الفصل الثالث

قانون كاوس

3-1 مقدمة

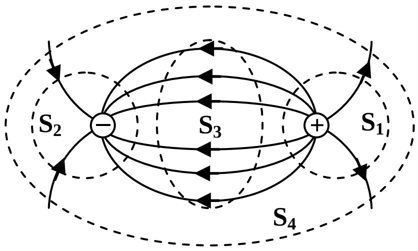
مما سبق عرفنا كيفية حساب المجال الكهربائي لتوزيع معين من الشحنات باستخدام قانون كولوم، وفي هذا الفصل سندرس **طريقة أخرى** **لحساب المجال الكهربائي باستخدام قانون كاوس.**

والعالم كاوس هو العالم الألماني الذي اشتغل كثيراً في مجال الفيزياء العملية والنظرية والرياضيات.

إن العلاقة التي تعرف بقانون كاوس تعتبر صفة مهمة من صفات المجال الكهربائي الكهروستاتيكي، **ويعبر قانون كاوس عن العلاقة بين فيض المجال الكهربائي (ϕ) خلال سطح افتراضي وقيمة الشحنة الكلية التي يحتويها السطح.**

والفيض الكهربائي ϕ هو خاصية لجميع المجالات المتجهة **ويتم قياس أو حساب الفيض الكهربائي ϕ بواسطة عدد خطوط القوى التي تقطع سطح ما (أي تمر خلال سطح ما).**

وبالنسبة للسطوح المغلقة في مجال كهربائي نلاحظ ما يلي:



1. تكون ϕ موجبة إذا كان اتجاه خطوط القوة خارجاً.
2. تكون ϕ سالبة إذا كان اتجاه خطوط القوة داخلاً.

والشكل المجاور يوضح هذه الظاهرة:

* ϕ موجبة بالنسبة للسطح S_1
* ϕ سالبة بالنسبة للسطح S_2
* $\phi = 0$ بالنسبة للسطح S_3

لأنه ليس هناك شحنة داخل السطح S_3 أي أن $q = 0$

* $\phi = 0$ بالنسبة للسطح S_4

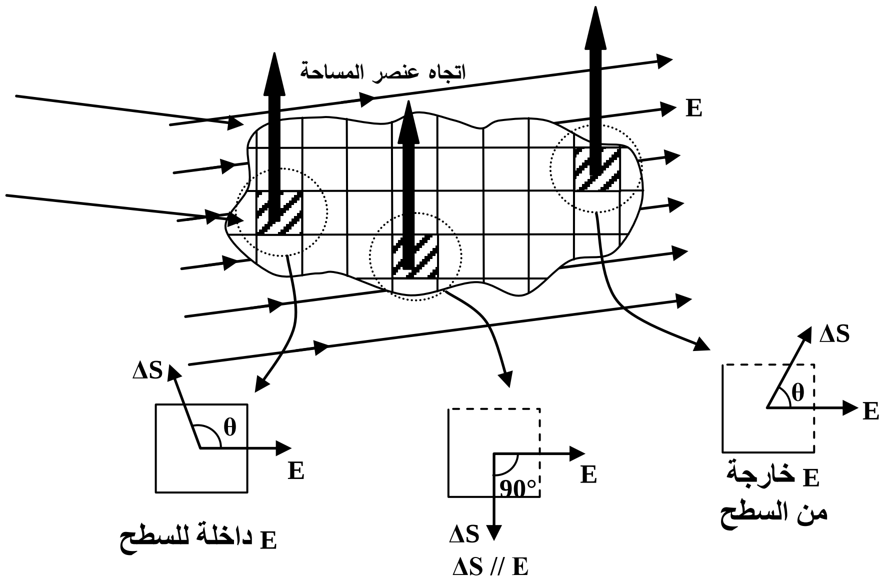
ملاحظة: يعتبر قانون كاوس أحد المعادلات الأربعة الأساسية للمعادلات الكهرومغناطيسية.

لمعرفة ϕ بشكل أدق:

1- نفترض وجود سطح مغلق اختياري موضوع في مجال كهربائي غير ثابت (E)

2- نفترض ان هذا السطح مقسماً إلى وحدات (مربعات صغيرة) قيمة الواحد منها ΔS، حيث يمكن اعتبار كل وحدة أو مربع كمستوي مساحته ΔS (عنصر المساحة)

3- وقيمة (عنصر المساحة) نفس قيمة ΔS، أما اتجاهه فإلى الخارج وعمودياً على السطح كما مبين في الشكل:



n: هو العمود على عنصر المساحة (ويمثل اتجاه عنصر المساحة).

يتضح من الرسم ما يأتي:

بالنسبة لعناصر المساحة المأخوذة والتي تمثل سطوح مغلقة افتراضية فإن الزاوية بين $\vec{E}$ و ΔS هي:

1. θ أكبر من $90°$ $\qquad \phi < 0$
2. $\theta = 90°$ $\qquad \phi = 0$
3. θ أقل من $90°$ $\qquad \phi > 0$

ويتضح من الأشكال الثلاثة بأن:

1. تكون E داخل للسطح لذلك تكون قيمة الفيض سالبة، حيث تم وضع السطح الافتراضي في المجال الكهربائي وإن $\theta > 90°$.
2. يكون اتجاه المجال موازياً لعنصر المساحة (قيمة عنصر المساحة) وبذلك تكون قيمة الفيض مساوية إلى الصفر ($\phi = 0$) لأن الزاوية المحصورة بين متجه المجال و اتجاه عنصر المساحة = $90°$.
3. يكون اتجاه المجال خارجاً من عنصر المساحة (قيمة عنصر المساحة) ، أي أن الزاوية بين العمود على عنصر المساحة (اتجاه عنصر المساحة) والمجال تكون أقل من $90°$ ($\theta < 90°$) وبذلك يكون الفيض ϕ موجباً.

