt{3}i + 6j + 6\sqrt{3}k$$

$V_2 = 4i + 2j + 5k$ و $V_1 = 8i + 4j + 10k$ کے لیے / $\sqrt{3}$

؟ $V_2 = V_1$ و $V_1 \parallel V_2$ ہے

Sol

$$V_1 \neq V_2$$

$$V_1 \parallel V_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5} = 2 = C$$

∴ المتجهات متناسبات

$V_2 = i + 2j + 3k$ و $V_1 = i + 2j + 3k$ / $\sqrt{4}$

واجب ؟ $V_1 \parallel V_2$ و $V = V_2$ ہے

المراجعة الخامسة الفصل الرابع ضرب المتجهات في الفراغ الثلاثي

هناك نوعان لضرب المتجهات هما:

- 1- الضرب العددي / ناتج الضرب ياتي عددي
- 2- الضرب الاتجاهي / ناتج الضرب ياتي متجه

1- الضرب العددي / ليكن كل من A و B متجهان في الفراغ الثلاثي وليكن θ الزاوية المحصورة بين المتجهين $\rightarrow$ فان الضرب العددي لمتجهين A و B يعرف بالكل التالي

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} \quad \text{لحساب الزاوية } \theta \text{ نستخدم}$$

or $A = a_1 i + b_1 j + c_1 k, B = a_2 i + b_2 j + c_2 k \Rightarrow$

$$A \cdot B = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad \text{نستخدم هذا القانون اذا لم يطلب الازاوية}$$

هوا ضرب العددي /

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (2)$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad (3)$$

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot (C + D) + B \cdot (C + D) \quad (4)$$

$$= A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

$$(A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0) \quad \text{(اي ان الزاوية بين } A \text{ و } B \text{ هي } \theta = \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

$$i \perp j \perp k \Rightarrow i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0 \quad (6)$$

$$A \cdot A = |A|^2 \quad (7)$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad (8)$$

مثلاً 1.1 کا ہے $A = i + j + k$ ، $B = i + 2j + k$ اور θ ان دو سمتوں کے درمیان کا زاویہ ہے۔

Sol

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|}$$

$$|A| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|B| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore A \cdot B = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 1) = 4$$

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{3} \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \right)$$

مثلاً 1.2 کا ہے $A \cdot B$ اور θ ان دو سمتوں کے درمیان کا زاویہ ہے۔
 $\vec{B} = (0, 1, -2)$ ، $\vec{A} = (1, 2, 3)$

Sol

$$A \cdot B = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -4$$

مثلاً 1.3 کا ہے $A \cdot B$ اور θ ان دو سمتوں کے درمیان کا زاویہ ہے۔
 $A = i + j + k$ ، $B = i + j + k$ ، $\theta = 60^\circ$

Sol

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثلاً 1.4 کا ہے $A \cdot B$ اور θ ان دو سمتوں کے درمیان کا زاویہ ہے۔
 $B = 2i$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $A = 2i + 2j + 3k$

Sol

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \Rightarrow$$

$$|A| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} \text{ ، } |B| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\therefore A \cdot B = \sqrt{17} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اذا كانت $A = i + j$ و $B = i$ هل $A \cdot B$ في جبر الزاوية؟

Sol

$$A \cdot B = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

$$A \cdot B = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$$

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| \cdot |B|}$$

$$|A| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}, \quad |B| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

تجريب / وافية

هل $A \cdot B$ والزاوية θ التي بين A و B لها ياتي؟

$$B = 5i + k \quad \text{و} \quad A = 3i + 2j \quad -1$$

$$B = 5j - 3k \quad A = i \quad -2$$

$$B = 2j \quad A = 3i - 2j \quad -3$$

$$B = 52i + 53j + 2k \quad A = -i + j \quad -4$$

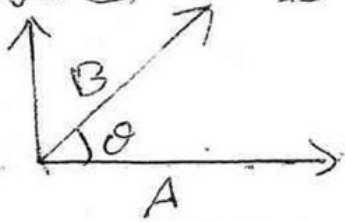
المحاضرة الحادية عشر

الفصل الرابع

الضرب الاتجاهي / ليس كل من A, B متجهان في الفراغ ولكن θ الزاوية المحصورة بين A, B حيث $0 \leq \theta \leq \pi$ فإن المقياس A, B يعطيان مستوى فإذا كان n هو متجه عمودي على هذا المستوى الممتد من A, B فإن الضرب الاتجاهي لـ A, B هو

$$A \times B = \vec{n} |A| |B| \sin \theta$$

حيث n هو متجه وحدة عمودي على المستوى الممتد من A, B ، $0 \leq \theta \leq \pi$



or $A = a_1 i + b_1 j + c_1 k$, $B = a_2 i + b_2 j + c_2 k$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) i - (a_1 c_2 - c_1 a_2) j + (a_1 b_2 - b_1 a_2) k$$

