الفصل الثالث

مبادئ نظرية الاحتمال

ان نظرية الاحتمال تلعب دورا هاما في نظريات وتطبيقات علم الاحصاء وهذه النظرية تعني بدراسة التجارب العشوائية ومعظم امثلة الاحتمالات مبنية على تجارب زار الطاولة وقطع النقود وصندوق الكرات ومجموعة اوراق اللعب .

مفاهيم اساسية :-

١- **التجربة العشوائية :** هي التجربة التي يمكننا معرفة جميع نتائجها الممكنة قبل اجرائها ولكن لا يمكن تحديد اي من هذه النتائج يتحقق .

٢- **فضاء العينة :** هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة تحدث عن طريق الصدفة ويرمز لها بـ S .

مثال/ عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فان فضاء العينة يتكون من نتيجتين ممكنتين وهما S={H,T} حيث ان H يرمز للصورة و T للكتابة .

اما اذا رمينا قطعتين من النقود فان فضاء العينة سيكون من اربعة نتائج ممكنة وهي S={HH,HT,TH,TT} .

نستخدم صيغة (n^m) حيث n تمثل عدد العناصر و m عدد الرميات .

٣- **الحادث :** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ويرمز لها بـ (E_i)

مثال/ رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة فان $E_1 = \{H\};\ E_2\{T\}$

٤- **الحوادث المتنافية :** يقال عن الحادثتين E_2, E_1 انهما متنافيان اذا استحال حدوثهما معا ، مثال عند رمي قطعة نقود فمن المستحيل الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت.

٥- **الحوادث المستقلة :** هي الحوادث التي اذا وقع احدهما لا يؤثر على وقوع الاخر . مثلا عند رمي قطعتين نقود فان نتيجة القطعة الاولى لا تؤثر على نتيجة الثانية .

٦- **الحوادث المعتمدة (غير مستقلة)** : هي الحوادث التي اذا وقع احدهما يؤثر في وقوع الحوادث الاخرى فمثلا : في حالة صندوق به كرات بيضاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي بحيث لا تعاد الكرة الاولى فان نتيجة السحبة الثانية تتأثر بنتيجة السحبة الاولى .

- **مضروب n : Factorial (n)** ويرمز له بـ $n!$ وقانونه
- $n! = n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ \ldots\ 1$

ملاحظة : 0!=1 & 1!=1

مثال/ جد قيمة 5! ؟

الحل/ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

٧- **التباديل : (Permutation)** هي عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء بأخذها كلها او بعضها ويرمز له بـ nPr اي تباديل r من n وقانونه

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال/ اذا كان لدينا اربعة حروف هي [A,B,C,D] واختير منها حرفان فما هي الطرق يمكن بها اختيار هذين الحرفين

الحل : $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$

$4P2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$

اي ان عدد الطرق =12 وهي

[AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC]

٨- **التوافيق** : يقصد بها عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء بأخذها كلها او بعضها ويرمز لها C_r^n وقانونها

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ , n > r$$

ملاحظة:

1) $C_0^n = 1$
2) $C_1^n = n$
3) $C_n^n = 1$
4) $C_{n-1}^n = n$

مثال/ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تحتوي على اربع طلاب من صف فيه عشرون طالب؟

الحل : $C_4^{20} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20\times19\times18\times17\times16!}{4\times3\times2\times1\times16!} = 4845$

قواعد اساسية :

١- اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_i هو n وعدد طرق لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_2, E_1 حادثان متنافيان فان عدد الطرق الممكنة لوقوع E_1 او E_2 هو $(n+m)$ من الطرق

مثال/ ان عدد ورق اللعب هو (52) ورقة وان (♦) يمكن ان تحدث بـ (13) طريقة وان ورقة (♠) يمكن ان تحدث بـ (13) طريقة فعند سحب ورقة عشوائيا من اوراق اللعب فان عدد الطرق الممكنة لاختيار (♦) او (♠) هو 13+13=26 طريقة

٢- اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وعدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_2, E_1 حادثان مستقلان فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 او E_2 هو $(m\times n)$ من الطرق

مثال/ صندوق بـ (6) كرات حمراء و (4) كرات بيضاء و (2) سوداء ما عدد طرق اختيار (5) كرات بحيث تكون (2) منها بيضاء و (3) حمراء