* **يمكن أن يكتب الفيض بالصيغة التالية:**

$$\phi = \sum E.\Delta S$$

ويقاس بوحدات $N.m^2/coul$

* ولمعرفة الفيض بالضبط نطبق معادلة التكامل بالنسبة للفيض للسطح المغلق

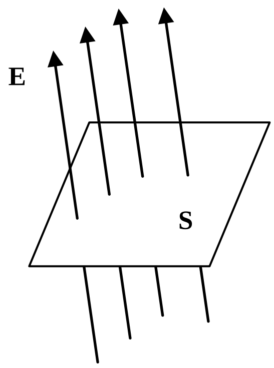
$$\phi = \oint E.dS$$
$$= \oint E\, dS \cos\theta$$

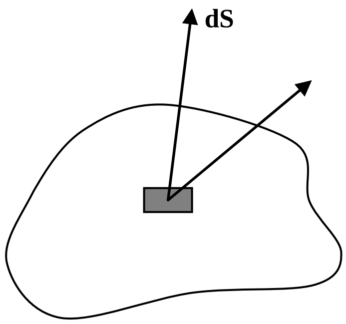
* ϕ كمية عددية ناتجة من حاصل ضرب $E.dS$

3-2 الفيض الكهربائي الناتج عن المجال الكهربائي

يمكن استخدام خطوط القوى الكهربائية لحساب قيمة المجال من معرفة الفيض. ففي حالة وجود سطح ما مساحته (S) في مجال كهربائي (E) عمودي على السطح، وإن مقدار شدة المجال الكهربائي متساوية لجميع نقاط السطح

$$\phi = ES \;\; .... (1) \qquad [\theta=0 \;,\; \cos\theta=1]$$





أما إذا كان السطح المرسوم في المجال غير عمودي على المجال وإن مقدار شدة المجال تتغير من نقطة لأخرى، يمكن حساب الفيض في هذه الحالة بتكامل المركبة العمودية للمجال على السطح كما في المعادلة التالية:

$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} \;\; .... (2)$$

$$\phi = \oint E\cos\theta\, dS \;\; .... (2)$$

θ = الزاوية المحصورة بين اتجاه المجال واتجاه العمود المقام على السطح (S).

3-3 الفيض الكهربائي نتيجة شحنة نقطية

لحساب الفيض الكهربائي لنقطة مشحونة، نفرض سطح كروي مغلق وتوجد الشحنة بمركزها كما في الشكل المجاور.

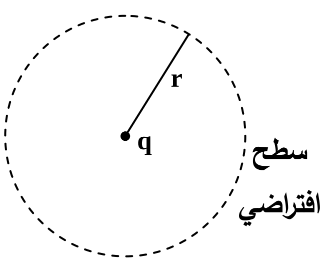
إن خطوط القوة الكهربائية المنبعثة من الشحنة تكون بشكل خطوط مستقيمة وشعاعية.

$$\therefore \phi = \oint \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\phi = \oint E\cos\theta\, dS \quad [\theta=0, \cos\theta=1]$$

$$\phi = E\oint dS \;\; .....(1) \;, \qquad \oint dS = 4\pi r^2 \;\; ... .(2)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{q}{r^2} \;......(3)$$

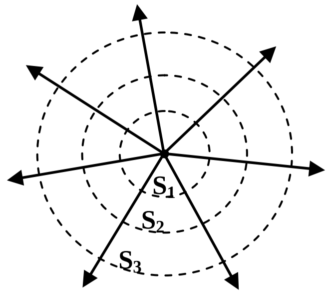


نعوض معادلة (2) و(3) في (1)

$$\therefore \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\boxed{\therefore \phi = \frac{q}{\varepsilon_\circ}}$$

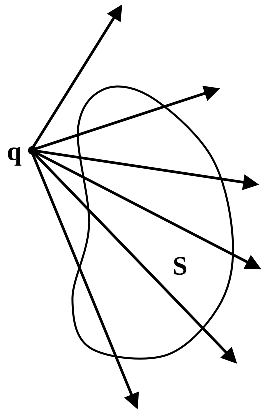
3-4 سطح كاوس



الفيض الكلي المار خلال الأسطح S_1، S_2، S_3 تساوي

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

∴ الفيض الكلي خلال أي سطح مغلق لا يعتمد على شكل السطح ولا يعتمد على المسافة (r).



في الشكل المجاور، إذا تم وضع شحنة خارج سطح كاوس (أي سطح مغلق) فنلاحظ أن عدد خطوط المجال الكهربائي الداخلة إلى السطح تساوي عدد خطوط المجال الخارجة منه، لذلك يكون الفيض الكلي الناتج في هذه الحالة يساوي صفر، لأن السطح لا يحيط بالشحنة.

3-5 قانون كاوس

يعبر قانون كاوس عن العلاقة بين فيض المجال الكهربائي ϕ خلال سطح افتراضي وقيمة الشحنة الكلية التي يحتويها هذا السطح.

وبما أن $\phi = \oint \vec{E} . d\vec{S}$ و $\phi = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$

وبمساواة المعادلتين نحصل على

$$\boxed{\oint \vec{E} . d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_\circ}}$$

وينص قانون كاوس على ما يلي:

إن التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي على أي سطح مغلق يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح مقسوماً على سماحية الفراغ ε_o.

q_{in} = كل الشحنات الواقعة ضمن السطح الافتراضي.

ملاحظة:

1. **إذا كان السطح يحتوي على أكثر من شحنة نقطية واحدة**

$$q_{in} = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

2. **إذا كانت الشحنة ذات توزيع متصل، يؤخذ الجزء من الشحنة الواقع ضمن السطح الافتراضي ويهمل الجزء الواقع خارج السطح.**

3. إن **$\phi = 0$ عندما $q = 0$**

$\phi = 0$ إذا كان المجموع الكلي للشحنات داخل السطح = 0 [شحنات متساوية المقدار ومختلفة في الإشارة]

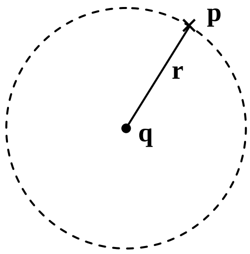
فائدة قانون كاوس

إن العلاقة التي توصل إليها العالم كاوس تعتبر وسيلة سهلة يمكن تطبيقها على أي سطح مغلق يفترض وجوده، لحل المسائل التي تتعلق بالمجالات الكهربائية التي تتوفر فيها صفة التناظر.

3-6 تطبيقات على قانون كاوس

1. المجال الناشيء عن شحنة نقطية

المطلوب: إيجاد شدة المجال الكهربائي (E) في نقطة (p) الواقعة على بعد (r) من الشحنة (q).



1) نرسم سطح كاوسي بشكل كرة نصف قطرها (r) ومركزها (q).

2) نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

بما أن مجال الشحنة النقطية يكون شعاعي ومتساوي لجميع نقاط السطح وعمودي على السطح

$$\therefore\ E\oint dS = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

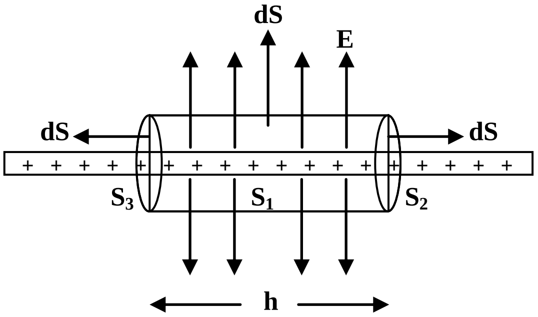
$$E\,S = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{q}{r^2}$$

2. المجال الناشيء عن خط لا نهائي الطول من الشحنات

سلك طويل مستقيم طوله غير محدود يحمل شحنة موجبة موزعة بصورة منتظمة بكثافة فيض قدرها (λ) احسب شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة قدرها (a) عن الشحنة.



