University of Baghdad

College of Education for pure Sciences Ibn Al-Hathiam

Department of Mathematics

Dr. Huda and Dr. Adil

Chapter One

NUMERICAL ANALYSIS

Numerical Analysis is the branch of mathematics that provides tools and methods for solving mathematical problems in numerical form.

In numerical analysis we are mainly interested in implementation and analysis of numerical algorithms for finding an approximate solution to a mathematical problem.

هو فرع من فروع الرياضيات الذي يوفر الادوات والاساليب لحل المشكلات الرياضيه وهنا نحن مهتمون بايجاد وتنفيذ الخوارزميات العدديه التي تسمح لنا بايجاد الحلول بأية دقة مطلوبة باستخدام عدد معدود من الخطوات .

NUMERICAL ALGORITHM

A complete set of procedures which gives an approximate solution to a mathematical problem.

وتعرف الخوارزمية بأنها مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية مصممة بشكل يؤدي إلى حل المسألة المعطاة.

STABLE ALGORITHM

Algorithm for which the cumulative effect of errors is limited, so that a useful result is generated is called stable algorithm. Otherwise **Unstable.**

NUMERICAL STABILITY

Numerical stability is about how a numerical scheme propagate error.

NUMERICAL ITERATION METHOD

A mathematical procedure that generates a sequence of improving approximate solution for a class of problems i.e. the process of finding successive approximations.

CONVERGENCE CRITERIA FOR A NUMERICAL COMPUTATION

If the method leads to the value close to the exact solution, then we say that the method is convergent otherwise the method is divergent. **i.e.** $\lim_{n\to\infty} x_n = r$

Why we use numerical iterative methods for solving equations?

As analytic solutions are often either too tiresome or simply do not exist, we need to find an approximate method of solution.

هناك مسائل رياضية عديدة يمكن إيجاد الحلول المضبوطة لها بسهولة مثل إيجاد جذري المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ أو إيجاد قيمة التكامل $\int_0^1 x^2 dx$. ولكن في الغالب ليس من السهل إيجاد الحلول المضبوطة للعديد من المسائل مثل المعادلات الجبرية ذات القوى غير الصحيحة أو بعض المعادلات غير الخطية مثل: $x = sinx$ او قيمة التكامل $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

RATE OF CONVERGENCE OF AN ITERATIVE METHOD

Suppose that the sequence (x_k) converges to **r** then the sequence (x_k) is said to converge to **r** with order of convergence **a** if there exist a positive constant **P** such that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-r|}{|x_{k-r}|^a} = \lim_{k\to\infty} \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k{}^a} = P$$

Thus if a=1 , **the convergence is linear. If a=2 , the convergence is quadratic and so on.** Where the number a is called convergence factor.

ORDER OF CONVERGENCE OF THE SEQUENCE

Let $(x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots)$ be a sequence that converges to a number **r** and set $\epsilon_n = r - x_n$. If there exist a number **a** and a positive constant **c** such that $\lim_{k\to\infty} \frac{|\epsilon_n + 1|}{|\epsilon_n|^a} = c$. Then **a** is called order of convergence of the sequence and **c** **the asymptotic error constant.**

ACCURACY Accuracy means how close are our approximations from exact value.

CONDITION OF A NUMERICAL PROBLEM

A problem is **well conditioned** if small change in the input information causes **small change** in the output. Otherwise it is ill conditioned.

STEP SIZE, STEP COUNT, INTERVAL GAP

The common difference between the points i.e. $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$ is called step size .

University of Baghdad

College of Education for pure Sciences Ibn Al-Hathiam

Department of Mathematics

ERROR ANALYSIS

ERROR: Error is a term used to denote the amount by which an approximation fails to equal the exact solution.

بما إن الحل العددي لمسألة ما يكون عادة قيمة تقريبية للحل المضبوط لتلك المسألة ، لذا تكون هذه القيمة محملة بأخطاء من المهم قياسها لمعرفة دقة الحل.

SOURCE OF ERRORS: Numerically computed solutions are subject to certain errors. Mainly there are several types of errors

1. INHERENT (EXPERIMENTAL) ERRORS

Errors arise due to assumptions made in the mathematical modeling of problems. Also arise when the data is obtained from certain physical measurements of the parameters of the problem **i.e. errors arising from measurements.**

يظهر هذا النوع من الخطأ في التجارب العملية فعند حساب بيانات المسألة نعتمد على الملاحظة والقياس وان الدقة في هاتين الحالتين تكون محدودة مثال على ذلك عند حساب ضغط الدم أو الفولتية أو درجة الحرارة يظهر هذا النوع من الخطأ نتيجة التعامل مع الأعداد غير النسبية (π ، $\sqrt{2}$ ، ...).

