

الفصل الرابع (الخواص الحرارية)

Thermal Properties

يمكن تعريف السعة الحرارية C : بأنها كمية الحرارة (طاقة) المسببة لتغيير درجة حرارة مادة ما درجة مئوية (او مطلقة) وهي صفة لنظام معين.

$$C = \Delta Q / \Delta T$$

اما السعة الحرارية النوعية: هي النسبة بين السعة الحرارية للنظام الجامع لتلك المادة الى كتلة ذلك النظام (أو عدد المولات في النظام) ووحداتها $J/kg.deg$ او $J/mol.deg$ قبل ظهور الميكانيك الكمي، كان الاعتقاد السائد ان ذرات المادة تُجبر على التذبذب حول نقاط ثابتة بتأثير قوى كبيرة نسبياً تنتج من تفاعلها مع بقية الذرات المحيطة بها، ولذلك تنجز كل ذرة حركة توافقية بسيطة ذات ثلاث درجات للحرية ولكل درجة من درجات الحرية ($K_B T$) من الطاقة (نصفها طاقة حركية والنصف الآخر كامنة) ولهذا تكون الطاقة الاهتزازية الكلية للبلورة U التي تحتوي على N من الذرات هي:

$$U = 3N K_B T$$

$$K_B \text{ ثابت بولتزمان} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ درجة الحرارة المطلقة}$$

ويمكن حساب الحرارة النوعية C_V عند ثبوت الحجم ولمول واحد يحوي على عدد فوكادرو (6.0225×10^{23}) من الذرات.

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = 3 N_A K_B$$

$$C_V = 3 \times 6.0225 \times 10^{23} \times 1.3805 \times 10^{-23}$$

$$C_V = 24.9422 \text{ J/mol.}^\circ K$$

إن ثابت الغازات

$$R = 8.3142 \text{ J/mol.}^\circ K$$

ولهذا ان الرقم اعلاه للحرارة النوعية C_V يكون مساوياً الى $3R$

$$\therefore C_V = 3R$$

ينص قانون دلونك وبييتيت: على انه عند درجات حرارة غير منخفضة جداً تكون الحرارة النوعية المولية عند حجم ثابت لجميع المواد الصلبة النقية مقارباً جداً لـ $3R$. وهذا ما وجد عملياً عند درجات الحرارة العالية.

اما عند درجات الحرارة المنخفضة فان هذه الحجة لا تصح حيث تقترب الحرارة النوعية للمواد الصلبة بأنواعها كافة تقترب من الصفر عند اقتراب درجة حرارة هذه المواد من درجة الصفر المطلق $0^\circ K$. لذلك لم يستطع الميكانيك الكلاسيكي إعطاء جواب صحيح لهذه المشكلة لذا وجب التوجه الى الميكانيك الكمي.

توجد عادة أنواع مختلفة من الحرارة النوعية لمادة ما، ويقصد بذلك وجود عدد غير محدود من الحرارة النوعية لمادة تماثل عدد الطرق غير المحدودة لتغيير درجة الحرارة لتلك المادة حيث يمكن تغيير درجة الحرارة بثبوت الحجم او الضغط او كليهما. ولذلك يركز الاهتمام على الحرارة النوعية المولية عند حجم ثابت C_V والحرارة النوعية المولية عند ضغط ثابت C_p

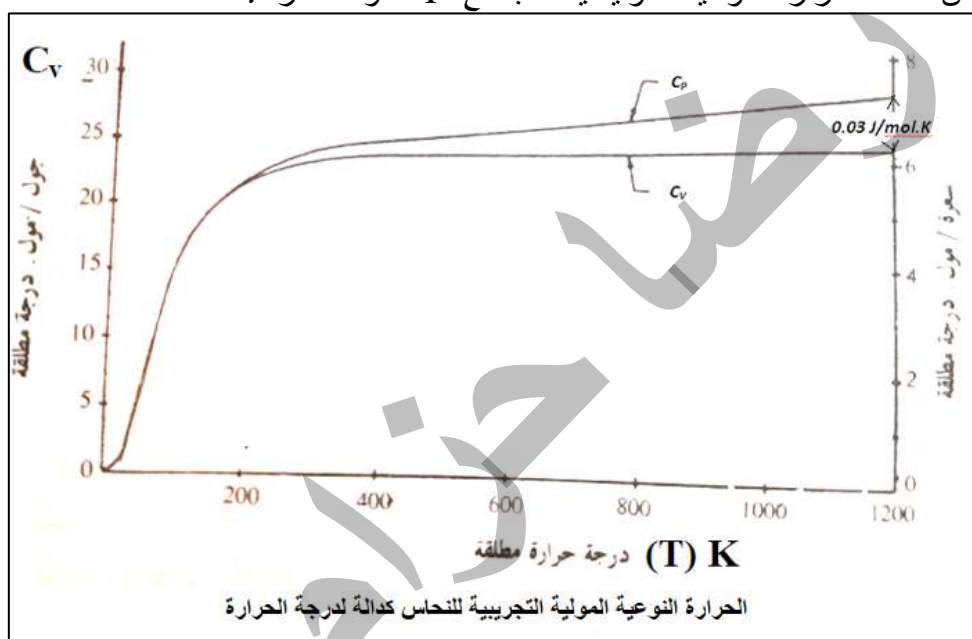
نماذج دراسة الحرارة النوعية هي

(النموذج الكلاسيكي) و (نموذج انشتاين) و (نموذج ديبياي)

الشكل التالي يوضح تغير الحرارة النوعية المولية عند حجم ثابت C_v والحرارة النوعية المولية عند ضغط ثابت C_p مع تغير درجات الحرارة لمعدن النحاس عند ضغط قدره ضغط جوي واحد.