هو الضرب الاتجاهي /
ليس كل A, B, C, D متجهات فإن

$$① A \times B \neq B \times A$$

$$② A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

$$③ (A + B) \times (C - D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$$

$$④ A \times A = 0$$

$$⑤ i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$⑥ i \times j = -j \times i = k , i \times k = -k \times i = j , j \times k = -k \times j = i$$

فارسی

Sol

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \times 1 - 0 \times 1) - \hat{j}(1 \times 1 - 0 \times 0) + \hat{k}(1 \times 1 - 0 \times 0)$$
$$= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$B = 2k + j - i$, $A = 2i + j - k$ $\therefore$ $|A \times B|$ is $\underline{\quad}$

sol

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \times 2 - (-1) \times 1) - \hat{j}(2 \times 2 - (-1) \times (-1)) + \hat{k}(2 \times 1 - (-1) \times 1)$$
$$= \hat{i}(2+1) - \hat{j}(4-1) + \hat{k}(2+1)$$
$$= 3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

3/ حدد المتجه $\vec{n}$ اذا كان $A = i + j$, $B = k + j$ sd
 وبين ان $\vec{n}$ عمود على AB وحدة ؟

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n} |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} \quad , \quad |A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i(1) - j(1) + k(1) = i - j + k$$

$$\therefore A \times B = \vec{n} |A| |B| \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = \vec{n} \quad \cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = \vec{n} \sqrt{3} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\hat{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{3}}$$

نعم $\vec{n}$ متجه وحدة $\perp$ على المطينين

$$|\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

بعد المعطيات $\vec{n}$ اذا كان $A=k$ و $B=j+k$ $\vec{n}$ متجه الوحدة

sol

$$A \times B = \vec{n} |A| |B| \sin \theta$$

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|}, \quad |A| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \times 1 - 1 \times 1) - \vec{j}(0 \times 1 - 1 \times 0) + \vec{k}(0 \times 1 - 0 \times 0)$$

$$= -\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = -\vec{i}$$

$$\Rightarrow A \times B = |A| |B| \sin \theta$$

$$\Rightarrow A \times B = \vec{n} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow A \times B = \sqrt{2} \vec{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow -\vec{i} = \vec{n} \Rightarrow \vec{n} = -\vec{i}$$

نعم $\vec{n}$ متجه وحدة $\perp$ على المطينين

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$$

حواشٍ مهم كل باقى المسئلة :-
 (1) اذا كان المطلوب هو المتجه العمودي ولم يذكر كون متجه
 اي متجه وحدة فالقانون يستخدم

المتجه المطلوب $\vec{u} = \frac{A \times B}{|A \times B|}$

(2) اذا طلب ص.م Δ متجه من متجهين متعامدين

$$\vec{A} = \frac{1}{2} |A \times B|$$

15. $\vec{u}$ هو المتجه العمودي على كل من A, B إذا كانت
 $B = -i + 4j + 2k$ و $A = 2i - 3j + k$

Sol

المتجه
العمودي $U = \frac{A \times B}{|A \times B|}$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i^+ & j^- & k^+ \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = i(-6-4) - j(4-(-1)) + k(8-3) \\ = -10i - 5j + 5k$$

$$|A \times B| = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{100 + 25 + 25} = \sqrt{150}$$

$$\therefore U = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{-10i - 5j + 5k}{\sqrt{150}} = \frac{-10}{\sqrt{150}}i - \frac{5}{\sqrt{150}}j + \frac{5}{\sqrt{150}}k$$

هل A و B متعامدان؟
 المتجه $A = i + 4j$ المتجه $B = j + k$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} |A \times B|$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i^+ & j^- & k^+ \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k$$

$$|A \times B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

$$A = \frac{1}{2} |A \times B| \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وحدة}$$

المحاضرة الثانية عشر الفصل الخامس

المعادلات الوسيطة

إن الصيغة العامة لمعادلة المنحنى هي $P(x, y) = 0$ أو $y = f(x)$ أو $x = g(y)$ وهذه معادلات بيانية صار جسم معين للموقع الثاني (x, y) حيث كل من x و y هي صاغة يعتمد عليها الجسم خلال حركته لكن في احيان اخرى لا تظهر المعادلة بهذه الصيغة وانما تظهر معقدة على متغير جديد مثل $y = h(x)$ او $x = g(t)$ حيث ان t هو متغير وسيط يربط x مع y يمكن الاستغناء عنه والعودة للمعادلة الاصلية.