بما أن توزيع الشحنة متجانس..

∴ المجال الناشيء عن الخط يكون باتجاه شعاعي منبثق من الخط، وإن مقدار هذا المجال متساوي لجميع النقاط التي تبعد عن الخط مسافة قدرها (a).

1) ∴ أفضل سطح كاوس ملائم، هو سطح اسطواني دائري مغلق نصف قطره (a) وطوله (h) ومحوره منطبق على الخط.

2) نطبق قانون كاوس $\oint \vec{E}.d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_\circ}=\oint E\cos\theta\, dS$

لكي نحسب التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال، نقسم السطح إلى ثلاث أقسام أو سطوح هي (S_1، S_2، S_3).

$$\therefore \oint_S E\cos\theta\, dS=\int_{S_1} E\cos\theta\, dS+\underbrace{\int_{S_2} E\cos\theta\, dS}_{0\ (\theta=90^\circ)}+\underbrace{\int_{S_3} E\cos\theta\, dS}_{0\ (\theta=90^\circ)}=\frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore \int_{S_1} E\cos\theta\, dS=\frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\int dS=\frac{\lambda h}{\varepsilon_\circ}\qquad [\theta=0]\qquad (q'=\lambda h)$$

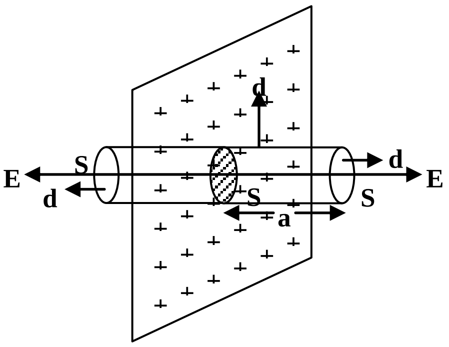
$$E\,S=\frac{\lambda h}{\varepsilon_\circ}\qquad [S=2\pi ah]$$

$$E(2\pi ah)=\frac{\lambda h}{\varepsilon_\circ}$$

$$\boxed{\therefore E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ a}}$$

3. المجال الناشيء عن شحنة موزعة بشكل صفيحة مستوية

صفيحة رقيقة ومستوية ولا نهائية من الشحنات الموجبة موزعة بانتظام بكثافة سطحية قدرها (σ)، جد شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة قدرها (a) عن مستوى الصفيحة.



1− نختار سطح كاوس وهو عبارة عن اسطوانة تسمى (pill box) (علبة الأقراص) مساحة مقطعها (S) وارتفاعها (2a)، بحيث يكون محور الاسطوانة عمودياً على مستوى الشحنة.

ملاحظة: إن المجال الناشيء عن الصفيحة يكون عمودياً على المستوى ومبتعداً عنه ومقداره متساوي.

2− نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}.\Delta\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S E\cos\theta\, dS = \int_{S_1} E\cos\theta\, dS + \int_{S_2} E\cos\theta\, dS + \int_{S_3} E\cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$0\ \ (\theta = 90°) \quad ES\ \ (\theta = 0) \quad ES\ \ (\theta = 0)$$

$$\therefore \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = 0 + ES + ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

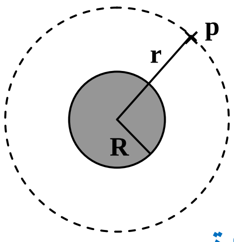
$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_\circ} \qquad [q' = \sigma S]$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}}$$

4. المجال الناشيء عن شحنة كروية الشكل

شحنة موجبة مقدارها (q) موزعة بانتظام بشكل كرة نصف قطرها (R).

جد شدة المجال الكهربائي أ. خارج الكرة ب. داخل الكرة



ملاحظة: إن الجسم الكروي غير موصل، بما أن التوزيع متجانس ∴ المجال الكهربائي يكون شعاعي ومنبثق من مركز الكرة، وإن مقدار المجال يكون متساوي لجميع النقاط التي تبعد من مركز الشحنة.

أ. خارج الكرة

1) نختار سطح كاوس بشكل كرة نصف قطرها (r) بحيث تمر بالنقطة المراد إيجاد المجال فيها (p).

2) نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} = \oint E\cos\theta\, dS$$

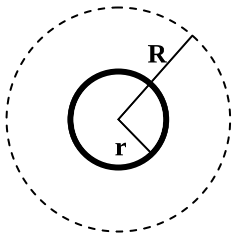
$$\therefore E\oint dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{q'}{r^2}}$$

ب. $r < R$ داخل الكرة



1) نرسم سطح كاوس بشكل كرة نصف قطرها (r) متحدة المركز مع الكرة الأصلية بحيث $r < R$.

2) نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} = \oint E\cos\theta\, dS$$

q' = الشحنة الموجودة ضمن سطح كاوس

$$\therefore E\,S = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} \quad .....(1)$$

$$q' = \rho\, v'$$

ρ = الكثافة الحجمية للشحنة

v' = حجم سطح كاوس

$$\rho = \frac{q}{total\, volum} = \frac{q}{(\frac{4}{3}\pi R^3)}$$

$$v' = (\frac{4}{3}\pi r^3)$$

$$\therefore q' = \frac{q}{(\frac{4}{3}\pi R^3)}(\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{3q}{4\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = q(\frac{r^3}{R^3}) \Longrightarrow q' = q(\frac{r^3}{R^3}) \;.....(2)$$

نعوض معادلة (2) في (1)

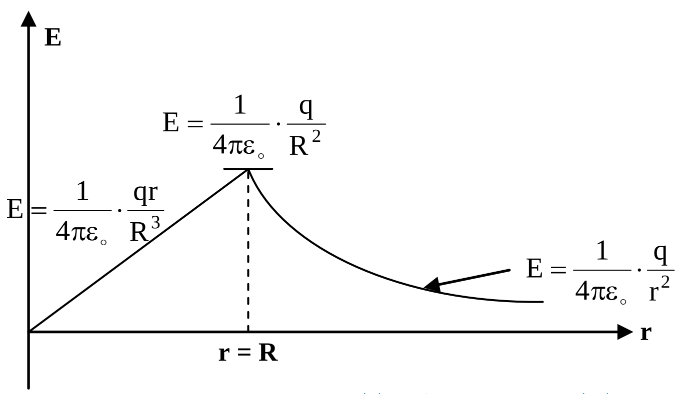
$$ES = \frac{q}{\varepsilon_\circ}(\frac{r^3}{R^3}) \qquad [S = 4\pi r^2]$$

$$\therefore E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}(\frac{r^3}{R^3})$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot(\frac{qr}{R^3})}$$

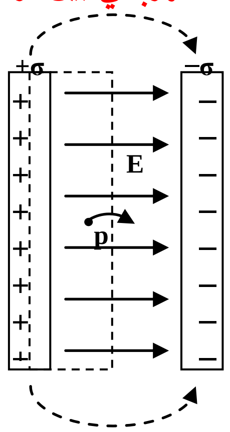
من هذه العلاقة نستنتج أن شدة المجال يساوي صفر في مركز الكرة ويزداد خطياً بالابتعاد عن مركز الكرة.

