الفصل الثالث: ديناميكية الشبيكة
Lattice Dynamics

اهتزازات الشبيكة:

يعد موضوع حركية الشبيكة في فيزياء الحالة الصعبة ذات اهمية بالغة جداً وذلك لتداخله في تفسير مفاهيم الخواص الفيزيائية للمواد الصلبة. ويقصد بحركية الشبيكة هو دراسة اهتزازات ذرات الشبيكة. ان دراسة الحركة الاهتزازية للذرات المكونة للشبيكة البلورية تمكننا من وصف السلوك الاجمالي للمادة الصلبة من خلال الخواص الحرارية او الكهربائية او الميكانيكية او غيرها.

الذرات داخل البنية البلورية تكون في حالة حركة اهتزازية، اي انها تتحرك حركة توافقية بسيطة دون ان تنتقل من موقعها الى موقع اخر. تعتمد الحركة التوافقية البسيطة للذرات على درجات الحرارة. ولو فرضنا ان الذرات داخل الشبيكة تكون عند درجة الصفر المطلق فانها ستستقر في مواقع الاتزان في حالة سكون. وعند رفع درجة الحرارة تبدأ الذرات بالتذبذب حول مواقع الاتزان بإزاحة تتوقف على درجة الحرارة.

ان انماط الاهتزاز "Vibrational modes" للذرات في داخل التركيب البلوري يعبر عنه بموجب النظرية الكلاسيكية على انها موجات صوتية مرنة تسير في وسط مستمر على نسق معين ويمتد سريانه خلال بلوره غير محددة اما في النظريات الحديثة فتعتبر انماط الاهتزاز مجموعة من جسيمات يتعذر تميزها تدعى الفونونات "Phonons".

ان الصفات الحرارية للمواد الصلبة والسعة الحرارية والتوصيل الحراري وكذلك الاستطاره غير المرنة للنيوترونات او الاشعة السينية بواسطة البلورات وغيرها تفسر جميعها من خلال اهتزاز الشبيكة والحاصل عنها فونونات.

تكمم اهتزازات الشبيكة:

بموجب النظرية الكلاسيكية يعبر عن أنماط الاهتزاز في بلورة بوصفها موجات مرنة في وسط مستمر على نسق معين ويمتد جريانها خلال بلورة غير محددة. اما النظرية الحديثة **فتعتبر أنماط الاهتزاز مجموعة من الدقائق يتعذر تمييزها تدعى الفونونات.** كلمة فونانات مشابهة لكلمة فوتونات.

والفونونات تمتلك طاقة محددة $\hbar\omega$ ولكن لا يمكن القول انها تملك زخماً حقيقاً. ان الكمية الاتجاهية $\hbar\vec{K}$ (حيث $\vec{K}$ يمثل متجه الموجة الحاصلة من الاهتزاز)، تكون كمية صغيرة جدا في تفاعلات بين الفونونات واشعاعا خارجياً.

ان الفوتون والفونون يخضعان لاحصاء بوز- اينشتين. واذا اردنا ان نعطي تعريف مبسط للفونون نقول. ان الازاحات الدورية للذرات عن مواضع اتزانها (موجات مرنة) يمكن وصفها عن طريق **الفونون وهو وحدة طاقة مكممة quantized لاهتزاز ذرات البلورة (او كم طاقة اهتزاز الشبيكة)،** له طاقة E تساوي $\hbar\omega$ وزخم او شبه زخم $\vec{P}$ وسرعة المجموعة $\left(v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{dE}{dP}\right)$ وطول موجي ومتجه موجة $\vec{\mathrm{K}}$ وتردد وسرعة انتشار نمط الاهتزاز او سرعة الطور $\left(v = \frac{\omega}{K}\right)$ وفضلاً عن ذلك يخضع الفونون لقوانين حفظ الزخم والطاقة.

ان جميع الأفكار المطبقة على الفوتون كازدواج صفة الموجة وصفة الدقيقة وتكمية الفوتون يمكن ان تطبق على الفونون. فهنالك الكثير من المعلومات التجريبية تشير الى اهتزاز الشبيكة وهذا الاهتزاز ممثلاً بالفونون يكون مكمماً حيث ان كثير من الصفات الحرارية للمواد الصلبة كالسعة الحرارية والتوصيل الحراري وكذلك الاستطارة غير المرنة للنيوترونات او الاشعة السينية بواسطة البلورات وغيرها تقدم دلائل قوية على ان اهتزاز الشبيكة يكون مكمم. **ويطلق عادة على الاهتزاز في بلورة والحاصل من مؤثرات حرارية بالفونونات المهيجة حرارياً.**

وتوجد تهيجات أولية مكممة مهمة أخرى فضلاً عن الفونون وينتهي اسمها بالحرفين ون on

1- **ماكنون magnon :** يمثل موجة برم مغناطيسي وهو تهيج للبروم في المواد الصلبة ذات مغناطيسية حديدية مثل الحديد والكوبلت والنيكل حيث تكون جميع البروم متوازية تماما ف حالة الأســـاس او الحالة الأرضية.

2- **بلازمون Plasmon :** وهو تهيج متراكم لســحابة الالكترونات الحرة نســبياً والهاربة من المدارات الخارجية للذرات المعدنية وتسمى هذه السحابة بغاز الالكترون وهذا يعني التذبذب المتشاكه او المترابط لجميع الالكترونات والناشــئ من قوى كولوم ذات المدى الطويل او الاســتطارة غير المرنةللالكترونات الساقطة على غشاء معدني.