مثال/ جسم يتحرك على المنحنى $y = t^2 - 2t + 3$ $x = t - 1$ في المعادلة الكارتيزية التي تمثل مسكه هذا الجسم ثم ارسم مساره ودر الموقع عند $t = 0$

sol

$$x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1$$

$$y = t^2 - 2t + 3 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3$$

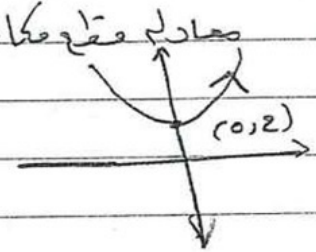
$$\Rightarrow y = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 3 \Rightarrow y = x^2 + 2$$

معادلة قطع مكافئ

$$t = 0 \Rightarrow x = t - 1 \Rightarrow x = 0 - 1 \Rightarrow x = -1$$

$$y = t^2 - 2t + 3 \Rightarrow y = 0 - 0 + 3 \Rightarrow y = 3$$

الموقع عند الانطلاق $(-1, 3)$



مثال/ جد معادلة المنحنى $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $a > b$, $a, b > 0$ و θ الكوسيط ؟

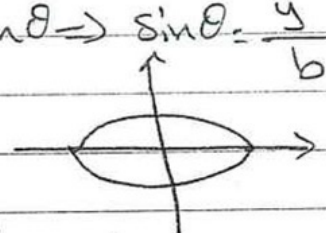
sol

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore x = a \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{a} , \therefore y = b \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{b}$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادلة قطع ناقص



مثال/ جد معادلة المنحنى $x = a \tan \theta$, $y = b \sec \theta$, $a, b > 0$, θ الكوسيط ؟

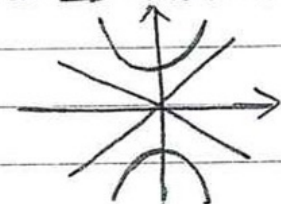
sol

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\therefore y = b \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{y}{b} , \therefore x = a \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{a}$$

$$\therefore \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

معادلة قطع زائد



مثال / ج معادلة الوسيط للقطع المكافئ $y^2 = 4Px$ اذا علمت ان المنحني

Sol

الوسيط $t = \frac{dy}{dx}$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 4P \frac{dx}{dx}$$

$$\Rightarrow 2y t = 4P$$

$$\Rightarrow y = \frac{4P}{2t} \Rightarrow y = \frac{2P}{t} \Rightarrow y^2 = \frac{4P^2}{t^2}$$

$$\therefore y^2 = 4Px, \quad y^2 = \frac{4P^2}{t^2} \Rightarrow \frac{4P^2}{t^2} = 4Px$$

$$\Rightarrow 4Px t^2 = 4P^2 \Rightarrow x = \frac{4P^2}{4Pt^2} \Rightarrow x = \frac{P}{t^2}$$

$$\therefore y^2 = 4Px \Rightarrow y^2 = 4P \left(\frac{P}{t^2} \right) \Rightarrow y^2 = \frac{4P^2}{t^2}$$

$$\therefore y = \frac{2P}{t}$$

مثال / ج معادلة المعنى $x = a \cos \theta$

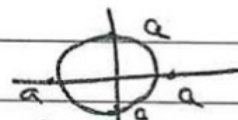
$y = a \sin \theta$ حيث $a > 0$, θ الوسيط ؟

Sol

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore x = a \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{a}, \quad \therefore y = a \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{a}$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

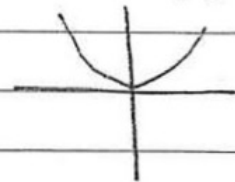


$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \right) a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

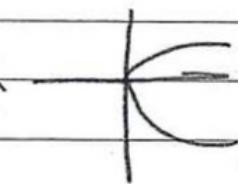
معادلة دائرة مركزها نقطة الاصل ونصفها a

القطوع / (حالات معادلات دسوكارتس القطوع)