- عند درجات حرارة منخفضة تكون C_p و C_v متساويتين تقريباً.
- بالقرب من درجة الصفر المطلق $0^\circ K$ فإن C_p و C_v تتناقصان بسرعة حتى تبلغان قيمة الصفر.
- عند درجات حرارة مرتفعة تستمر C_p بالزيادة بينما تكون C_v ثابتة تقريباً وتساوي $J/mol.\text{K}$. ولقد وجد ان قيمة C_v هذه هي أعظم قيمة يمكن ان تبلغها معظم المواد الصلبة عند درجات الحرارة العالية وتدعى عادة **بقيمة دلونك وبيتييت $3R$** . علماً ان الفرق بينها يكون صغيراً جداً للمواد الصلبة حوالي $0.03 J/mol.\text{K}$.

- ان هذا السلوك هو صفة مميزة لمعظم المواد الصلبة عل الرغم من تباينها الكبير في درجة الحرارة التي عندها يحدث الانخفاض الحاد للحرارة النوعية وكذلك أسلوب هذا الانخفاض حيث:
- ✓ الانخفاض الحاد للحرارة النوعية المولية يتناسب مع T للمواد المعدنية.
- ✓ الانخفاض الحاد للحرارة النوعية المولية يتناسب مع T^3 للمواد العازلة.



س) لأغراض القياسات الفعلية يكون تعيين الحرارة النوعية عند ضغط ثابت أكثر ملائمة من الحرارة النوعية عند حجم ثابت. علل ذلك؟

الجواب :

- لأنه عند درجات حرارة منخفضة تكون C_p و C_v متساويتين تقريباً.
- وعند درجات حرارة مرتفعة تستمر C_p بالزيادة بينما تكون C_v ثابتة تقريباً وتساوي $24.9422 J/mol.\text{K}$.
- لذلك فان تعيين الحرارة النوعية عند ضغط ثابت أكثر ملائمة لأغراض القياسات الفعلية. وهي التي تستخدم للتمييز بين معظم المواد الصلبة

س) الفرق بين C_p و C_v عند درجات حرارة مرتفعة يكون صغيراً جداً للمواد الصلبة حوالي $0.03 J/mol.\text{K}$. ما السبب في نشوء هذا الفرق بين C_p و C_v ؟

الجواب:

الفرق ناشئ من الشغل المنجز في اثناء التمدد الحراري، لذلك يمكن اهماله في كثير من الحالات واعتبار C_v مساوية تقريباً الى C_p

النموذج الكلاسيكي: يفترض أن

- (1) ذرات المادة الصلبة تترجح عن مواقع اتزانها تحت تأثير قوة معيدة خطية (حسب قانون هوك). وتتذبذب حول تلك المواقع بحركة توافقية بسيطة.
- (2) أنماط الاهتزاز الطبيعية للشبيكة تكون مستقلة بعضها عن البعض عندما تخضع تلك الاهتزازات لقانون هوك ولذلك لا تعتمد طاقة اي نمط اهتزاز شبيكة على تردده الزاوي ω وقيمة n التي يحتلها او يمتلكها الفونون $phonon occupancy$ ولا تعتمد على القيم التي تمتلكها الفونونات الأخرى.
- (3) عند ارتفاع درجة حرارة المادة تزداد السعة ومن ثم الطاقة للحركة التذبذبية. حيث ان $(K_B T)$ القيمة المتوقعة للطاقة الكلية لمتذبذب توافقي واحد وتعني ان معدل الطاقة، المرافقة لاحدى الاحداثيات كالمسرة او الازاحة، ولكل ذرة في مجموعة من الذرات المتوازنة ثرمودينميكياً عند درجة حرارة T مساوية $(K_B T)$ وبما ان هنالك ثلاثة درجات للحرية. والمادة تتكون من N من الذرات.

$$\therefore U = 3 K_B T N \quad \leftarrow N_A = N \text{ وفي حالة مول واحدة}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = 3 N_A K_B$$

الخلاصة العامة للنموذج:

1. الطاقة U والحرارة النوعية C_V لا تعتمد على التردد الزاوي (يعني التردد كمية ثابتة وليس متغير).
2. يصح هذا النموذج من درجة حرارة الغرفة (27°) مئوية فما فوق.
3. فشلت النظرية في تفسير تناقص قيمة الحرارة النوعية بانخفاض درجة الحرارة.