على سطح الكرة $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{q}{R^2}$



العلاقة بين شدة المجال (E) ونصف القطر (r) للشحنة الكروية.

3-7 المجال الكهربائي بين لوحين موصلين متوازيين



الشكل المجاور يبين لوحين موصلين متوازيين مشحونين بنفس المقدار أحدهما موجب والآخر سالب.

إن المجال الكهربائي الناشيء عنهما يكون بصورة عامة منتظماً، عدا المنطقة قرب حافتي اللوحين حيث يكون غير منتظم هناك. ولكن إذا كانت المسافة بين اللوحين صغيرة بالمقارنة مع بعديهما أمكننا إهمال تأثير الحافتين واعتبار المجال منتظماً كما في حالة المتسعات،عندئذ تكون الشحنة موزعة بانتظام على وجهي اللوحين المتقابلين، ولإيجاد شدة المجال باستخدام قانون كاوس، نختار سطح كاوس بشكل متوازي المستطيلات، بحيث تكون إحدى قاعدتيه داخل اللوح الموجب والأخرى في الفراغ كما مبين في الشكل أعلاه.

1. إن الفيض خلال قاعدة سطح كاوس التي تقع داخل اللوح يساوي صفر لأن شدة المجال داخل الموصل تساوي صفر.
2. إن الفيض خلال السطوح الجانبية لسطح كاوس يساوي صفر أيضاً لأن $(\theta = 90°)$.

∴ الفيض الكلي خلال سطح كاوس يكون

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\oint dS = \frac{\sigma A}{\varepsilon_\circ} \quad (q' = \sigma A)$$

حيث أن $q' = \sigma A$ = الشحنة الكلية داخل سطح كاوس

$$\therefore EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_\circ} \qquad (\oint dS = A)$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}}$$

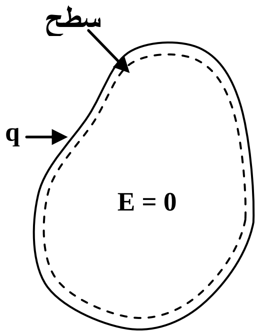
ولا غرابة فيما يبدو من عدم اعتبار الشحنات السالبة على الآخر عند إيجاد شدة المجال بتطبيق قانون كاوس، ذلك أن هذه الشحنات سوف تؤثر على الشحنات الموجبة في اللوح الآخر وتجعلها تتجمع على سطح واحد فقط وهو السطح المقابل، ولو اخترنا سطح كاوس بحيث يقطع اللوح السالب بدل اللوح الموجب لحصلنا بالطبع على النتائج نفسها.

3-8 مجال الجسم المشحون عندما يكون في حالة اتزان كهروستاتيكي

من المعلوم أن الجسم الموصل يحتوي على شحنات طليقة، لها حرية تامة في الحركة عند تأثرها بالمجال الكهربائي. فإذا وضعت شحنة إضافية (سالبة كانت أم موجبة) على جسم موصل فإنها تولد مجالات كهربائية في داخله ونتيجة لذلك تتحرك الشحنات الطليقة مكونة تيارات موضعية تعمل على إعادة توزيع الشحنة مما يؤدي إلى تناقص شدة المجالات الكهربائية داخل الموصل ثم تلاشيها، عندئذ تتوقف هذه التيارات الكهربائية تلقائياً ويصبح الجسم الموصل في حالة **اتزان كهروستاتيكي (Electrostatic equilibrium)** أي تصبح الشحنات مستقرة في مواضعها، أما عملية إعادة توزيع الشحنة فيستغرق زمناً قصيراً عادة يمكن إهماله في أغلب الأحيان، وتحت الظروف الكهروستاتيكية **نستنتج أن المجال الكهربائي داخل الجسم الموصل يجب أن يكون صفراً.**

وبالاستعانة بقانون كاوس يمكن إثبات ما يلي:

إذا وضعت شحنة إضافية على جسم موصل معزول، استقرت جميعها على سطحه الخارجي.



شكل (1)

يبين شكل (1) جسماً موصلاً غير منتظم الشكل ومعزول، وقد أعطي شحنة إضافية قدرها (+q).

1. نرسم سطح كاوس داخل الموصل وعلى بعد قليل عن سطحه الحقيقي كما مبين في شكل (1).
2. نطبق قانون كاوس

$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

بما أن الجسم موصل

∴ (E) داخل سطح كاوس = 0

∴ ϕ خلال سطح كاوس = 0

$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} = 0$$

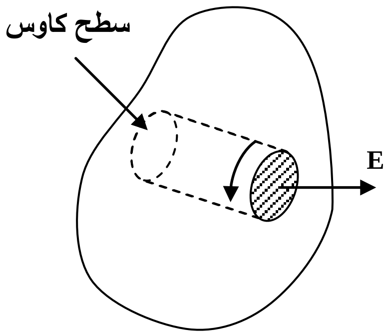
واستناداً إلى قانون كاوس، فإن الشحنة الكلية الموجودة ضمن سطح كاوس أيضاً صفر $(q' = 0)$.

∴ الشحنة الإضافية (q) يجب أن تكون بأجمعها خارج سطح كاوس. ولما كان سطح كاوس مرسوماً تحت السطح الحقيقي للموصل بمسافة جداً صغيرة.

∴ **نستنتج من ذلك أن الشحنة (q) الإضافية يجب أن تستقر على السطح الحقيقي للموصل.**

3-9 مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي خارج الجسم الموصل عند النقاط التي تبعد مسافات صغيرة عن سطحه

إن اتجاه المجال يجب أن يكون عمودياً على السطح ونحو الخارج. فلو كان المجال غير عمودي على السطح لكانت له مركبة موازية للسطح، ولتأثرت الشحنات الموجودة على السطح بهذه المركبة وكونت تيارات سطحية، وهذا مخالف لما افترضناه من أن الموصل في حالة اتزان كهروستاتيكي وأن الشحنات هي ثابتة في مواضعها على سطحه، لذا يجب أن يكون المجال عمودياً على سطح الموصل المشحون.



شكل (2)

أما مقدار شدة المجال فيمكن حسابه من قانون كاوس كما يلي:

1. نختار سطح كاوس بشكل اسطوانة صغيرة (pill box) عمودية على سطح الموصل كما مبين في شكل (2). مساحة مقطعها (S) بحيث أن إحدى قاعدتيها تقع داخل الموصل والأخرى خارجه مباشرة.