الحل/ عدد طرق اختيار 3 حمراء هي

$C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$

وعدد طرق اختيار (2) بيضاء هي

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

اذن عدد الطرق لاختيار 3 حمراء و 2 بيضاء هو

$$C_3^6 \times C_2^4 = 20 \times 6 = 120$$

تعريف الاحتمالية probability

هي نسبة الجزء على الكل او هي نسبة عدد حالات النجاح على عدد الحالات الممكنة ، فاذا كان عدد عناصر مجموع فضاء العينة هو (m) و (n) عدد عناصر حالات النجاح (وتسمى الحالات المواتية) فان

$$P(E_i) = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n}{m} \ , n < m$$

اما احتمال فشل ظهور الحادث اي عدم ظهوره يرمز له بـ $P(\overline{E_i})$ وقانونه

$$P(\overline{E_i}) = 1 - P(E_i)$$

مثال/ جد احتمالية وجود صورتان اذا رمي قطعة نقود ثلاث مرات

الحل/ S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

A={HHT, HTH, THH}

$$P = \frac{n}{m} = \frac{3}{8}$$

مثال/ عند رمي زهر كم احتمال ان يظهر العدد الفردي ؟

S={1,3,5}

مثال/ صندوق يحتوي على (3) كرات بيضاء و (5) كرات سوداء و (2) حمراء فاذا سحبت كرة عشوائية من هذا الصندوق ما هو احتمال ان تكون : (أ) سوداء (ب) غير سوداء (ج) غير حمراء

الحل/ احتمال الحصول على كرة سوداء هو

$$P(E) = \frac{n}{m} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

احتمال الحصول على كرة غير سوداء هو

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

احتمال الحصول على كرة غير حمراء $P(\bar{R})$

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{2}{10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

بعض خواص الاحتمالية :-

١- اذا رمزنا لاحتمال حدوث حادث بالرمز $P(E)$ واحتمال عدم حدوث هذا الحادث بـ $P(\bar{E})$ فان $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

مثال/ صندوق يحتوي على (6) كرات بيضاء و (4) كرات سوداء و (5) حمراء فاذا سحبت منه كرة واحدة عشوائيا ما هو درجة احتمال ان تكون هذه الكرة : (أ) بيضاء (ب) غير بيضاء

الحل/ $P(w) = \frac{6}{15}$

$$P(\overline{w}) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}$$

من هذا يتضح ان $P(w) + P(\overline{w}) = 1$

٢- ان درجة احتمال اي حادث تتراوح بين الصفر والواحد $0 < P(E) < 1$

٣- اذا كانت $E_1, E_2, \dots \dots, E_n$ هي عناصر او نقاط فضاء العينة فان مجموع درجات احتمالاتها =1

$$P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1$$

مثال/ صندوق يحتوي على (5) كرات بيضاء و (9) كرات سوداء و (3) خضراء فان احتمال ان تكون بيضاء $P(E_i) = \frac{5}{20}$

احتمال ان تكون سوداء هو $P(E_2) = \frac{9}{20}$

احتمال ان تكون خضراء $P(E_3) = \frac{6}{20}$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{5}{20} + \frac{9}{20} + \frac{6}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

تمارين

١- طالب يجيب على (8) اسئلة مجموع (10) اسئلة كم طريقة مختلفة للإجابة على الاسئلة ؟

٢- ما عدد طرق الاختيار التي يمكن الحصول عليها لاختيار لجنة مؤلفة من (5) اشخاص من مجموع (9) اشخاص ؟

٣- سحبت قطرة دم من شخص يرغب في فحص صنف دمه ما هو احتمال ان يكون صنف دم هذا الشخص AB ؟

٤- صندوق يحتوي على (7) كرات حمراء و (5) كرات بيضاء و (8) خضراء فاذا سحبت منه كرة واحدة عشوائيا فان احتمال ان تكون هذه (١) بيضاء (٢) غير بيضاء ؟

قوانين الاحتمالية Laws of probability

١- قانون الجمع The addition rule

أ) **عندما تكون الحوادث متنافية** : لتكن E_2, E_1 حادثتين متنافيتين في محاولة معينة فان احتمال حدوث E_1 او E_2 يمثل حاصل جمع E_1 مع E_2 اي ان

$$P(E_1 \ or \ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

وبشكل عام اذا كانت $E_1, E_2, \dots, E_n$ تمثل (n) من الحوادث المتنافية في محاولة معينة فأن احتمال حدوث E_1 او E_2 او ... E_n يمثل حاصل جمع احتمالات هذه الحوادث اي ان

$$P(E_1 \ or \ E_2 \ or \ \dots . or \ E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