3- **بولارون Polaron :** ويمثل الكتروناً يرافقه تشــويه مرن في البلورة. فعند تفاعل الكترون في شــبيكة بلورة مع الذرات او ايونات تلك الشبيكة بواسطة شحنته الكهربائية فانه يسبب تشويهاً مرناً (استقطاب في البلورات الايونية) وموضعياً للشبيكة.

4- **اكســيتون Exciton :** ويمثل موجة اســتقطاب تنتج من ترابط بين الكترون وفجوة او ثقب hole في شريط التكافؤ او نطاق التكافؤ Valence Band ان طاقة الفوتون اللازمة لتوليد هذا الزوج المترابط من الكترون وفجوة يجب ان تكون اقل من فجوة الطاقة أي اقل من الفرق بين طاقة شــريط التكافؤ وشــريط التوصيل.

الاستطاره غير المرنة للفوتونات (فوتونات الاشعة السينية) بواسطة الفونونات:

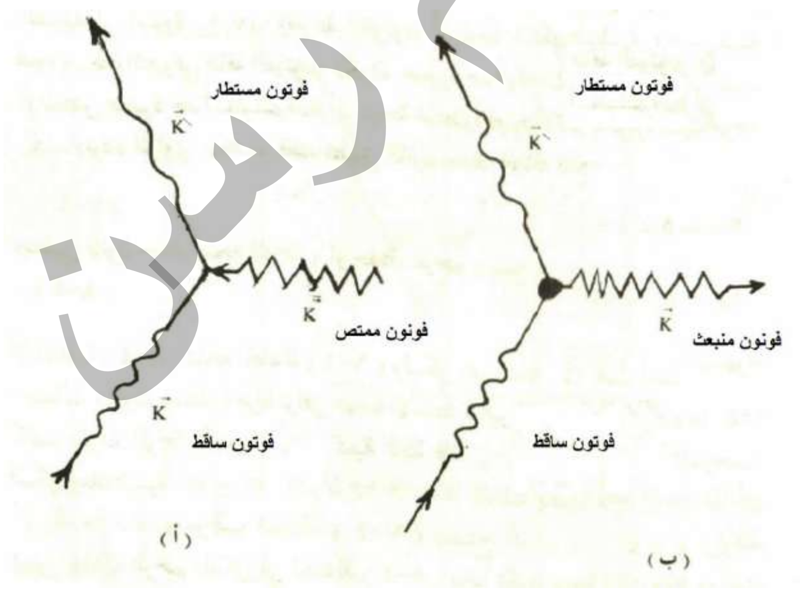
حيود براك (استطاره مرنة) للأشعة السينية بواسطة بلورة يخضع لقانون حفظ متجه الموجه اي ان:

$$\vec{k'} - \vec{k} = \vec{G}$$

$\vec{k}$هو متجه الفوتون (الموجه) الســـاقطة & $\vec{k'}$ هو متجه الفوتون المســـتطير & $\vec{G}$ متجه الشـــبيكة المقلوبة. وهذه الاســـتطارة هي اســـتطارة مرنة. وقد تحدث اســـتطارة غير مرنة بين الاشـــعة السـينية (الفوتونات) الســاقطة على البلورة والموجات (الفونونات) الحاصـلة من اهتزاز ذرات البلورة مما يسـبب انبعاثاً او تولد (creation) او فناء (annihilation) فونون ذو متجه $\vec{K}$ وباســـتخدام قانون حفظ متجه الموجه نحصل على:

$$\vec{k'} - \vec{k} = \vec{G} \mp \vec{K}$$

حيث ان الاشارة السالبة تشير الى تولد فونون والاشارة الموجبة الى فناء او امتصاص فونون.



ان المجال الكهربائي للفوتون الساقط على البلورة يولد اجهادا ميكانيكيا دوريا داخل البلورة مما يسبب تغير الصفات المرنة للبلورة في هذا النوع من التفاعل يمكن للفوتون ان يولد او يمتص فونونا.

وبذلك يتغير $\vec{k}$ (متجه الفوتون "الموجه" الســـاقطة الذي تردده الزاوي (ω) الى $\vec{k'}$ (متجه الفوتون المســـتطير الذي تردده الزاوي ´ω).

فان هذا التغير في قيمة واتجاه متجه موجة الفوتون وكذلك طاقته، نتيجة تولد او فناء فونونات صوتية (acoustic phonons) هو السبب في اعتبار عملية التفاعل هذه **استطارة غير مرنة** ويطلق على هذه العملية **تشتت او استطارة برليون (Brillauim scattering)** ولكن بسبب الفرق الكبير بين سرعة الموجه الصوتية في البلوة (v_S.) وسرعة الفوتون او الموجه الكهرومغناطيسية c (سرعة الضوء) فان التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا ولذلك تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا.