ϕ (الفيض) خلال القاعدة التي تقع داخل الموصل = 0

ϕ خلال السطح الاسطواني = 0

$$\therefore \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

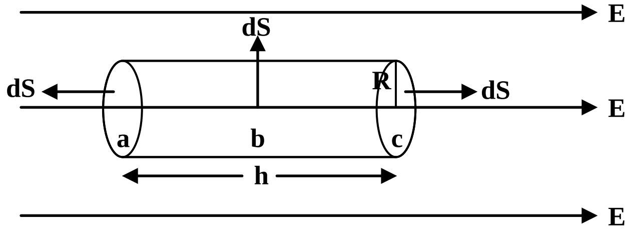
$$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_\circ}$$

حيث أن σ تمثل الكثافة السطحية للشحنة الموجودة على سطح الموصل وهي غالباً ما تكون متغيرة من نقطة لأخرى على سطح الموصل، إلا في بعض الحالات الخاصة (كأن يكون الموصل بشكل كرة)

$$\boxed{\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}}$$

مثال (1):

جد الفيض الكلي خلال السطح الاسطواني المغلق المفترض وجوده في مجال كهربائي منتظم شدته (E) بحيث يكون محور السطح الاسطواني موازياً للمجال. علماً أن نصف قطر السطح الاسطواني (R) وطوله (h).



$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\phi = \int_a \vec{E}.d\vec{S} + \int_b \vec{E}.d\vec{S} + \int_c \vec{E}.d\vec{S}$$

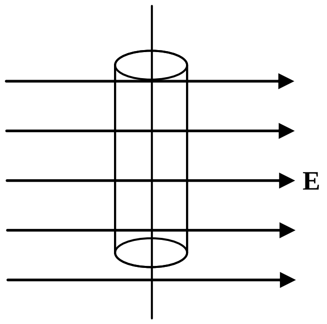
$$\phi = \int_a \vec{E}.d\vec{S} = \int E\cos 180^{\circ}\, dS = -E\int dS = -E(\pi R^2)$$

$$\int_c \vec{E}.d\vec{S} = \int E\cos 0\, dS = E(\pi R^2)$$

$$\int_b \vec{E}.d\vec{S} = E\cos(90^{\circ}) = 0$$

$$\therefore \phi = -ES + ES + 0 = 0$$

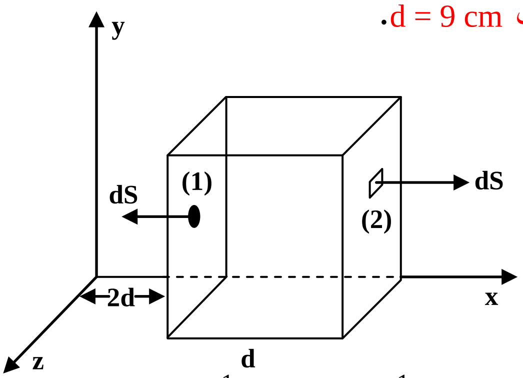
$\therefore$ $\phi = 0$ أي أن عدد خطوط القوة التي تدخل السطح = عدد الخارجة لأن المجال منتظم.



مثال (2):

إذا كانت المركبات الثلاثة المتعامدة لشدة المجال الكهربائي هي
$E_x = 10^4 x^{\frac{1}{2}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0$.

1. احسب الفيض الكلي خلال سطوح المكعب المبين في الشكل المجاور .
2. مقدار الشحنة الموجودة في داخل المكعب، علماً بأن طول ضلع المكعب $d = 9\ cm$.



1. نعتبر أولاً وجه المكعب (S_1) المؤشر بالرقم (1). إن هذا السطح عمودي على مركبة المجال E_x ويبعد مسافة (2d) عن نقطة الأصل.

$$\therefore E_x = 10^4 x^{\frac{1}{2}} = 10^4 (2d)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض عن ($d = 9$ cm) = (0.09 m)

$$\therefore E_x = 10^4 (2\times 0.09)^{\frac{1}{2}} = 4.2\times 10^3\ N/C$$

وإن هذا المقدار ثابت لجميع نقاط السطح.

$$\phi_1 = \int_{S_1} E_x \cos\theta\, dS = 4.2\times 10^3 \cos(180^{\circ}) \int_{S_1} dS$$

$$\phi = -E_x S_1 = -E_x (d^2) \qquad (\text{حيث مساحة } S_1 = d^2)$$

$$\therefore \phi = -4.2\times 10^3 \times (0.09)^2 = -34\ Nm^2/C$$

أما سطح المكعب الآخر (S_2) يبعد مسافة (3d) عن نقطة الأصل

$$\therefore E_x = 10^4 x^{\frac{1}{2}} = 10^4 (3d)^{\frac{1}{2}} = 10^4 (3 \times 0.09)^{\frac{1}{2}} = 5.2 \times 10^3 \ N/C$$

وبنفس الطريقة نجد الفيض خلال السطح (S_2)، حيث $\theta = 0$.

$$\therefore \phi_2 = 5.2 \times 10^3 \times (0.09)^2 = 42 \ Nm^2/C$$

أما مقدار الفيض خلال السطوح الأخرى = صفر، لأن مركبات المجال E_y، E_z على هذه السطوح تساوي صفر.

$$\therefore \phi\,(total) = \phi_1 + \phi_2 = 42 - 34 = 8 \ Nm^2/C$$

2. لحساب مقدار الشحنة التي يجب أن يحتويها هذا المكعب نستخدم قانون كاوس

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore q = \phi \varepsilon_\circ = (8.85 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{Nm^2})(8 \ \frac{Nm^2}{C})$$

$$q = 70.8 \times 10^{-12} \ C$$

مثال (3):

وضعت شحنة نقطية موجبة قدرها $(10 \ \mu C)$ في مركز سطح كاوسي مكعب الشكل طول ضلعه $(20 \ cm)$. احسب فيض المجال الكهربائي خلال هذا السطح المغلق.

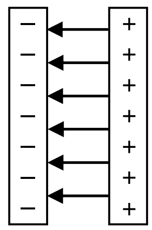
قانون كاوس $\phi = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$

$$\therefore \phi = \frac{10 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^6 \ \frac{Nm^2}{C}$$

مثال (4):

لوحان معدنيان يحملان شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالإشارة، المسافة بينهما $(1.0 \ cm)$، فإذا علم أن شدة المجال الكهربائي المتكون في المنطقة بين اللوحين $50 \ N/C$ ومساحة كل من اللوحين تساوي $(100 \ cm^2)$، جد شحنة كل من اللوحين.