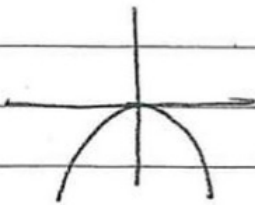
1) القطع المكافئ معادلاته - $x^2 = 4Py$



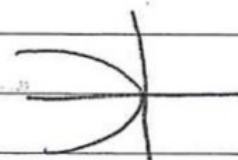
3) $y^2 = 4Px$

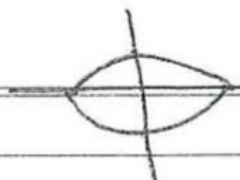


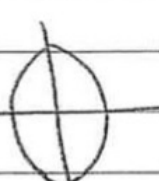
2) $x^2 = -4Py$



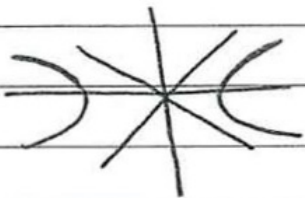
4) $y^2 = -4Px$



(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (2) القطع الناقص معادلاته /

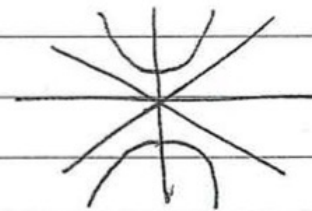
(2) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 

(1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



(2) القطع الزائد معادلاته /

(2) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



تجارب /
في هذا المعادلات الكارتيكية للمعادلات الوسيطة الان

(a) $x = \cos 2t$, $y = \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$\therefore y = \sin t \Rightarrow y^2 = \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ قانون صغرى الرادي

$\therefore y^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \Rightarrow 2y^2 = (1 - \cos 2t)$

$\therefore \cos 2t = 1 - 2y^2$ $\xrightarrow[\text{الاصليه}]{\text{من المعادله}}$ $x = 1 - 2y^2$

(b) $x = 2t + 3$, $y = 4t^2 - 9$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$x = 2t + 3 \Rightarrow x - 3 = 2t \Rightarrow t = \frac{x-3}{2}$

$\therefore y = 4t^2 - 9 \Rightarrow y = 4\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 9 \Rightarrow y = \frac{(x-3)^2}{1} - 9$

$y = x^2 - 6x + 9 - 9 \Rightarrow y = x^2 - 6x$

(c) $x = 2 + \frac{1}{t}$, $y = 2 - t$ $-\infty < t < \infty$

Sol

$$\because y = 2 - t \Rightarrow t = 2 - y$$

$$\because x = 2 + \frac{1}{t} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{2-y} \Rightarrow x = \frac{2(2-y)+1}{2-y}$$

$$x = \frac{4-2y+1}{2-y} = \frac{5-2y}{2-y} \Rightarrow x = \frac{5-2y}{2-y}$$

(d) $x = t^2 + t$, $y = t^2 - 1$

Sol

$$\because y = t^2 - 1 \Rightarrow t^2 = y + 1 \Rightarrow t = \pm \sqrt{y+1}$$

$$\because x = t^2 + t \Rightarrow x = (\pm \sqrt{y+1})^2 + \pm \sqrt{y+1}$$

$$\therefore x = (y+1) \pm \sqrt{y+1}$$

مسألة مبدأ إحداثيات الوسيط للمعادلة الكارتيزية $x^2 + y^2 = a^2$

Sol

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

الوسيط $t = \frac{dy}{dx}$

$$2x + 2y t = 0 \Rightarrow 2y t = -2x \Rightarrow y = \frac{-x}{t} *$$

$$\because x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{-x}{t}\right)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{t^2} = a^2$$

* من $y = \frac{-x}{t} \Rightarrow y t = -x$

نحذف x من المعادلة الأصلية عن طريق
القسمة على y بدلاً من x

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 t^2 + y^2 = a^2$$

المحاضرة الثالثة عشر الفصل السادس

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

إن المعادلات التفاضلية لها علاقة بـ مختلف أنواع العلوم ولها الرياضيات فقط ونزول من دراسة قوانين الحركة والقاذوب والميكانيك الكلاسيك مع الحركة الموجبة والنشاط الاستعصامي والتفاعلات الكيميائية ومن هنا تأتي اهمية دراستها وطرق حلها

المعادلة التفاضلية / هي معادلة تحتوي على مشتقات (اعتيادية / جزئية)

for example

$$1. \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy = 1 \quad \begin{array}{cc} 0 & D \\ 1 & 2 \end{array} \quad 2. y'' + (y')^3 = 0 \quad \begin{array}{cc} 0 & D \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$3. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 5 \quad \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \quad 4. \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = x+y \quad \begin{array}{cc} 3 & 1 \end{array}$$

رتبة المعادلة التفاضلية / هي رتبة أعلى مشتق تظهر بالمعادلة ويرمز لها بـ 0

درجة المعادلة التفاضلية / هي درجة الماتعة ذات أعلى رتبة شرط ان يكون عدد صحيح غير سالب ويرمز لها بالرمز D