فلو افترضنا ان نتيجة استطارة فوتون كانت تولد فونونا متجه موجه $\vec{K}$ وتردده الزاوي ω_o ، فعند تطبيق قانون حفظ الطاقة ينتج

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + \hbar\omega_o \ldots\ldots 1$$

وبتطبيق قانون حفظ متجه الموجه (او حفظ الزخم) ينتج:

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \hbar\vec{K} \ldots\ldots 2$$

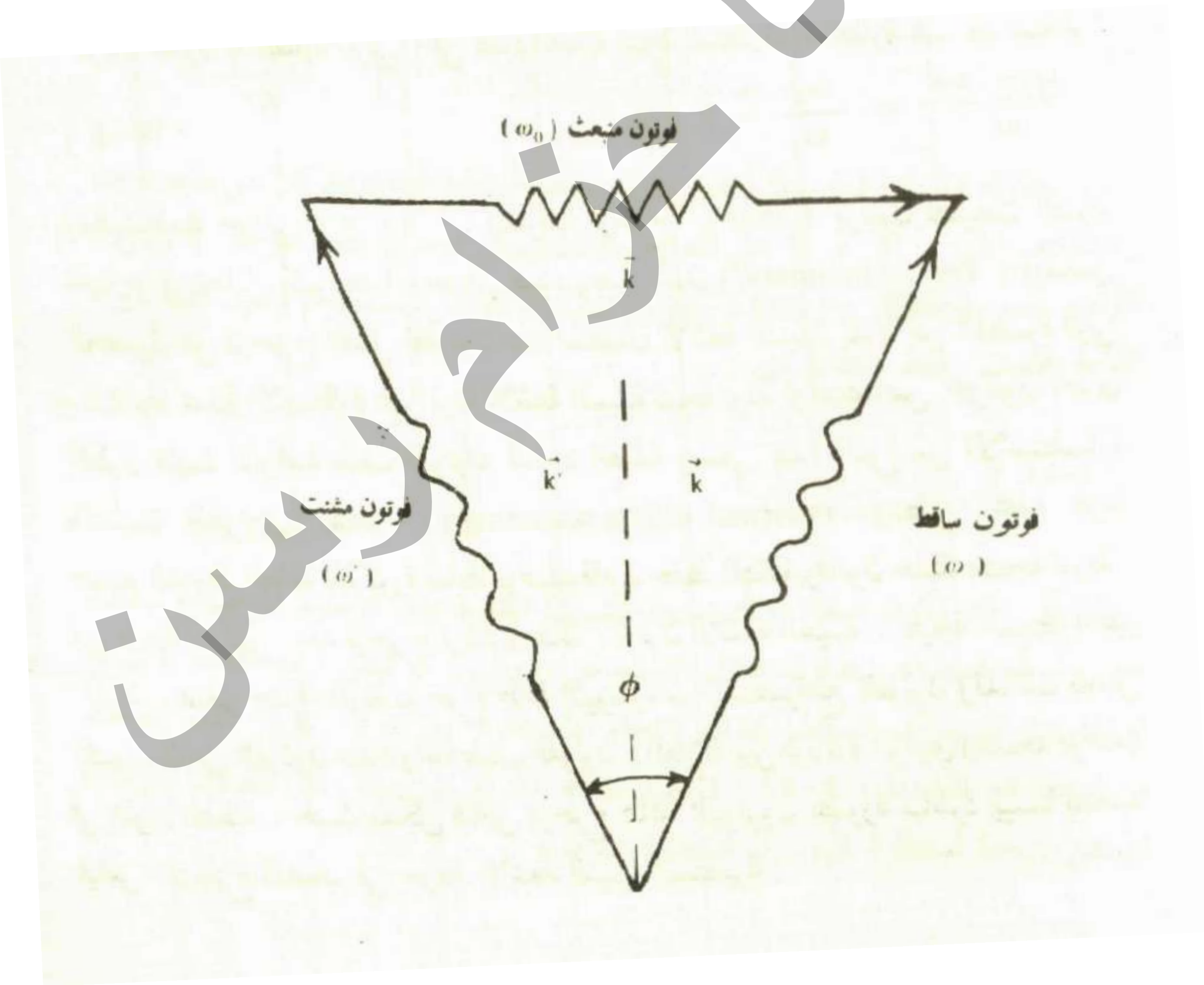
ان سرعة الموجه الصوتية v_s هي كمية ثابتة فان $\vec{K}v_s = \omega_o$

اما بالنسبة للموجه الكهرومغناطيسية $kc = \omega$ وان $c \gg v_s$ لذلك يكون $ck \gg v_s K$ أي ان

$$\omega \gg \omega_o$$

ومن المعادلة الاولى (1) نستنتج ان $\omega = \omega'$ ، $k = k'$

وعند تمثيل تعادل الزخم في (2) بيانيا تكون النتيجة مثلث متساوي الساقين تقريبا



$$\vec{K} = 2k\sin\frac{\emptyset}{2} \dots\dots (3)$$

حيث $\emptyset$ تمثل زاوية الاستطارة. ويمكن كتابة معادلة (3) بدلالة معامل الانكسار للبلورة " n " النسبة بين سرعة الفوتون في الفراغ وسرعته في البلورة حيث ان

$$n = \left(\frac{c}{\frac{\omega}{k}}\right) \dots\dots (4)$$

وبذلك تصبح معادلة " 3 " بعد ضرب طرفيها بسرعة الموجه الصوتية في البلورة v_s كالاتي:

$$v_s K \cong 2v_s \omega n c^{-1} sin\frac{\emptyset}{2} \dots\dots (5)$$

ولكن $\omega_o = v_s K$ يكافئ تردد الفونون المنبعث (ω_o) لذلك فان المعادلة " 5 " تكتب بالصيغة الاتية:

$$\omega_o \cong 2v_s \omega n c^{-1} sin\frac{\emptyset}{2} \dots\dots (6)$$

وبذلك نكون قد حصــلنا على علاقة تقريبية لتردد فونونات متولدة في بلورة عند اســتطارة فوتونات استطارة غير مرنة عند زاوية φ.