إن شدة المجال الكهربائي المتكون في الفضاء بين اللوحين هو



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \ .... \ (1)$$

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{\text{الشحنة الكلية}}{\text{المساحة}}$$

$$\therefore q = \sigma A$$

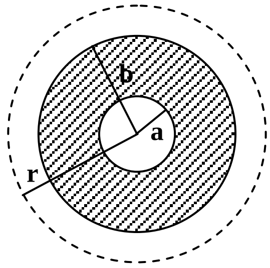
$\sigma = E\varepsilon_\circ$ من معادلة (1)

$$\therefore q = E\varepsilon_\circ A = 50 \times 100 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}$$

$$q = 4.4 \times 10^{-12} \ C$$

مثال (5):

يبين الشكل المجاور جسماً عازلاً بشكل كرة مجوفة نصف قطرها (b) ونصف قطر التجويف في داخلها (a)، وقد وزعت شحنة موجبة بشكل منتظم في جميع نقاطها بكثافة قدرها $\rho\ (\frac{C}{m^3})$. المطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي بدلالة ρ عند النقاط التي تبعد مسافة قدرها (r) عن مركز الكرة حيث $1.\ r > b \quad 2.\ a < r < b$



.1

أ. نرسم سطح كاوس بشكل كرة نصف قطرها (r) بحيث $r > b$

من التناظر يتضح أن المجال الكهربائي يكون بالاتجاه الشعاعي وعمودياً على سطح كاوس، وأن مقدار هذا المجال يكون متساوي عند جميع نقاط السطح.

ب. نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = E\int dS \qquad [\theta = 0]$$

$$\therefore ES = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$ حيث $(4\pi r^2)$ تمثل مساحة سطح كاوس

ولما كانت الشحنة بأجمعها واقعة ضمن سطح كاوس

$$\therefore q = \rho\,(\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3) = \rho\,\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) \qquad [\rho = \frac{q}{V}]$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_\circ} = \frac{1}{4\pi r^2\varepsilon_\circ}\rho\,\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}(\frac{b^3 - a^3}{r^2})$$

2. لإيجاد شدة المجال الكهربائي عند النقطة $a < r < b$

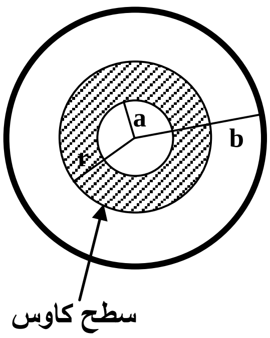
أ. نرسم سطح كاوس بشكل كرة نصف قطرها (r) بحيث $a < r < b$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

الشحنة الواقعة ضمن سطح كاوس = q'

$$q' = \rho\,(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3)$$

$$\therefore \oint E\cos\theta\, dS = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3)$$



$$ES = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3)$$

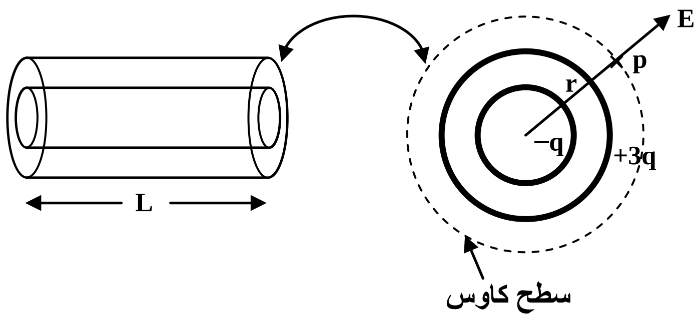
$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)$$

$$\therefore E = \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}(\frac{r^3 - a^3}{r^2}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}(r - \frac{a^3}{r^2})$$

مثال (6):

يبين الشكل المجاور مقطعاً لاسطوانتين مجوفتين معدنيتين طويلتين طولهما (L).
الاسطوانة الداخلية مشحونة بشحنة سالبة قدرها (−q) والخارجية بشحنة موجبة قدرها (+3q). جد باستخدام قانون كاوس:

1. شدة المجال خارج الاسطوانة الخارجية.
2. شدة المجال خارج المنطقة بين الاسطوانتين.
3. كيفية توزيع الشحنة على الأسطوانة الخارجية.



1.خارج الاسطوانة الخارجية

أ. نرسم سطح كاوس بشكل اسطوانة نصف قطرها (r) وطولها (h)، من التناظر يتبين أن مقدار شدة المجال متساوٍ لجميع نقاط السطح الاسطواني، وأن اتجاه المجال عمودياً عليه.

ب. نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E\cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\int dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

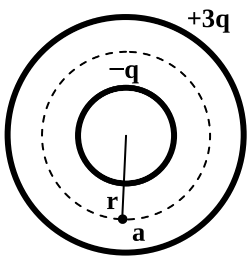
$$q' = (\frac{3q - q}{L})h$$

$$\therefore E\,(2\pi rh) = (\frac{3q - q}{L})\frac{h'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{2q}{2\pi\varepsilon_\circ rL}}$$

اتجاه E يكون باتجاه شعاعي إلى الخارج

2. بين الاسطوانتين



أ. نرسم سطح كاوس بشكل اسطوانة نصف قطرها (r) وطولها (h) بحيث

$a < r < b$

ب. نطبق قانون كاوس

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$q' = (\frac{-q}{L})h$$

$$\therefore \oint E\cos\theta\, dS = (\frac{-q}{L})\frac{h}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\oint dS = (\frac{-q}{L})\frac{h}{\varepsilon_\circ}$$

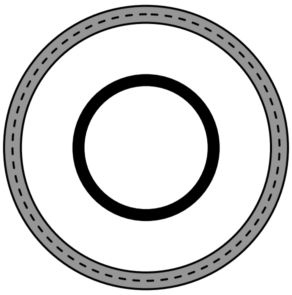
$$ES = (\frac{-q}{L})\frac{h}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(2\pi rh) = (\frac{-q}{L})\frac{h}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore E = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_\circ rL}$$

وتدل إشارة الناقص على أن الشحنة سالبة وأن اتجاه المجال نحو الداخل

3. نتخيل سطح كاوس بشكل اسطوانة موجودة داخل الاسطوانة المجوفة الخارجية كما مبين في الشكل المجاور ولما كانت الاسطوانة الخارجية موصلة.



∴ شدة المجال داخلها يساوي صفر

$E = 0$

$$\therefore \phi = 0$$

$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = 0$$

∴ الشحنة داخل سطح كاوس q في هذه الحالة [الناتج من جمع الشحنة على الاسطوانة الداخلية مع الشحنة على السطح الداخلي للاسطوانة الخارجية] يجب أن تساوي صفر.

وبما أن مقدار الشحنة على الاسطوانة الداخلية يساوي $(-q)$.

إذن يجب أن يكون مقدار الشحنة على السطح الداخلي للاسطوانة الخارجية يساوي $(+q)$، وما تبقى من شحنة الاسطوانة الخارجية $(+2q)$ يجب أن يكون على سطحها الخارجي.