تجارب

جد رتبة ودرجة كل من المعادلات الآتية

	$\frac{0}{1}$	$\frac{D}{1}$
1. $y' = 8x$	1	1
2. $(y')^2 + xy = y^2$	1	2
3. $\sqrt{y''} = 3y' + x \Rightarrow y'' = (3y' + x)^2$	2	1
4. $y^4 = \sqrt{y'} \Rightarrow y^8 = y'$	1	1
5. $(y'')^{\frac{1}{3}} = k(1+y^{-2})^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y'' = k^3(1+y^{-2})^{\frac{15}{2}}$	2	1

حل المعادلات التفاضلية /

هو عبارة عن متغيرات المعادلات التفاضلية بحيث أن هذه العلاقة تكون
 حالة من الحالات (مع معرفة كل فترة معينة) في حق المعادلات التفاضلية
 من المعادلات التفاضلية :-

$$(1) \quad x \dot{y} = x + y$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$y = x \log x - x, \quad x > 0$$

أعطولها

$$(2) \quad y'' = 12x^2$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix}$$

$$y = x^4 + C_1 x + C_2$$

طرق حل المعادلات التفاضلية /

أولاً :- المعادلات التي تفصل متغيراتها

في المعادلات التفاضلية الصام تكتب بالذكاء $P_1(x)g_2(y)dx + P_2(x)g_1(y)dy = 0$ عامل التكامل هو $\frac{1}{P_2(x)g_2(y)}$ وأجراء التكامل بعد ضرب طرفي المعادلة بعامل

التكامل

$$x(1-y) \frac{dy}{dx} + y(1+x) = 0$$

مثال 1 / حل المعادلات التفاضلية /

أحد طرق فصل المتغيرات

$$x(1-y) dy + y(1+x) dx = 0$$

بالضرب بـ (dx)

وبكون عامل التكامل $\frac{1}{xy}$ فنضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{1}{xy}$

$$\frac{(1-y)}{y} dy + \frac{1+x}{x} dx = 0$$

$$\left(\frac{1}{y} - 1\right) dy + \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy + \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy - \int dy + \int \frac{1}{x} dx + \int dx = 0$$

$$\ln y - y + \ln x + x = C$$

$$\ln y + \ln x - y + x = C$$

$$\ln(x \cdot y) = y - x + C \Rightarrow e^{\ln(x \cdot y)} = e^{y-x+C}$$

$$xy = e^{y-x+C}$$

مثال 2/ حل المعادلة التفاضلية $x^2(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$

الحل / عامل التكامل هو $\frac{1}{(1-y^2)(1+x^2)}$ طريق فصل المتغيرات

$$\frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx + \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx + \int \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{-2} \int \frac{-2y}{1-y^2} dy = 0$$

$$x + \dots - \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |1-y^2| = C$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} \quad \frac{1}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1} \quad \frac{x^2}{x^2+1}$$

الاجواب 1 هو $\frac{x^2}{1+x^2}$ $1 - \frac{1}{x^2+1}$

مثال 3/ حل المعادلة التفاضلية $y \cos x dx + y \tan y dy = 0$

الحل / طريق فصل المتغيرات عامل التكامل هو $\frac{1}{y}$

$$\therefore \frac{y \cos x dx}{y} + \frac{y \tan y dy}{y} = 0$$

$$\int \cos x dx + \int \tan y dy = 0$$

$$\sin x = \ln |\cos y| = C$$

مثال 4/ حل المعادلة التفاضلية $y x^{-2} dx - x^{-1} dy = 0$

عامل التكامل $\frac{1}{y x^{-1}}$

$$\therefore \frac{y x^{-2} dx}{x^{-1} y} - \frac{x^{-1} dy}{y x^{-1}} = 0$$

$$x^{-1} dx - y^{-1} dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\therefore \ln |x| - \ln |y| = C \Rightarrow \ln x - \ln y = \ln C \Rightarrow \frac{x}{y} = C$$

$$x(1-y^2) dx + y(1+x^2) dy = 0 \quad \text{مسألة حل المعادلات التفاضلية /$$

$$\frac{x(1-y^2)}{(1-y^2)(1+x^2)} dx + \frac{y(1+x^2)}{(1-y^2)(1+x^2)} dy = 0 \quad \text{الكل / هو لغير متغير المتغير واحد التكامل هو}$$

$$\frac{x}{1+x^2} dx + \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x^2| - \frac{1}{2} \ln|1-y^2| = \ln C$$

$$\therefore \ln|(1+x^2)^{\frac{1}{2}}| - \ln|(1-y^2)^{\frac{1}{2}}| = \ln C$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \ln C \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}} \right| = C \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \ln C \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}} \right| = C \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