ان اقصى تغير نسبي لتردد الفوتون (الضوء المرئي) في هذه العملية نتيجة استطارته استطارة غير مرنة هو

$$\boldsymbol{\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{\omega_o}{\omega} \cong 2v_s n c^{-1} \dots\dots (7)}$$

يعد تزحزح تردد (طاقة) فوتون الاشعة السينية نتيجة استطارته غير المرنة صغير جدا مقارنة بتزحزح طاقة النيوترونات المستطيره مع الفونون لذلك يفضل النيوترون على الفوتون عند دراسة طيف الفونون (العلاقة بين تردده الزاوي ومتجه موجته) في المواد الصلب.

حيث يمكن قياس تزحزح طاقة النيوترون بصـورة مباشـرة بينما تصـعب قياس التزحزح الصــغير في حزمة الاشعة السينية المستطيره.

سؤال 1 في كتاب فيزياء الحالة الصلبة د. مؤيد جبرائيل:

س1) فوتون ضوئي طول موجته في الفراغ $5*10^{-7}$ m يستطير بواسطة بلورة معامل انكسارها 1.5 وسرعة الصوت فيها $4.5*10^{3}$ m/s احسب

1-اقصى تردد زاوي ومتجه موجة الفونون المتولد عن هذه الاستطارة؟

2- اقصى تغير نسبي للتردد الزاوي للفوتون نتيجة الاستطارة؟

الاستطاره غير المرنة للنيوترونات بوساطة الفونونات:

يمكن تعريف النيوترون الحراري (thermal neutron) بانه نيوترون ذو طاقة حرارية حوالي (0.025ev) بدرجة حرارة (288°k) وتعد طاقة النيوترون الحراري مقاربة لطاقة الفونون. ولذلك يتوقع تغير ملموس في طاقة النيوترون خلال عملية استطارته غير المرنة مع نوى ذرات البلورة.

اذا كانت سرعة النيوترون $\vec{v}$ وكتلته M_n سيكون متجه موجته وطاقته الحركية:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{K_n} &= \frac{M_n \vec{v}}{\hbar} \\ E &= \frac{\hbar^2 K_n^2}{2M_n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(8)$$

وعند استطاره النيوترون غير المرنة بامتصاص او توليد فونون فان متجه موجته وطاقته تتغير الى E’ ، K’$_n$ على التوالي وباستخدام قانون حفظ الطاقة:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{K_n} - \overrightarrow{K'_n} &= \vec{G} \pm \vec{K} \\ E - E' &= \pm \hbar\, \omega_k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(9)$$

ان قياس قيمة الطاقة المكتسبة او المفقودة للنيوترون المستطير كدالة لاتجاه الاستطاره $\left(\vec{K}_n - \vec{K'}_n\right)$

عمليا يمكننا استخدام العلاقة (9) لايجاد علاقة التفريق بين K،ω_k للفونون المتولد او الممتص نتيجة استطاره النيوترون استطاره غير مرنة.

انماط الاهتزاز لشبيكة خطية احادية الذرات:

يمكن ايجاد علاقة التفريق بين التردد الزاوي (ω) للذرة المهتزة ومتجه الموجه (K) للموجه الحاصلة من ذلك الاهتزاز نفترض سلسلة خطية طويلة جدا من الذرات المتشابهة حيث ان:

m = كتلة كل ذرة من ذرات السلسلة.

a = فسحة الاتزان بين أي ذرتين متجاورتين (ثابت السلسلة).

C = ثابت قوة بين أي ذرتين متجاورتين (ثابت المرونة).

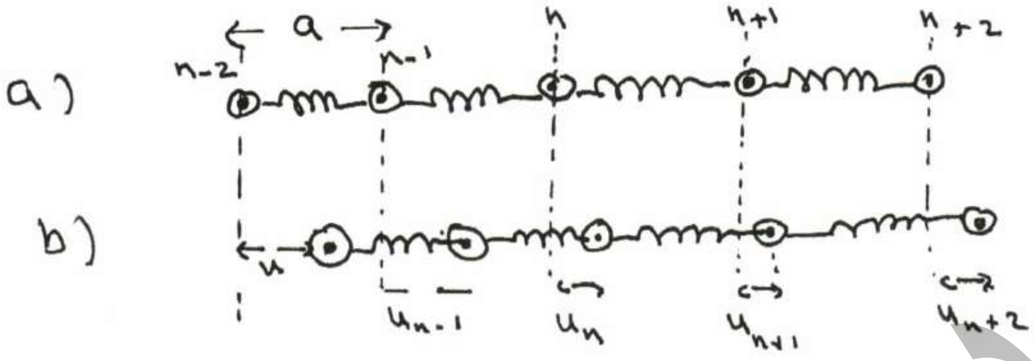
U_n = ازاحة الذرة "n" عن موضع الاتزان وهي دالة للزمن.

N = العدد الكلي لذرات السلسلة.

F_n = محصلة القوى المؤثرة على الذرة n.

يمكن اعتبار(على افتراض) السلسلة الذرية الخطية عبارة عن مجموعة من الكرات المتشابهة المربوطة بعضها مع بعض بنوابض افقية بحيث تكون حركة كل كرة باتجاه موازي للسلسلة وبذلك تكون الموجات الحاصلة من الاهتزاز موجات طولية فقط.