اسئلة الفصل الثالث

1) شحنة موجبة قدرها $(30 \times 10^{-6}\ C)$ وضعت في مركز سطح كروي نصف قطره 10 cm، احسب عدد خطوط القوة التي تنفذ خلال هذا السطح.

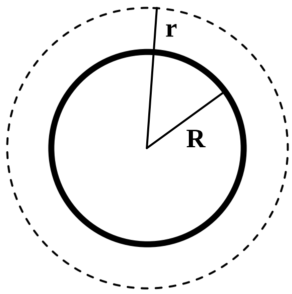
$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = \frac{30 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \times 10^{6}\ Nm^{2}/C$$

2) سطح كروي موصل نصف قطره (R) يحمل شحنة موجبة كثافتها السطحية (σ). بواسطة قانون كاوس أوجد شدة المجال الكهربائي عند نقطة:

أ. خارج السطح الكروي ب. داخل السطح الكروي

أ.خارج الكرة

1. نرسم سطح كاوس بشكل كرة متحدة المركز مع الكرة المشحونة
2. نطبق قانون كاوس



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

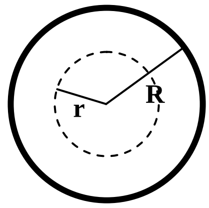
$$\oint E \cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E \int dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} \qquad [\theta = 0]$$

$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} \qquad [\, q' = \sigma S = \sigma 4\pi R^2 \,]$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_\circ r^2}$$



ب. داخل الكرة

لأن الشحنة تستقر على سطح الجسم الموصل $\rightarrow E = 0$

3) إذا علمت أن شدة المجال الكهربائي الناشيء عن كرة موصلة مشحونة عند نقطة قريبة من السطح يساوي 10^4 N/C. احسب الكثافة السطحية لشحنة الكرة.

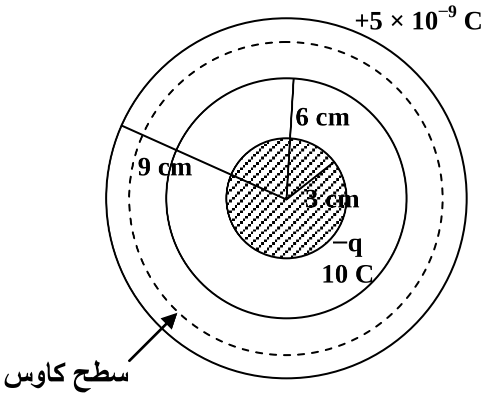
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

$$10^4 = \frac{\sigma}{8.8 \times 10^{-12}} \qquad \therefore \sigma = 8.8 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

4) كرة موصلة معزولة نصف قطرها (3 cm) تحمل شحنة موجبة قدرها 10^{-9} C تحيط بها كرة مجوفة موصلة معزولة نصف قطرها الداخلي (6 cm) والخارجي (9 cm) تحمل شحنة سالبة قدرها (5×10^{-9} C)، استخدام قانون كاوس لحساب:

1. مقدار الشحنة المستقرة على السطح الداخلي للكرة المجوفة وكذلك على سطحها الخارجي.
2. شدة المجال الكهربائي عند النقاط التي تبعد مسافات قدرها (12 cm) و (4.5 cm) و (7 cm) من المركز.

1. نرسم سطح كاوس داخل التجويف بشكل كرة نصف قطرها (r)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E \cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$E = 0 \rightarrow$ داخل الجسم الموصل

$$\therefore 0 = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} \quad [q' = 0]$$

$$\therefore q' = 10^{-9} + q''$$

$$\therefore 0 = 10^{-9} + q''$$

q'' = الشحنة المستقرة على السطح الداخلي للكرة المجوفة.

$$0 = +10^{-9} + q''$$

$$\therefore q'' = -10^{-9}\ C$$

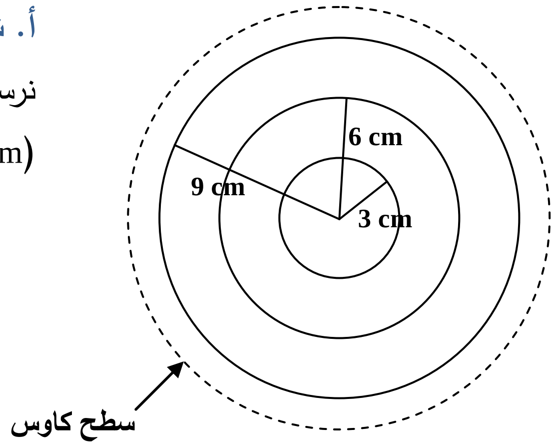
∴ الشحنة المستقرة على السطح الخارجي للكرة المجوفة هو:

$5 \times 10^{-9} - 10^{-9} = 4 \times 10^{-9}$ C

.2

أ. شدة المجال عند النقطة التي تبعد (12 cm) من المركز.

نرسم سطح كاوس بشكل كرة متحدة المركز مع الكرتين ونصف قطرها (12 cm)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint E \cos\theta\, dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\oint dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{-5\times10^{-9}+10^{-9}}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(4\pi\times(12\times10^{-2})^2) = \frac{-4\times10^{-9}}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore E_{12} = \frac{4\times10^{-9}}{8.85\times10^{-12}\times4\pi\times(12\times10^{-2})^2}$$

$$E_{12} = (\qquad\qquad)\ \ N/C$$

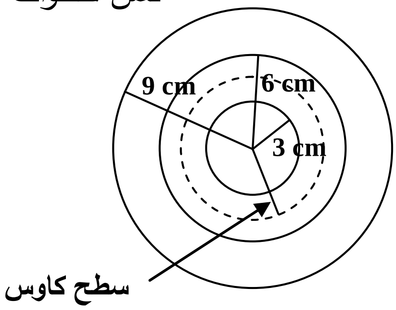
ب. شدة المجال عند النقطة التي تبعد مسافة قدرها (4.5 cm) من المركز

نفس خطوات الحل في الفقرة (أ)

$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} \Longrightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(4\pi\times(4.5\times10^{-2})^2) = \frac{10^{-9}}{\varepsilon_\circ}$$

$$E_{4.5} = (\qquad\qquad)\,N/C$$

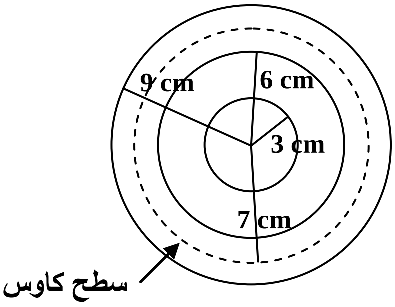


جـ. شدة المجال الكهربائي عند النقطة التي تبعد مسافة قدرها (7 cm) من المركز.