بعض قوانين التكامل المهمة موجودة في الفصل الأول كتابها من هذا الفصل

$$\textcircled{1} \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, \textcircled{2} \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\textcircled{3} \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \textcircled{4} \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\textcircled{5} \int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad \textcircled{6} \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\textcircled{7} \int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad \textcircled{8} \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\textcircled{1} x \sec x dx + x \cot y dy = 0 \quad \text{واجب حل المعادلات التفاضلية مع ذكر الطريقة وحل التكامل}$$

$$\textcircled{2} y^2 \sec^2 y dy + y^2 \csc x dx = 0$$

$$\textcircled{3} y \csc^2 x dx + y \sec y \tan y dy = 0$$

المحاضرة الرابعة عشر

ثانياً :- طريقة تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية

هذه الطريقة تستخدم عندما تكون رتبة المعادلة من درجته عالية فنقوم بتقليل رتبة الرتبة الى رتبة اولى ونكامل مباشرة ثم نقوم بالتفاضل ونكامل مرة اخرى وهكذا

مثال 1 / حل المعادلة التفاضلية
الدرجة الاولى
طريقة تخفيض الرتبة

$$x y'' = y'$$

sol let $p = y' = \frac{dy}{dx}$

$$\therefore p' = y'' = \frac{dp}{dx}$$

الذي نعوض به المعادلة الاصلية

$$x \frac{dp}{dx} = p \xrightarrow[\text{على الطرفين}]{\text{بالقسمة}} \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \ln |p| = \ln |x| + C_1$$

نحذف من C_1 الثابت بـ $\ln e$ لسهولة الحساب

$$\therefore \ln |p| = \ln |x| + \ln e \Rightarrow \ln |p| = \ln (x \cdot e)$$

$$\frac{\ln |p|}{e} = \frac{\ln x \cdot e}{e} \Rightarrow p = x \cdot e \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot e$$

$$\therefore dy = x \cdot e \cdot dx \Rightarrow \int dy = \int x \cdot e \cdot dx \Rightarrow y = e \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y'' = 1 \Rightarrow$$

$$y'' = 1$$

مثال 2 / حل المعادلة التفاضلية
الدرجة الاولى
طريقة تخفيض الرتبة

$$\text{let } p = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow p' = y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\therefore y'' = 1$$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = 1 \Rightarrow dp = dx \Rightarrow \int dp = \int dx \Rightarrow p = x + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x + C_1 \Rightarrow dy = (x + C_1) dx \Rightarrow \int dy = \int (x + C_1) dx$$

$$\therefore y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$2y' - xy'' = 0$$

مثال 3 / حل المعادلة التفاضلية
أكل / طريقة تخفيض الرتبة

$$\text{let } p = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$p' = y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$2p - x \frac{dp}{dx} = 0$$

بالتقسيم على $x \cdot p$ عامل مشترك

$$\frac{2}{x} - \frac{dp}{p \cdot dx} = 0$$

$$\frac{2}{x} = \frac{dp}{p \cdot dx} \Rightarrow \frac{2 dx}{x} = \frac{dp}{p} \quad (\text{بضرب الطرفين بـ } dx)$$

$$2 \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dp}{p} \Rightarrow 2 \ln|x| = \ln|p| + C_1$$

$$\ln|x^2| = \ln p + C_1 \Rightarrow \ln p = \ln x^2 + \ln e$$

$$\ln p = \ln(x^2 \cdot e) \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d(x^2 \cdot e)}{x^2 \cdot e}$$

$$p = x^2 \cdot e \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e \Rightarrow dy = (x^2 \cdot e) dx$$

$$\int dy = \int x^2 \cdot e dx \Rightarrow y = \frac{x^3 \cdot e}{3} + C_2$$

مثال 4 / حل المعادلة التفاضلية
أكل / طريقة تخفيض الرتبة

$$4 - y'' = 0 \quad \text{let } p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad p' = y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$4 - \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 4 = \frac{dp}{dx} \Rightarrow 4 dx = dp \Rightarrow \int 4 dx = \int dp$$

$$\Rightarrow 4x = p + C_1$$

$$4x = \frac{dy}{dx} + C_1 \Rightarrow 4x - C_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = (4x - C_1) dx \Rightarrow \int dy = \int (4x - C_1) dx$$

$$y = \frac{4x^2}{2} - C_1 x + C_2 \Rightarrow y = 2x^2 - C_1 x + C_2$$

مثال 5 حل المعادلة التفاضلية
طريقة تخفيض الرتبة

$$5y'' = 5x = 0$$

$$\text{let } p = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$p' = y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$5y'' = 5x = 0 \Rightarrow 5y' = 5x \Rightarrow y' = x$$

$$\frac{dp}{dx} = x \Rightarrow dp = x dx \Rightarrow \int dp = \int x dx$$

$$\therefore p = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx$$

$$\therefore \int dy = \int \frac{x^2}{2} dx + \int C_1 dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