نموذج أنشتاين للحرارة النوعية:

افترض أنشتاين:

- ان الذرات في الشبيكة تهتز بصورة مستقلة بعضها عن بعض وبترددات زاوية متساوية بسبب تشابه الذرات المحيطة لها.
- ان البلورة تضم $3N$ من المتذبذبات التوافقية كل منها ذات تردد زاوي ω .
- وهي نفس فرضيات النظرية الكلاسيكية ولكن أينشتاين اختلف مع النظرية الكلاسيكية وادخل شيء جديد وهو حساب معدل الطاقة للمتذبذب التوافقي (استفاد من نظرية بلانك الخاصة بإشعاع الجسم الاسود). التي تنص (نظرية بلانك) على ان المتذبذب التوافقي لا يمكن ان تمتلك طيفاً مستمراً للطاقة بل هنالك شروط تقييدية يجب ان تتحقق وهي ان الطاقة تكون كممة وتساوي عدداً صحيحاً مضروباً في $h\nu$ ولهذا تكون الطاقة للمتذبذب التوافقي. حيث $\nu = \text{نيو} (Nu)$ يمثل التردد

$$E_n = nh\nu = n\hbar\omega \dots\dots\dots 1$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \quad J.Sec$$

$$n = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

علماً ان الميكانيك الكمي الحديث ظهر بعد 25 سنة من ظهور نظرية بلانك وحسب الميكانيك الكمي تكون تكون الطاقة للمتذبذب التوافقي:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega = n\hbar\omega + \frac{1}{2} \hbar\omega$$

طاقة نقطة الصفر $\frac{1}{2} \hbar\omega$ هي الطاقة الملازمة للذرة المهتزة حتى عندما تصل درجة الحرارة الى الصفر المطلق.

مقارنة بين الميكانيك الكلاسيكي والميكانيك الكمي:

1. في الميكانيك الكمي توجد قيمة غير صفرية (صغرى) لطاقة نقطة الصفر عند درجة حرارة الصفر المطلق وغيرها من درجات الحرارة. بينما يسمح الميكانيك الكلاسيكي للذرة بالبقاء ساكنة وبطاقة تساوي صفرًا عند درجة حرارة الصفر المطلق.
2. في الميكانيك الكمي توجد قيم محددة ومقيدة لمستويات طاقة اهتزاز الذرة بينما يسمح الميكانيك الكلاسيكي للذرة لأن تمتلك أية قيمة للطاقة.
3. الميكانيك الكلاسيكي يتنبأ بأحتمالية ثابتة عن وجود الذرة في موقع معين حيث تتناسب تلك الاحتمالية عكسياً مع سرعة الذرة في ذلك الموقع. بينما لا يتنبأ الميكانيك الكمي بأحتمالية ثابتة بل بأحتمالية متذبذبة.

الطاقة حسب نموذج انشتاين هي:

$$U = 3N \langle E \rangle$$

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{(\hbar\omega / K_B T)} - 1}$$

$$U = \frac{3N\hbar\omega}{e^{(\hbar\omega / K_B T)} - 1} \quad \& \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

$$F_E(\omega_E, T) = \left(\frac{\hbar\omega_E}{K_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega_E / K_B T}}{[e^{\hbar\omega_E / K_B T} - 1]^2} \quad \text{تسمى دالة أنشتاين}$$

$$T_E = \frac{\hbar\omega_E}{K_B} = \theta_E \quad \text{درجة حرارة أنشتاين}$$

$$F_E(\omega_E, T) = \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{[e^{T_E/T} - 1]^2} \quad \text{دالة أنشتاين}$$

$$C_V = 3R F_E(\omega_E, T)$$

(س) اثبت انه عند درجات الحرارة العالية يقترب نموذج انشتاين من النموذج الكلاسيكي؟
الجواب:

عند درجات الحرارة العالية، أي عند T أعلى من بكثير من درجة حرارة انشتاين (T_E أو θ_E) أي ان $(T \gg T_E)$ فعليه تكون قيمة $\frac{T_E}{T}$ صغيرة جداً. وعليه فإن:

$$e^{T_E/T} = 1 + \frac{T_E}{T}$$

نعوضها في دالة انشتاين فنحصل على

$$F_E(\omega_E, T) = \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{[e^{T_E/T} - 1]^2} = \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{1 + \frac{T_E}{T}}{[1 + \frac{T_E}{T} - 1]^2}$$

$$= \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{1 + \frac{T_E}{T}}{\left[\frac{T_E}{T} \right]^2} = 1 + \frac{T_E}{T}$$

$$\therefore \frac{T_E}{T} \text{ صغيرة جداً}$$

$$\therefore F_E(\omega_E, T) = 1$$

$$\therefore C_V = 3R$$

س) عند درجات الحرارة الواطئة اثبت ان الحرارة النوعية حسب نموذج اينشتاين سيكون

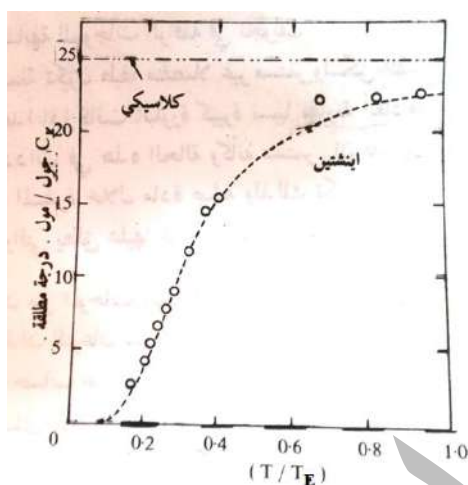
$$\therefore C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{-T_E/T}$$