$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} \Longrightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

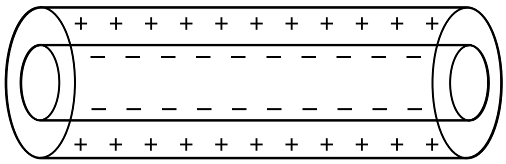
$$E(4\pi\times(7\times10^{-2})^2) = \frac{+10^{-9}-10^{-9}}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore E = 0$$

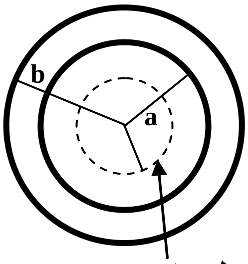


5) اسطوانتان طويلتان متحدتا المحور، الاسطوانة الداخلية نصف قطرها (a) وتحمل شحنة سالبة قدرها $\lambda\frac{C}{m}$، أما الاسطوانة الخارجية فنصف قطرها (b) وتحمل شحنة موجبة بنفس المقدار، استخدم قانون كاوس لإيجاد شدة المجال الكهربائي عند النقاط

1. $r < a$ 2. $r > b$ 3. $a < r < b$



1. r < a

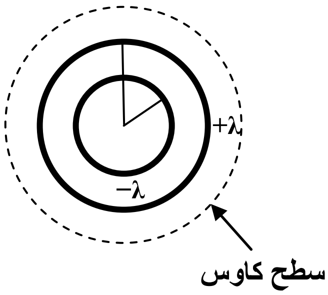


نرسم سطح كـاوس بشكل اسطوانة متحدة المحور مـع الاسطوانتين نصف قطرها (r) وطولها (h)

$\therefore E = 0$

لأن سطح كاوس داخل الجسم الموصل وإن شدة المجال داخل الجسم الموصل يساوي صفر.

2. r > b



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E \oint dS = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

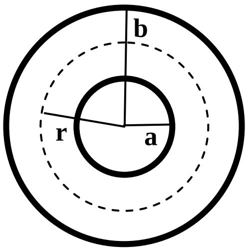
$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(4\pi rh) = \frac{\lambda h - \lambda h}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore E = 0$$

3. a < r < b

نفس الخطوات في (1) و (2)



$$ES = \frac{q'}{\varepsilon_\circ}$$

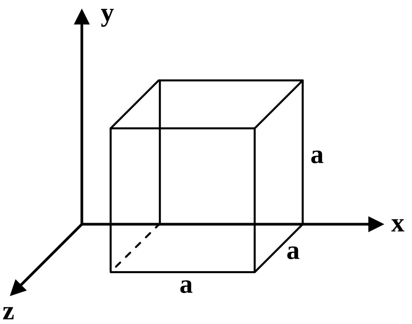
$$E(2\pi rh) = \frac{-\lambda h}{\varepsilon_\circ}$$

$$\therefore E = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ r}$$

تمارين قانون كاوس

1. سطح كروي موصل نصف قطره (10 cm) يحمل شحنة كثافتها السطحية $-10^{-12}\ \text{coul/cm}^2$. احسب شدة المجال الكهربائي عند النقاط أ) على بعد 8 cm من مركز الكرة. ب) على بعد 15 cm من مركز الكرة.

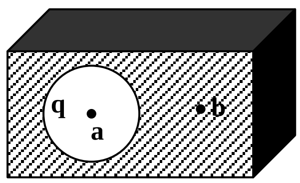
2. إذا كانت مركبات المجال الكهربائي في الشكل المجاور كالآتي:



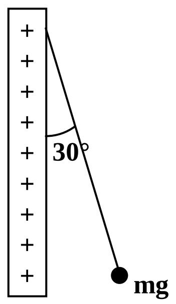
$$E_x = bx^{1/2}$$
$$E_y = E_2 = 0$$
$$b = 800\ \text{nt}/\text{C.m}^{1/2}$$

احسب أ) الفيض الكهربائي خلال المكعب.
ب) الشحنة ضمن المكعب مستخدماً قانون كاوس.

3. لوحان متوازيان كبيران كثافة شحنة الأول السطحية $1n\ \text{C/m}^2$ والثاني $+3n\ \text{C/m}^2$. احسب شدة المجال الكهربائي عند نقطة أ) واقعة بين اللوحين. ب) خارج اللوحين يميناً ويساراً.



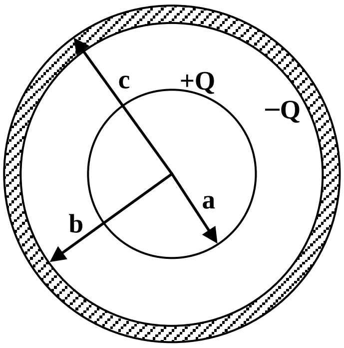
4. نقطة مشحونة بشحنة مقدارها 1×10^{-7} coul موضوعة في مركز فجوة كروية الشكل (كما في الشكل المجاور) نصف قطرها 3 cm موجودة داخل قطعة معدنية. استخدم قانون كاوس لإيجاد شدة المجال الكهربائي عند النقطة (a) في منتصف المسافة بين مركز الفجوة وسطحها ثم احسب شدة المجال عند النقطة (b) خارج الفجوة.



5. كرة معدنية كتلتها 1×10^{-3} gm وشحنتها 2×10^{-8} coul معلق بخيط من الحرير يصنع زاوية مقدارها 30° مع صفيحة كبيرة غير موصلة احسب كثافة الشحنة السطحية للصفيحة.

6. اسطوانتان موصلتان متحدتا المحور طويلتان تحمل الاسطوانة الأولى (الداخلية) شحنة مقدارها $(-q)$ وتحمل الاسطوانة الخارجية شحنة مقدارها $(+q)$. فإذا كانت الشحنة موزعة بانتظام على الطول بكثافة الشحنة الطولية λ. استخدم قانون كاوس لإيجاد شدة واتجاه المجال الكهربائي عند نقطة تبعد بمسافة r عن المحور إذا كانت أ) $r < a$ ب) $r > b$ جـ) $a < r < b$، حيث أن كل من a و b هما نصف أقطار الاسطوانتين الداخلية والخارجية على التوالي.

7. كرة من مادة عازلة نصف قطرها a موضوعة في مركز قشرة كروية موصلة نصف قطرها الداخلي والخارجي b و c على التوالي كما في الشكل المبين. وزعت شحنة مقدارها Q+ بصورة منتظمة خلال الكرة الداخلية بكثافة شحنة حجمية (ρ coul/m^3) وتحمل القشرة الخارجية شحنة مقدارها Q−. باستخدام قانون كاوس جد شدة المجال الكهربائي واتجاهه:



أ) داخل الكرة $r < a$

ب) بين الكرة والقشرة $a < r < b$

ج) داخل القشرة الكروية $b < r < c$

د) خارج القشرة الكروية $r > c$