2. Residual error or truncation error:

Errors arise when approximations are used to estimate some quantity. These errors corresponding to the facts that a finite (infinite) sequence of computational steps necessary to produce an exact result is "truncated" prematurely after a certain number of steps.

يظهر هذا النوع من الخطأ عندما تكون الدالة $f(x)$ على شكل متسلسلة غير منتهية وفي هذه الحالة عند حساب قيمة الدالة عند حد معين وبالتالي يظهر خطأ يكون مساوي لعدد الحدود المحذوفة.

$$f(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} / - \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

How Truncation error can be removed? Use exact solution.

Error can be reduced by applying the same approximation to a larger number of smaller intervals or by switching to a better approximation.

3. ROUND OFF ERRORS *(Rounding and Chopping)*

Errors arising from the process of rounding off during computations. These are also called chopping i.e. discarding all decimals from some decimals on

وهذه أكثر أنواع الأخطاء شيوعاً فعندما نتعامل مع أعداد غير نسبية (غير منتهية) عندها لابد من بتر العدد بعد عدد معين من المراتب وفي هذه الحالة نلاحظ قيمة العدد على يمين اخر رقم غير مبتور فإذا كان اقل من (٥) فاننا نقطع العدد عند هذا الحد دون إضافة أي رقم إلى العدد الأصلي وهذا ما يعرف بالقطع ***(Chopping)*** أما إذا كانت قيمة العدد على يمين اخر رقم غير مبتور أكثر أو تساوي (٥) فاننا نضيف (١) إلى اخر رقم غير محذوف وهذا ما يعرف بالتدوير ***(Rounding)*** مثال على ذلك

$30.6753 \simeq 30.67531 \ldots$ (قطع)

$2.4674 \simeq 2.4673915 \ldots$ (تدوير)

ملاحظة: الحاسبة الالكترونية لا تدور العدد بل تقطعه.

4. Initial error/Error of the problem:

These are involved in the statement of problem itself. In fact, the statement of a problem generally gives an idealized model and not the exact picture of the actual phenomena. So the value of the parameter (s) involved can only be determined approximately.

5. Accumulated Error

An error whose degree or significance gradually increases in the course of a series of measurements or connected calculations. *Specifically* : an error that is repeated in the same sense or with the same sign

بعض الطرق العددية مثل الحلول العددية للمعادلات التفاضلية تتضمن تكراراً لمجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة ، فالخطأ في كل خطوة يزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة مما يسبب خطأ يسمى بالخطأ المتراكم.

Errors in Calculations

Absolute error: Let x be a real number and let x^* be an approximation. The **absolute error** in the approximation $x^* \approx$ x is defined as $E = |x - x^*|$.

Relative error is defined as the ratio of the absolute error to the size of x or the approximate value x^*, i.e., $Re = \frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{x}|}$ or $\boldsymbol{Re} = \frac{E}{|x^*|}$, which assumes $x \; and \; x^* \neq 0$

إذا كانت x تمثل القيمة المضبوطة و x^* تمثل القيمة التقريبية فان **الخطأ المطلق** يساوي القيمة المضبوطة – القيمة التقريبية تحت المطلق

ويعرف **الخطأ النسبي** حاصل قسمة الخطأ المطلق على مطلق القيمة المضبوطة وفي الحالات التي تكون فيها القيمة المضبوطة غير معلومة نستخدم بدلاً منها مطلق القيمة التقريبية

Example 1: Let 0.0005 be a real number and let 0.0003 be an approximation. Then find the value of the absolute error and the relative error.

E

$$Re = \frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{x}|} = \frac{0.0002}{|0.0005|} = 0.4$$

Example 2: Let x=100000, $x^* = 99950$ then find the value of the absolute error and the relative error.

$\boldsymbol{E = |x - x^*| = 50}$ ***and*** $\boldsymbol{Re = \frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{x}|} = \frac{50}{100000} = 0.0005}$

Example 3: Let x=0.000015 , $x^* = 0.000007$ then find the value of the absolute error and the relative error.

$$E = |x - x^*| = |0.000015 - 0.000007| = 0.000008$$

$$Re = \frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{x}|} = \frac{0.000008}{0.000015} = 0.53$$