فاذا كانت استطالة او انكباس احد هذين النابضين اكثر من الاخر فسوف تتعجل الذرة الواقعة بينهما، أي تكون الذرة في حالة اهتزاز بقوة تتناسب مع الفرق بين اجهادي النابضين. ويمكن حساب محصلة القوة المؤثرة في الذرة n(F_n) في الشكل التالي لحساب المركبة من جهة اليسار [F_L] ومن جهة اليمين [F_R]



الشكل: (a) سلسلة خطية من الذرات المتشابهة في مواضع اتزانها.
(b) ازاحات الذرات عن مواضع اتزانها.

$F_R = c(u_{n+1} - u_n)$
$F_L = c(u_n - u_{n-1})$
$F_n = F_{(R)} - F_{(l)}$
$F_n = c\,[u_{n+1} - u_n - u_n + u_{n-1}]$
$F_n = c[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] \quad \dots\dots\dots (1)$

ان المعادلة (1) تمثل هذا تعبير خطي لكل الازاحات بصـــيغة قانون هوك تحت تأثير اقرب الجيران فقط.
ويمكن تمثيل انتقال موجه طولية في صلب متجانس باتجاه معين مثلx

$u = Ae^{[i(Kx-\omega t)]}$

حيث x تمثل موضــع اســتقرار الذرة المهتزة عن نقطة الأصــل و بما ان ازاحة الذرة "n" عن موضــع استقرارها عن نقطة الأصل x يساوي na عندئذ يمكن كتابة المعادلة (13) كما يلي:

$u_n = Ae^{[i(Kna-\omega t)]}$

وباشتقاق الازاحة بالنسبة الى الزمن مرتين نحصل على تعجيل هذه الذرة وكما يلي:

$\frac{d^2u_n}{dt^2} = -\omega^2 Ae^{[i(Kna-\omega t)]} \qquad \frac{d^2u_n}{dt^2} = -\omega^2 u_n$

وهذا يعني ان اتجاه التعجيل او اتجاه القوة المســـببة للتعجيل يكون معاكســـا لاتجاه الازاحة، أي ان القوة المعيدة المؤثرة في الذرة n هي:

$F_n = -m\omega^2 u_n \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2)$

وبربط المعادلتين (1) (2) نحصل معادلة الحركة لاي ذرة في المستوى على

$-m\omega^2 u_n = c\,[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] \dots\dots\dots\dots (*)$

$-m\omega^2 = c\,[\frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{2u_n}{u_n}]$

$\omega^2 = \frac{c}{m}[2 - \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n-1}}{u_n}]$

ولكن

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{Ae^{[iK(n+1)a-i\omega t]}}{Ae^{[iK(na)-i\omega t]}} = e^{iKa}$

وبذلك

$\omega^2 = \frac{c}{m}[2 - e^{iKa} - e^{-iKa}]$

$$=\frac{c}{m}\left[2-(\cos ka+i\sin ka)-(\cos ka-i\sin ka)\right]$$

$$=\frac{c}{m}\left[2-2\cos ka\right]=\frac{2c}{m}(1-\cos ka)$$

(1-coska) $=2sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)$

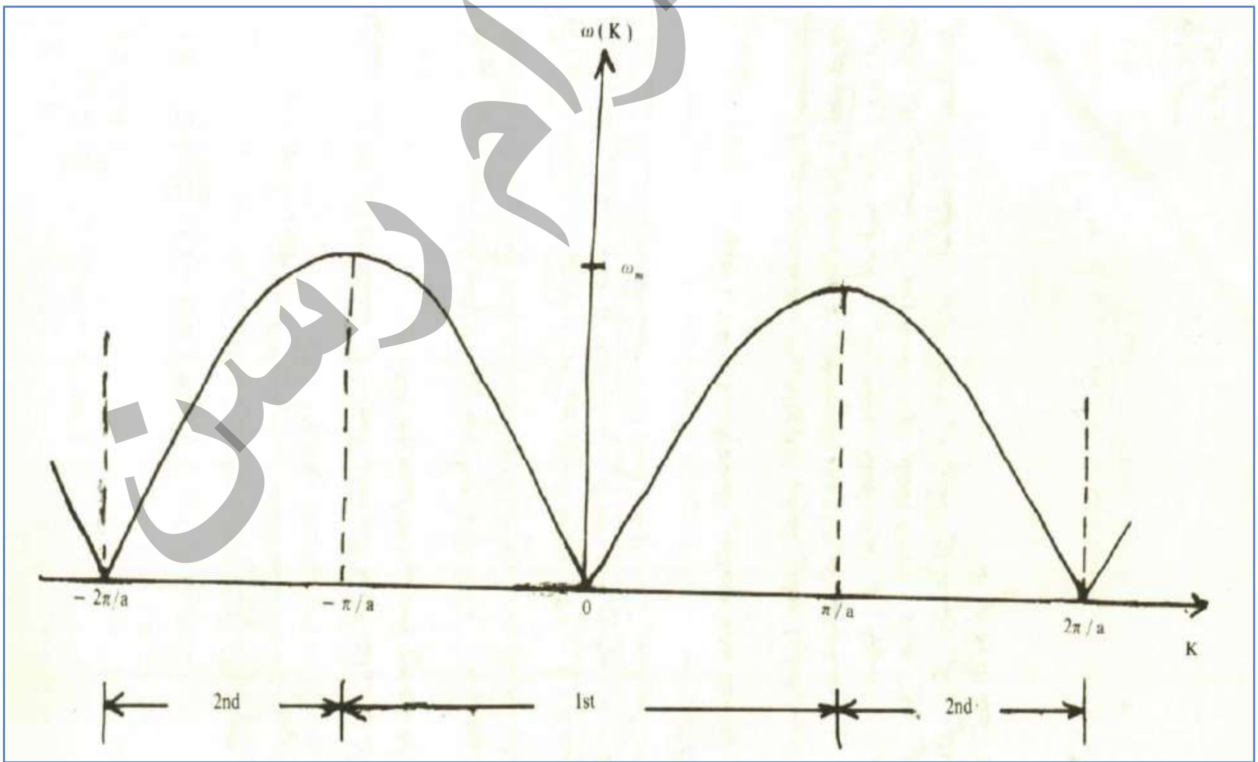
$$\boldsymbol{\omega^2=\frac{4c}{m}sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}$$