مثال/ في تجربة رمي زهر النرد فان احتمال ظهور الوجه الذي يحمل نقاط (6) او الوجه الذي يحمل النقاط (5) او (3)

$$P(6 \ or \ 5 \ or \ 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

ب) **عندما تكون الحوادث غير متنافية** : لتكن E_2, E_1 حادثين ممكنين الحدوث معا عندئذ فان احتمال E_1 او E_2 هو $P(E_1 \ or \ E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2)$

مثال/ اذا علمت ان احتمال سقوط المطر في احد ايام فصل الربيع هو (0.52) وان احتمال كون الطقس مشمس هو (0.36) واحتمال كون الطقس مشمس وممطر في ان واحد هو (0.18) ما هو احتمال اذا يكون مشمس او ممطر ؟

الحل/ نفرض ان E_1 تمثل حادثة سقوط المطر في هذا اليوم وان E_2 تمثل حادثة الطقس مشمس عندئذ

$$P(E_1 \ or \ E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2)$$
$$= 0.52 + 0.36 - 0.18$$
$$= 0.70$$

٢- قانون الضرب The multiplication rule

(أ) **عندما تكون الحوادث مستقلة :** لتكن E_1, E_2 حادثتين مستقلتين عندئذ فان احتمال حدوث E_1, E_2 معا هو $P(E_1 \ and \ E_2) = P(E_1) * P(E_2)$

مثال/ في وجبة انتاج مؤلفة من (15) وحده توجد (5) وحدات رديئة فاذا تم سحب ثلاث وحدات من هذه الوجبة عشوائيا الواحدة تلو الاخرى ما هو احتمال ان تكون هذه الوحدات الثلاثة

(أ) جيدة (ب) رديئة ؟

الحل/ الوحدات الجيدة هي (10) وحدات فان

أ) احتمال سحب الوحدة الاولى جيدة هي $P(E_1) = \frac{10}{15}$

احتمال سحب الوحدة الثانية جيدة هي $P(E_2) = \frac{9}{14}$

احتمال سحب الوحدة الثالثة جيدة هي $P(E_3) = \frac{8}{13}$

∴ احتمال ان تكون الثلاثة جيدة هو

$$P(E_1 \ and \ E_2 \ and \ E_3) = \frac{10}{15} . \frac{9}{14} . \frac{8}{13} = 0.26$$

ب) احتمال الوحدة الاولى رديئة هو $P(E_1) = \frac{5}{15}$

احتمال الوحدة الثانية رديئة هو $P(E_2) = \frac{4}{14}$

احتمال الوحدة الثالثة رديئة هو $P(E_3) = \frac{3}{13}$

لذا فان احتمال ان تكون الوحدات المسحوبة رديئة هو

$$P(E_1 \ and \ E_2 \ and \ E_3) = \frac{5}{15} . \frac{4}{14} . \frac{3}{13} = 0.022$$

(ب) **عندما تكون الحوادث غير مستقلة :** اذا كان E_1 , E_2 حدثين غير مستقلين فان احتمال حدوثهما معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية مشروطا بحدوث الاولى اي :

$$P(E_1 , E_2) = P(E_1).P(E_2/E_1)$$

وبصورة عامة اذا كانت $E_1, E_2, \dots, E_n$ احداثا غير مستقلة فان احتمال حدوثهم معا هو

$$P(E_1\ E_2 \dots\ E_n) = P(E_1).P(E_2/E_1) \dots P(E_n/E_1\ E_2 \dots\ E_{n-1})$$

مثال/ صندوق به (5) كرات حمراء و (3) كرات سوداء سحبت كرتان سوية على التوالي بدون ارجاع الكرة الاولى ما هو احتمال ان تكون كلتاهما سوداء ؟

الحل/ احتمال الحصول على كرة سوداء في السحبة الاولى هو $P(B_1) = \frac{3}{8}$

اما السحبة الثانية بدون ارجاع فان احتمال ان تكون سوداء هو

$$P(B_2/B_1) = \frac{2}{7}$$

$$P(B_1B_2) = \frac{3}{8} . \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

مثال/ احد صفوف المرحلة الاولى تتألف من (30) طالب و (15) طالبة فاذا اختبرت (3) اسماء عشوائيا ما هو احتمال ان يكونوا من الذكور ؟

الحل / $P(B_1\ B_2\ B_3) = P(B_1).P(B_2/B_1).P(B_3/B_1\ B_2)$

$$= \frac{30}{45} . \frac{29}{44} . \frac{28}{43} = 0.089$$