الجواب: عند درجات الحرارة الواطئة، أي عند T اقل بكثير من درجة حرارة اينشتاين (T_E او θ_E) ستكون ($T \ll T_E$) فعليه ستصبح دالة اينشتاين ستكون:

$$F_E(\omega_E, T) = \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{[e^{T_E/T}-1]^2} = \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{[e^{T_E/T}]^2} = \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{-T_E/T}$$

$$C_V = 3R F_E(\omega_E, T)$$

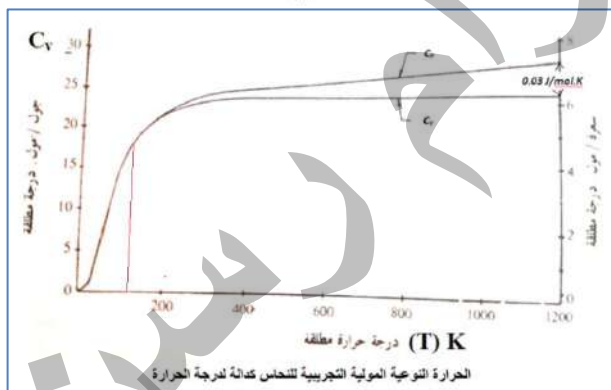
$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{-T_E/T}$$



حيث T_E درجة حرارة انشتاين المهتزة والمعادلة

(2) تمثل الحرارة النوعية حسب نظرية انشتاين.

ينحرف المنحني بموجب نموذج انشتاين ويبدأ بالانخفاض كلما انخفضت درجة الحرارة باتجاه الصفر تناقصاً اسياً حيث ان الحرارة النوعية تتناسب مع $e^{-T_E/T}$ وقد وجد ان الكثير من المواد تتناسب مع T^3 عند الدرجات الحرارة المنخفضة كما تنبأ بذلك نموذج ديبي.



س1: د. مؤيد ص325 من الشكل (1-5)

احسب درجة حرارة أينشتاين المميزة T_E للنحاس بحيث تتوافق معادلة أينشتاين للحرارة النوعية مع القيمة التجريبية عند درجة حرارة $(100K)$.

الجواب:

من الشكل (1-5) وبعد وضع المسطرة ورسم مستقيم من درجة $100K$ الى الاعلى ليقطع

المنحني ثم نأخذ القيمة المناظرة لها على منحنى C_V نجد ان القيمة تساوي $(19 J/mol.K)$ وبعد التعويض بمعادلة السعة الحرارية لأينشتاين:

$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{-T_E/T} \quad 19 = 25 \left(\frac{T_E}{100}\right)^2 e^{-T_E/100}$$

$$\frac{19}{24.9422} = \frac{T_E^2}{10^4} e^{-T_E/100}$$

$$\frac{19 \times 10^4}{24.9422} = T_E^2 e^{-T_E/100} = 7.618 * 10^3$$

وبعد أخذ لوغارتيم لطرفي المعادلة سوف نجد قيمة T_E

$$177.13746222539723269$$

$$-115.79292501997552413i$$

$$T_E = 177.137 K$$

نموذج ديبياي للحرارة النوعية:

افترض ديبياي كما افترض أينشتاين قبله ان البلورة تحوي N من الذرات تمتلك $3N$ من انماط الاهتزاز وكل نمط له معدل طاقة ولكن ديبياي اضاف ما يلي:

1. التعامل مع حركة الشبكة كلياً وكأنها (متذبذبات متقارنة) تتذبذب جماعياً بدلاً من اعتبارها مستقلة بعضها عن البعض وتتفاعل الذرات بعضها مع البعض كما افترضها نموذج أينشتاين.
2. اذا كان الطول الموجي لموجه مرنة تنتشر خلال بلورة اكبر من المسافات الذرية لتلك البلورة أمكن اعتبار البلورة وسطاً مستمراً لذا يمكن استخدام مواصفات الوسط المستمر حيث $(V_0 = \frac{\omega}{k})$ كميته ثابتة وتساوي V_0 سرعة الصوت حيث تعتمد على متجه الموجه K وليس كمية ثابتة.
3. ان طيف الاهتزاز للتردد الزاوي ينقطع عند قيمة معينة للتردد الزاوي لكي يستجيب مع العدد الكلي لأنماط الاهتزاز $3N$.