$$\omega=\mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \dots\dots\dots \text{ علاقةالتفريق } \dots\dots\dots.(3)$$

$$\omega_m=2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{4c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \quad\dots\dots\dots\dots\dots\quad \omega_{max} \text{ القيمة العظمى للتردد الزاوي}$$

$$\omega=\mp\omega_m\sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \dots\dots\dots \text{ علاقةالتفريق } \dots\dots\dots.(3)$$

والمعادلة (3) تمثل علاقة التفريق بين التردد الزاوي (ω) وقيمة متجه الموجه [K] لسلسلة احادية الذرات. والشكل ادناه يوضح هذه العلاقة، ان الاشارة الموجبة والسالبة تعين اتجاه انتقال الموجه اذا كان نحو اليمين (+) او نحو اليسار (-) حيث الحركة عند أي نقطة تكون دورية مع الزمن.



ويمكن ملاحظة الخصائص التالية للمعادلة (3) اهمها: توقف فاصل

-1 وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي (ω_m) عندما تكون قيم K تساوي $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ او مضاعفاتها الفردية وهذا يعني ان هناك **حد اعلى او قطع لتردد الموجات المرنة (الصوتية)** في المواد الصلبة. ان قيمة (ω_m) تعتمد على ثابت القوة وكتلة الذرة أي ان

$$\omega = \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{علاقةالتفريق} \ldots\ldots\ldots.(3)$$

وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي (ω_m) عندما تكون قيم K تساوي $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ او مضاعفاتها الفردية وهذا يعني ان هناك **حد اعلى او قطع لتردد الموجات المرنة (الصوتية)** في المواد الصلبة.

$$\omega = \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi a}{2a}\right)$$

$$= \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \& \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(4) \quad \textbf{(تردد القطع)}$$

-2 لكل متجه موجه K يقابله تردد زاوي وان جميع الاهتزازات المحتملة تحدد بقيم K في المدى

$-\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{\pi}{a}$ .... *حدود منطقة برليون الاولى*

ويدعى هذا المدى بنطاق او منطقة برليون الأولى (1st B.Z.) (First Brillauin Zone) للشبيكة الخطية، اما المدى الذي يلي مدى منطقة برليون الاولى وبنصف دوره $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ لكل من جهتيها فيدعى بمنطقة برليون الثانية(2st B.Z.)

$\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{2\pi}{a} \qquad -\frac{2\pi}{a} \leq K \leq -\frac{\pi}{a}$ .... *حدود منطقة برليون الثانية*

تتبعها منطقة برليون الثالثة على نفس المنوال وهكذا بقية مناطق برليون الرابعة والخامسة. ان الكمية $\left(\frac{2\pi}{a}\right)$ تمثل قيمة متجه الشبيكة المقلوبة $(\vec{G})$ لشبيكة او سلسلة احادية الذرات ذات بعد واحد، وهذا المتجه يربط بين أي نقطتين متكافئتين في منطقتين مختلفتين من مناطق برليون (ان فضاء برليون هو فضاء متجه الموجه أي فضاء شبيكة مقلوبة).

اذا فرضنا ان $\vec{K}$، $\vec{K'}$ تمثل متجهات موجه داخل وخارج منطقة برليون على التوالي فان:

$$K = K' + G \qquad\qquad K = K' \mp n\left(\frac{2\pi}{a}\right)$$

بعد اهمال صفة الاتجاهية لانهما يقعان على خط واحد، حيث n عدد صحيح

3- ان التناسب بين التردد الزاوي (ω) ومتجه الموجه K **لقيم صغيرة جداً اي ان (Ka<< 1) (أي عند منطقة اطياف موجات طويلة)** ويماثل ذلك للموجات المرنة في وسط مستمر متجانس اي ان:

$$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \dots \text{علاقةالتفريق} \dots (3)$$

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ستكون صغيرة جدا وعند ذلك سيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{عندما تكون الزاوية صغيرة}$$

$$\omega \approx \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

س2) لشبيكة خطية أحادية الذرات وعند منطقة الأمواج الطويلة اثبت ان: $\boldsymbol{\omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka}$

وهذا يعني ان كان الطول الموجي للاهتزاز (او الاضطراب) اكبر بكثير من ثابت السلسلة (a) فان سلسلة الذرات تتصرف كانها سلك مستمر كما يصفه الميكانيك الكلاسيكي حيث تكون سرعة انتشار الموجه كمية ثابتة لا تعتمد على الطول الموجي

أي انه عندما يكون Ka<< 1 فان $K << \frac{1}{a}$ **بما ان** $\frac{1}{\lambda} = K$ **فان** $\lambda >> a$

أي عند (<u>منطقة اطياف موجات طويلة</u>) ولذلك تتناسب (ω) خطيا مع K تقريبا اي ان:

$$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \dots \text{علاقةالتفريق} \dots (3)$$