الفصل السابع / المتتابعات

المتتابع / هي مجموعة من العناصر مرتبة حسب قاعدة اقتران معينة بحيث يكون مجالها الأعداد الطبيعية $(\mathbb{N})$ ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$ ويرمز لها بالرمز $\{a_n\}$ أو a_n فقط حيث $n=1, 2, 3, \dots$ نلاحظ أن كل لذي يحتوي على الرمز a من المتتابع يرمز لها بالرمز n .

المتتابعات هي من المتتابعات ويمكن أن تكون متناهية أو متناهية.

Ex متتابع متناهية $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

1- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}$

2- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$

3- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{n-1, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

4- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots\}$

5- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$

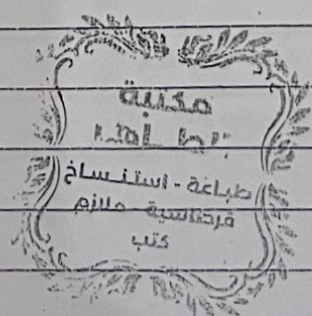
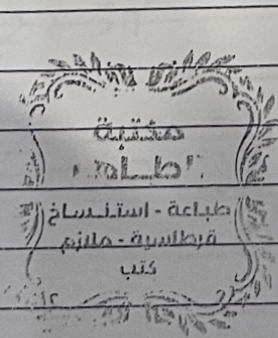
6- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{1, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1, 1, \dots\}$

7- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

8- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

9- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

10- متتابع متناهية $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$



عاريات وتبايع المتتابعات / هنالك بعض المتتابعات تقرب من نقطة معينة لها نزياد عددها وهنالك متتابعات اخرى تتباعد الى المالا نهاية او تنقل اكثر من نقطه وعليه نقيم المتتابعات الى المتتابع المتقارب / وهي المتتابع التي تقرب الى عدد معين ويتقارب وايضا

$$\{a_n\} \rightarrow L \quad \exists \epsilon \in \mathbb{R} \quad \exists \epsilon > 0, |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

تقريب
المتابع $\{a_n\}$ تقرب من العدد L اذا وجد عدد حقيقي ϵ بحيث $\epsilon > 0$ يحقق
له الاثني $|a_n - L| < \epsilon$

المتتابع المتباعدة / وهي المتتابع التي لا تقرب الى عدد معين مثل L وتعتبر متابع المتناوب نوع من المتتابعات المتباعدة

معرفة المتتابع المتقارب واعطى مثال عليها
معرفة المتتابع المتباعدة واعطى مثال عليها

دعكم :-
اذا كانت درجة البسط للمتابع اقل من درجة المقام الى ما لان للمتابع تقرب من
في
اذا كانت درجة البسط للمتابع اكبر من درجة المقام على المتابع متباعدة اي
تقرب من اى عدد
اذا كانت درجة البسط
تدريج المقام تكون المتتابع متقاربة اي تقرب
محامل الكبر (قوة) في البسط على محامل الكبر (قوة) في المقام
يعمل العدد الذي تقرب اليه المتتابع بقية تعارب المتابع

$$\text{Ex: ①} \quad \frac{4n^3 + 1}{2 + 5n^3} \quad L = \frac{4}{5}$$

$$\text{②} \quad \frac{2}{n} = \frac{2 \times n^0}{n^1} \quad L = 0$$



أصل / بين تقارب أو تباعد المتتابعات التالية

1- $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol

$$\epsilon \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\therefore n > \frac{1}{\epsilon}$$

المتابع يقترب من 0 أي $L=0$

$$\therefore \{\frac{1}{n}\} \rightarrow L=0 \text{ or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$



2- $\{a_n\} = \{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol

$$\epsilon \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\frac{1}{n^2} - 0| = |\frac{1}{n^2}| = \frac{1}{n^2} < \epsilon$$

$$\therefore n^2 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

المتابع يقترب من 0 أي $L=0$

$$\{\frac{1}{n^2}\} \rightarrow L=0 \text{ or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

3- $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol

$$\epsilon \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n-n-1}{n+1}| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

$$\therefore \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

المتابع يقترب من 1 أي $L=1$

$$\{\frac{n}{n+1}\} \rightarrow L=1 \text{ or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