ان اقصى تردد زاوي يحدث عنده انقطاع الطيف يسمى **تردد ديبياي** ω_D ويطلق عليه تردد القطع، ويسمى متجه الموجه المقابل لهذا التردد **بمتجه موجة ديبياي** K_D . ويعبر عن الطاقة الكلية:

$$U = \frac{9N}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / K_B T} - 1}$$

للتبسيط سندخل درجة حرارة ديبياي المميزة θ_D والتي تكون عندها معدل الطاقة الحرارية الكلية للمتذبذب تساوي كمية ثابتة مقدارها $\hbar \omega_D$ أي ان:

$$K_B \theta_D = \hbar \omega_D,$$

$$\left[\omega_D = \frac{K_B \theta_D}{\hbar} \dots \dots \dots \text{تردد ديبياي} \right]$$

$$\left[\theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{K_B} \dots \dots \dots \text{درجة حرارة ديبياي} \right]$$

$$\left(x = \frac{\hbar \omega}{K_B T} \right) \quad \left(\omega = \frac{K_B T}{\hbar} x \right) \quad \left(d\omega = \frac{K_B T}{\hbar} dx \right) \quad \left(x_m = \omega_D = \frac{\theta_D}{T} \right)$$

$$U = \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$U = 9NK_B T \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 9RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$U = 9RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 f\left(\frac{\theta_D}{T}\right)$$

حيث $f\left(\frac{\theta_D}{T}\right)$ تعرف بدالة ديبياي

(س) اثبت انه عند درجات الحرارة العالية ان نموذج ديبياي يقترب من النموذج الكلاسيكي؟
 الجواب: عند درجات الحرارة العالية، أي عند T اعلى من بكثير من درجة حرارة ديبياي (θ_D) أي ان $(T \gg \theta_D)$ فعليه تكون قيمة x صغيرة جدا. وعليه فإن:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad x = \frac{\hbar\omega}{K_B T} \text{ مع اهمال الأسس العالية}$$

$$U = \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{1 + x - 1} dx$$

$$= \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \int_0^{x_m} x^2 dx = \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \frac{x_m^3}{3} \quad x_m = \omega_D = \frac{\theta_D}{T}$$

$$U = \frac{3NK_B T^4}{\theta_D^3} x_m^3 = \frac{3NK_B T^4}{\theta_D^3} \frac{\theta_D^3}{T^3} = 3NK_B T$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

$$C_V = 3NK_B = 3R$$

وهذه النتيجة مطابقة تماما لنتيجة الحرارة النوعية في النظرية الكلاسيكية

(س) عند درجات الحرارة الواطئة اثبت ان الحرارة النوعية حسب نموذج ديبياي سيكون

$$C_V = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

الجواب: عند درجات الحرارة الواطئة، أي عند T اقل بكثير من درجة حرارة ديبياي (θ_D) ستكون $(T \ll \theta_D)$ فعليه يمكن تبسيط الحد $\int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ بالاستعانة بدالة زيتا

$$U = \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (\text{Riemann Zeta function})$$

$$U = \frac{9NK_B T^4}{\theta_D^3} \frac{\pi^4}{15}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{12NK_B T^3}{\theta_D^3} \frac{\pi^4}{5} = \frac{12 RT^3 \pi^4}{5 \theta_D^3}$$

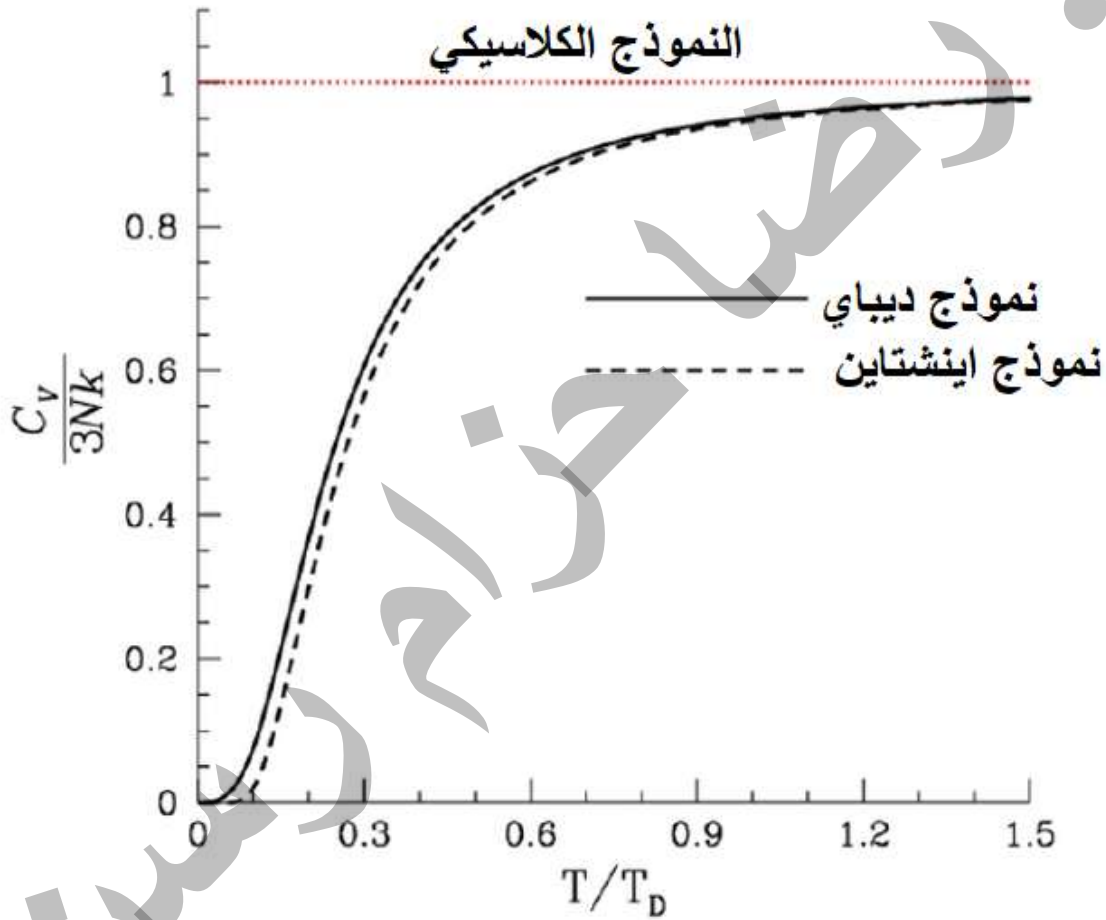
$$C_V = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