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ستكون صغيرة جدا وعند ذلك سيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{عندما تكون الزاوية صغيرة}$$

$$\omega \approx \mp 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right) \qquad \omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka = 2\pi\nu \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

ν = نيو (Nu) يمثل تردد الموجه التي طولها λ.

$$\lambda\nu = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a = V_\circ$$

$$\omega \approx \mp \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} Ka = V_\circ K$$

$$\omega \approx V_o K$$

س3) لشبيكة خطية أحادية الذرات وعند منطقة الأمواج الطويلة اثبت ان: $\boldsymbol{\omega \approx V_o K}$

وايضاً $\left(V_\circ = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a\right)$ حيث $V_\circ$ هي سرعة انتشار الموجة الصوتية او المرنة في منطقة أطياف الموجات الطويلة لسلسلة خطية من الذرات المتشابهة وهي كمية ثابتة تقريبا كما هو الحال لسرعة انتشار موجة طولية في وسط مستمر مرن ومتجانس ذو بعد واحد. بالنسبة للموجات ذات الاطوال الموجية الكبيرة (أي عندما تكون λ كبيرة) (بعبارة أخرى عندما تكون K صغير) تنتقل ترددات هذه الموجات خلال الشبيكة، بينما الترددات الأخرى سوف تتلاشى بسرعة وبذلك تعمل الشبيكة عمل مرشح ميكانيكي للتخلص من الترددات الواطئة.

وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه يمكن اعتبار جيب الزاوية مساوياً للزاوية أي ان:

$$\omega = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad \text{...... علاقةالتفريق ......} \quad (3)$$

$$\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{............... القيمة العظمى للتردد الزاوي}$$

$$\omega = \mp \omega_m \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad \text{...... علاقةالتفريق ......} \quad (3)$$

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\omega = \omega_m\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{\omega_m a}{2}\right)k \qquad \because \ \omega = V_o k \qquad \therefore \ V_o = \frac{\omega_m a}{2}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{\omega_m = \frac{2V_o}{a}}$$

وايضاً يمكن ان نستنتج:

$$V_o = \frac{\omega_m a}{2} \qquad \because \ \omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore \ V_o = a\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

اما عند قيم K اكبر من ذلك فان سرعة انتشار الموجه لا تكون ثابتة بل تتناقص كلما ازداد متجه الموجه (او صغر الطول الموجي). وعندما تصبح قيمة K مساوية الى $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ فهذا يعني ان الطول الموجي اصبح يساوي (2a) والدالة ω_k تنحني الى مماس افقي وتصبح قيمتها (ω_m) وتساوي $\left(\frac{2V_o}{a}\right)$.

$$\left(\boldsymbol{\omega_m = \frac{2V_o}{a}}\right)$$

ان هذا التباين في سرعة انتقال الموجه بسبب تباين اطوالها الموجيه نتيجة انتقالها من وسط مفرق او مشتت (dispersive) يقودنا الى التمييز بين سرعة الطور υ (Phase velocity) وسرعة المجموعة υ_g (group velocity) حيث يمكن التعبير عنها بصورة عامة باستخدام المعادلة (3) التي تمثل علاقة التفريق:

$$\omega = \mp 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ \text{... علاقةالتفريق ...} \ (3) \qquad V_\circ = a\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{2}{K}\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{2a}{Ka}\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{2}{K}\left(\frac{V_\circ}{a}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{Ka}{2}\right)}{\left(\frac{Ka}{2}\right)}\right]$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial K} = V_\circ \cos\left(\frac{Ka}{2}\right) v = V_\circ\left[\frac{\sin\left(\frac{Ka}{2}\right)}{\left(\frac{Ka}{2}\right)}\right]$$

في منطقة الترددات الواطئة فان كلا من سرعة الطور v وسرعة المجموعة v_g تساوي $V_\circ$ أي ان

$$\left[v = v_g = V_\circ = a\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

وهي سرعة الموجة الصوتية المنتشرة في تلك المنطقة، حيث تكون قيم $Ka << 1$.

وهذه النتيجة مطابقة تماما لسرعة انتشار الموجة الصوتية في وسط مرن ومستمر. ومن الناحية العملية يمكن معرفة ثابت القوة C عند قياس سرعة الموجات الصوتية الطويلة في مادة صلبة.

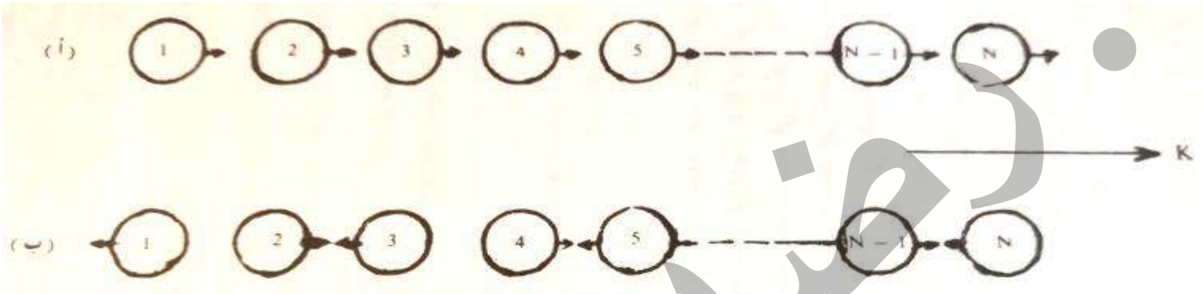
كلما ابتعدنا عن منطقة الترددات الواطئة حيث تزداد القيم المطلقة لمتجه الموجه K اكثر فاكثر (موجات قصيرة) فان سرعة الطور (υ) هي دالة لمتجه الموجه، تقل حتى تبلغ اقل قيمة لها $\left(\frac{2V_o}{\pi}\right)$ عندما تكون $\left(K = \mp\frac{\pi}{a}\right)$ والتردد الزاوي اعظم ما يمكن $\left[\omega_m = 2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