4- $\{a_n\} = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol

$$\epsilon \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\frac{n+1}{n} - 1| = |\frac{n+1-n}{n}| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\therefore n > \frac{1}{\epsilon}$$

المتابع يقترب من 1 أي $L=1$

$$\{\frac{n+1}{n}\} \rightarrow L=1 \text{ or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$5- \{a_n\} = \{1, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad |1-1| = |a_n - L| = 0 < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$$

∴ المتتابع يقترب من 1

$$\{a_n\} \rightarrow L = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$6- \{a_n\} = \{n, n \in \mathbb{N}\}$$

نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد قيمة L بحيث $\epsilon \in \mathbb{R}$ $\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$ يكون $|n - L| < \epsilon$

فلو فرضنا أن $\epsilon = 1$ و $L = 0$ فيكون $|n - 0| < 1 \Rightarrow n < 1$ وبما أن $n \in \mathbb{N}$ فلو فرضنا $n = 2$

$$\Rightarrow n < 1 \text{ تناقض}$$

∴ المتتابع متباعدة $\{a_n\} \not\rightarrow L$

ملاحظة / ^{اختبر} تباعد المتتابع أو بناء المتتابعات اللانهائية

$$1- \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \epsilon > 0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = 0 \quad \therefore L = 0$$

$$\therefore |a_n - L| = \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} < \epsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \ln 2^n > \ln \frac{1}{\epsilon} \rightarrow n \ln 2 > \ln \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2}$$

∴ المتتابع يقترب من 0 أي $L = 0$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{2^n} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{or} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$



2. $\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Sol

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \epsilon > 0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^\infty}{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\infty} = 0 \\ \frac{-1}{\infty} = 0 \end{cases} \therefore L = 0$

$\therefore |a_n - L| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$

$\therefore \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} \rightarrow 0$ or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

3. $\{a_n\} = \left\{ \frac{5n}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Sol

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \epsilon > 0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$

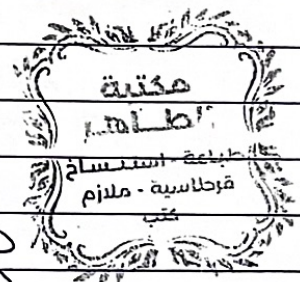


$\therefore |a_n - L| = \left| \frac{5n}{n+2} - 5 \right| = \left| \frac{5n - 5n - 10}{n+2} \right| = \left| \frac{-10}{n+2} \right| = \frac{10}{n+2}$

$< \frac{10}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{10}{\epsilon}$

$L = 5$ or 5 المقارب

$\left\{ \frac{5n}{n+2} \right\} \rightarrow 5$ or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+2} = 5$



4. $\{a_n\} = \left\{ \frac{2n^2}{n^2+3}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

Sol

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$

$|a_n - L| = \left| \frac{2n^2}{n^2+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 6}{n^2+3} \right| = \left| \frac{-6}{n^2+3} \right| = \frac{6}{n^2+3} < \frac{6}{n^2}$

$\left(\because \frac{n^2}{6} > \frac{1}{\epsilon} \right)^{\times 6} \Rightarrow n^2 > \frac{6}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\epsilon}}$

$\therefore$ المقارب المقارب $\frac{2}{1}$ اي ان $L = 2$

$\therefore \left\{ \frac{2n^2}{n^2+3} \right\} \rightarrow 2$ or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+3} = 2$

$$5- \{a_n\} = \left\{ \frac{2n+1}{1-3n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 \ni |a_n - L| < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$$

$$|a_n - L| = \left| \frac{2n+1}{1-3n} + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n+3+2-6n}{3(1-3n)} \right| = \left| \frac{5}{3(1-3n)} \right| = \left| \frac{5}{3-9n} \right|$$

$$= \left| \frac{-5}{-3+9n} \right| = \frac{5}{9n-3} < \frac{5}{9n} < \epsilon \Rightarrow \frac{9n}{5} > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow 9n > \frac{5}{\epsilon}$$

$$L = \frac{2}{-3} \text{ or } \frac{2}{-3}$$

$$\therefore \left\{ \frac{2n+1}{1-3n} \right\} \rightarrow \frac{2}{-3} \text{ or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1-3n} = \frac{2}{-3}$$

$$6- \{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 \ni |a_n - L| < \epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 + \frac{(-1)^0}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$\therefore |a_n - L| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$L = 1 \text{ or } 1$$

$$\therefore \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} \rightarrow 1 \text{ or } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1$$