قانون ديبياي

ان نموذج ديبي يتفق بصورة جيدة مع النتائج التجريبية في درجات الحرارة الواطئة ($T < \frac{\theta_D}{12}$) وكذلك في درجات الحرارة العالية ($T > \theta_D$). ولكنه لا يتفق بصورة جيدة مع النتائج التجريبية في درجات الحرارة المتوسطة (درجات الحرارة المعتدلة).

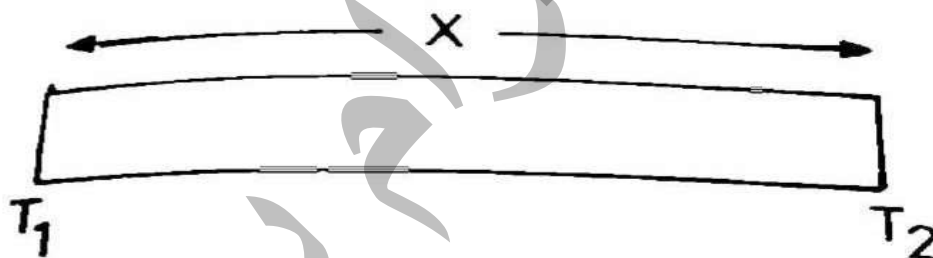
ان من أخطاء نظرية ديبي انه افترض وجود نوع واحد من اختزان الطاقة داخل المادة وعلى شكل طاقة حركة تذبذبية للذرات المكونة لها. ولكن تحدث حالات شاذة وانحراف عن صحة النظرية عند ادخال الطرق الأخرى الممكنة التي تختزن بواسطتها الطاقة مثلاً:

- 1- يمكن ان يكون لجزيئات المادة درجة حرية دورانية
- 2- يمكن ان تختزن في حركة الالكترونات.
- 3- تتغير الطاقة عند حدوث تحول داخل المادة أي تحول الطور في المادة.



التوصيل الحراري Thermal Conductivity:

- إن التوصيل الحراري في المواد الصلبة هي ظاهرة انتقال الفوتونات والالكترونات الحرة اللذين يمتلكا معدل طاقة أعلى في منطقة معينة إلى منطقة اخرى ذات طاقة أوطأ.
- في المواد الصلبة الفلزية الخالية نسبياً من العيوب تنتقل الحرارة بواسطة كل من الفونونات والالكترونات الحرة. في المواد شبه الموصلة والمواد الفلزية تعد الالكترونات المساهم الأكبر في عملية التوصيل الحراري.
 - في المواد شبه الموصلة التي تحتوي في بنيتها على عيوب وعلى نسبة عالية من الشوائب فإنه يتم بواسطة الفونونات والالكترونات. وتقوم الفونونات بالدور الأساس في عملية التوصيل الحراري في هذه المواد.
 - في المواد الصلبة العازلة فيتم التوصيل الحراري بواسطة الفونونات حيث تعد الناقل الوحيد للطاقة الحرارية.
 - عند درجات الحرارة العالية تلعب الفوتونات الدور الرئيسي في عملية التوصيل الحراري لجميع انواع المواد الصلبة.
- لذلك سوف نركز في هذا البند على عملية التوصيل الحراري بواسطة الفونونات فقط. لغرض حساب قيمة التيار الفونوني (w)، افترض قضيباً بلورياً طوله X وقيمة درجة حرارة نهايته تساوي T_1 و T_2 حيث تكون $T_2 > T_1$ وكما هو مبين في الشكل



رسم توضيحي للتوصيل الحراري

وكما هو معلوم ان الحرارة سوف تسري باتجاه الانحدار الحراري ، أي من النهاية ذات الدرجة الحرارة العالية إلى النهاية ذات الدرجة الحرارة الواطئة ، وأن قيمة التيار الفونوني المار في أية نقطة من نقاط القضيب البلوري وفي أية لحظة تكون كمية ثابتة ، فعليه

$$\frac{dQ}{dt} \propto \frac{dT}{dX}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -K_l \frac{dT}{dX}$$

حيث ان K_l تمثل معامل التوصيل الحراري. إن الاشارة السالبة تعني أن اتجاه تدفق التيار الحراري يكون باتجاه معاكس لاتجاه تدرج درجة الحرارة.

أسئلة ومسائل من كتاب د. يحيى الجمال & كتاب د. مؤيد جبرائيل

س1) أي من العبارات التالية صحيحة؟

- في المواد الصلبة الفلزية الخالية نسبياً من العيوب تنتقل الحرارة بواسطة كل من الفونونات والالكترونات الحرة. في المواد شبه الموصلة والمواد الفلزية تعد الالكترونات المساهم الأكبر في عملية التوصيل الحراري.
- في المواد شبه الموصلة التي تحتوي في بنيتها على عيوب وعلى نسبة عالية من الشوائب فإنه يتم بواسطة الفونونات والالكترونات. وتقوم الفونونات بالدور الأساس في عملية التوصيل الحراري في هذه المواد.
- في المواد الصلبة العازلة فيتم التوصيل الحراري بواسطة الفونونات حيث تعد الناقل الوحيد للطاقة الحرارية.
- عند درجات الحرارة العالية تلعب الفونونات الدور الرئيسي في عملية التوصيل الحراري لجميع انواع المواد الصلبة.
- جميع العبارات السابقة صحيحة. ✓

س2) أي من العبارات التالية خاطئة؟

- يُعد تصادم فونون مع فونون آخر احد عمليات التصادم الفونونية التي يمكن أن تحدث داخل المادة الصلبة.
- يُعد تصادم تصادم فونون مع العيوب البلورية احد عمليات التصادم الفونونية التي يمكن أن تحدث داخل المادة الصلبة.
- يُعد تصادم تصادم الفونون مع الحدود الخارجية للبلورة احد عمليات التصادم الفونونية التي يمكن أن تحدث داخل المادة الصلبة.
- يُعد تصادم تصادم الفونون مع انوية الايونات الموجبة والسالبة احد عمليات التصادم الفونونية التي يمكن أن تحدث داخل المادة الصلبة. ✓

س3) (الجمال س1 & جبرائيل س2) اذا كانت قيمة C_V التجريبية عند درجة حرارة 207 K لبلورة ماس تساوي 2.68 J/mol.K .

(1) احسب قيمة C_V باستعمال نظرية اينشتاين.

(2) احسب قيمة C_V باستعمال نظرية ديبياي.

(3) قارن النتائج مع القيمة التجريبية اذا علمت ان درجة حرارة اينشتاين المميزة هي 1320 K ودرجة حرارة ديبياي المميزة هي 1860 K .

$$C_V (\text{التجريبية}) = 2.68 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \cdot \text{K} \quad \text{عند } T = 207\text{ K}$$

$$T_E = 1320\text{ K} \quad \theta_D = 1860\text{ K}$$

1) باستعمال نظرية اينشتاين

عند درجات الحرارة الواطئة، أي عند T اقل بكثير من درجة حرارة اينشتاين (T_E او θ_D) ستكون قيمة C_V باستعمال نظرية اينشتاين ($T \ll T_E$)

$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 e^{-T_E/T}$$

$$T = 207\text{ K} \quad T_E = 1320\text{ K} \quad \therefore (T \ll T_E)$$

$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 e^{-T_E/T}$$

$$R = 8.3142\text{ J/mol.}^\circ\text{K}$$

$$C_V = 3(8.3142\text{ J/mol.K}) \left(\frac{1320\text{ K}}{207\text{ K}} \right)^2 e^{-\left(\frac{1320\text{ K}}{207\text{ K}} \right)}$$

$$C_V = 1.7247 = 1.725 = 1.73\text{ J/mol.K}$$

2) باستعمال نظرية ديبياي

عند درجات الحرارة الواطئة، أي عند T اقل بكثير من درجة حرارة ديبياي (θ_D) ستكون قيمة C_V باستعمال نظرية ديبياي ($T \ll \theta_D$)

$$C_V = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{\text{mol.K}}$$

$$T = 207\text{ K} \quad \theta_D = 1860\text{ K} \quad \therefore T \ll \theta_D$$

$$C_V = 1944 \left(\frac{207\text{ K}}{1860\text{ K}} \right)^3 \frac{J}{\text{mol.K}}$$

$$C_V = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{\text{mol.K}} = 2.67959 = 2.68 \frac{J}{\text{mol.K}}$$



س4) احسب قيمة C_V باستخدام معادلة اينشتاين عند درجة حرارة $50^\circ C$ - إذا كانت درجة حرارة اينشتاين المميزة هي $1340 K$.

باستعمال نظرية اينشتاين

عند درجات الحرارة الواطئة، أي عند T اقل بكثير من درجة حرارة اينشتاين (T_E او θ_E) ستكون قيمة C_V باستعمال نظرية اينشتاين ($T \ll T_E$)

$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 e^{-T_E/T}$$

$$T = -50^\circ C = -50 + 273 = 223 K \quad T_E = 1340 K \quad \therefore (T \ll T_E)$$

$$C_V = 3R \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 e^{-T_E/T}$$

$$R = 8.3142 J/mol.^{\circ}K$$

$$C_V = 3(8.3142) \left(\frac{1340}{223} \right)^2 e^{-1340/223} = 2.21248 = 2.21 J/mol.^{\circ}K$$

س5) احسب درجة حرارة ديبي لبلورة الجرمانيوم عند درجة حرارة $200 K$ إذا كانت السعة الحرارية له $317.2 J/mol.K$.

باستعمال نظرية ديبي

عند درجات الحرارة الواطئة، أي عند T اقل بكثير من درجة حرارة ديبي (θ_D) ستكون قيمة C_V باستعمال نظرية ديبي ($T \ll \theta_D$)

$$C_V = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

$$T = 200 K \quad \theta_D = ? \quad \therefore T \ll \theta_D \quad C_V = 317.2 \frac{J}{mol.K}$$

$$C_V = 1944 \left(\frac{200 K}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

$$317.2 \frac{J}{mol.K} = 1944 \left(\frac{200}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

$$317.2 = 1944 \left(\frac{200}{\theta_D} \right)^3 \quad \sqrt[3]{317.2} = \sqrt[3]{1944} \left(\frac{200}{\theta_D} \right)$$

$$\theta_D = \sqrt[3]{1944} \left(\frac{200}{\sqrt[3]{317.2}} \right) = 366.0027 K$$



س 6 / احسب درجة حرارة ديبياي لبلورة النحاس عند درجة حرارة K 180 إذا كانت السعة الحرارية له 243 J/mol.K .

$$C_V = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

$$243 = 1944 \left(\frac{180}{\theta_D} \right)^3 \quad \sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{1944} \left(\frac{180}{\theta_D} \right)$$

$$\theta_D = \sqrt[3]{1944} \left(\frac{180}{\sqrt[3]{243}} \right) = 359.999 K$$

س (7) احسب تردد ديبياي عند درجة حرارة 300K

$$\theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B} \quad \text{حفظ}$$

$$\omega_D = \frac{\theta_D k_B}{\hbar}$$

$$\omega_D = \frac{300 * 1.38 * 10^{-23}}{1.05 * 10^{-34}} = (3.94 * 10^{13}) \left(\frac{rad}{sec} \right)$$

س (8) إذا كانت الحرارة النوعية التجريبية لمعدن الألمنيوم تساوي 0.28 J/mol.K عند درجة حرارة 19.2 k . احسب درجة حرارة ديبياي المميزة للألمنيوم ؟
الحل

قيمة C_V باستعمال نظرية ديبياي

$$C_V = 1944 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{J}{mol.K}$$

$$T = 19.2 K \quad \theta_D = ? K \quad C_V = 0.28 J/mol.K$$

$$0.28 = 1944 \left(\frac{19.2 K}{\theta_D} \right)^3$$

$$\sqrt[3]{0.28} = \sqrt[3]{1944} \left(\frac{19.2}{\theta_D} \right)$$

$$\theta_D = \sqrt[3]{1944} \left(\frac{19.2}{\sqrt[3]{0.28}} \right) = 366 K$$

- س9) اذا كانت سرعة الصوت V_o تساوي $5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ وان عدد الذرات لوحدية حجم $\left(\frac{N}{V}\right)$ يساوي (10^{29}) ذرة لكل متر مكعب. احسب
- (1) تردد ديبي ω_D (اقصى قيمة للتردد الزاوي) (تردد القطع)
 - (2) متجه موجة ديبي k_D (متجه الانقطاع)
 - (3) درجة حرارة ديبي المميزة θ_D
- الحل:

$$1) \omega_D = V_o \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{حفظ}$$

$$\omega_D = V_o (6\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\omega_D = (5 \cdot 10^3) (6\pi^2)^{\frac{1}{3}} (10^{29})^{\frac{1}{3}} \cong 91 \cdot 10^{12} \left(\frac{1}{s} \right)$$

$$2) k_D = \frac{\omega_D}{V_o} \quad \text{حفظ}$$

$$k_D = \frac{91 \cdot 10^{12}}{5 \cdot 10^3} = 18 \cdot 10^9 \left(\frac{1}{m} \right)$$

$$3) \theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B} \quad \text{حفظ}$$

$$\theta_D = \frac{(1.05 \cdot 10^{-34}) (J \cdot s) (91 \cdot 10^{12}) \left(\frac{1}{s} \right)}{(1.38 \cdot 10^{-23}) \left(\frac{J}{K} \right)} = 692.4 \text{ K}$$