اما سرعة المجموعة (υ_g) فهي كذلك تقل بازدياد القيم المطلقة ل K حتى تبلغ قيمتها الصفر عندما تكون $K = \mp\frac{\pi}{a}$. ان سرعة المجموعة عندما تكون صفر ($\upsilon_g=0$) تعني ان الموجه الحاصلة من الاهتزاز ليست موجه متنقلة بل موجه واقفة عند حدود منطقة برليون حيث الازاحة عند تلك الحدود هي $K = \left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$.

$$u_n = Ae^{[i(Kna-\omega t)]} \quad \& \quad K = \left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$$

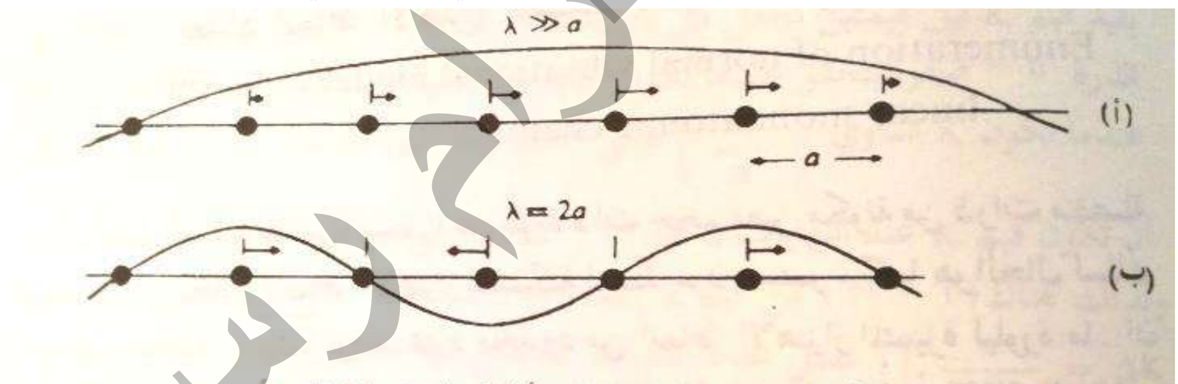
$$u_n = Ae^{-i\omega t}\cos n\pi \qquad\qquad u_n = \mp Ae^{-i\omega t}$$

حيث ان الإشارة الموجبة تكون لقيم n الزوجية والاشارة السالبة تكون لقيم n الفردية. فمثلا إزاحة الذرة الرابعة تساوي وتعاكس إزاحة الذرة التي قبلها (الثالثة) او التي تليها (الخامسة). أي ان الذرات المتجاورة تتحرك باطوار متعاكسة كما في الشكل:



الإزاحات الذرية لأنماط الاهتزاز الطولية لسلسلة خطية
(أ) نمط اهتزاز قرب مركز منطقة برليون الأولى
(ب) نمط اهتزاز قرب حدود منطقة برليون الأولى

وبذلك فان نمط الاهتزاز عند حدود منطقة برليون الاولى لا يمكن ان ينتشر خلال السلسلة الخطية بل ينعكس الى الخلف ثم الى الامام على التعاقب كموجه واقفة كما في الشكل الاتي:



الشكل (٤–٨) (أ) الازاحات الذرية في مدى أطياف الموجات الطويلة جدا
(ب) الازاحات الذرية عند طول موجي $\lambda = 2a$ والذي يقابل متجه موجة $K = \frac{\pi}{a}$

السؤال الثالث في الفصل السادس في كتاب فيزياء الحالة الصلبة تأليف: د. يحيى نوري الجمال.
س 4) سلسلة خطية احادي الذرات ذات مسافة بينية ($a=3*10^{-10}$ m) فاذا كانت سرعة الصوت تساوي $3*10^{2}$ m/sec ، احسب تردد القطع؟
ملاحظة : توجد أخطاء طباعية في هذا السؤال في كتاب د. يحيى نوري الجمال مثل
- **ذات مسافة بينية ($a=3*10^{10}$ m)**
- **سرعة الصوت تساوي $3*10^{3}$ m/sec**

خلاصة ما تقدم:

- ✓ هي عندما تكون K صغيرة فان a<<λ فتتحرك جميع الذرات في الطور نفسه بعضها بالنسبة للبعض الاخر وان القوة المعيدة الموثرة في ذرة بسبب تفاعلها مع جيرانها الأوائل تكون صغيرة ولهذا السبب تكون ω صغيرة كذلك.
- ✓ وعندما تكون K=0 تكون $\lambda = \infty$ ولذلك تتحرك الشبيكة الخطية برمتها بوصفها (جسما صلدا ذا اجزاء غير قابلة للاهتزاز) (rigidbody) بسبب ضألة القوة المعيدة. مما يفسر بسبب كون ω = 0 عندما تكون K = 0
- ✓ وعندما تكون $K = \frac{\pi}{a}$ حيث λ = 2a تتحرك الذرات المتجاورة بأطوار متعاكسة وبعد ذلك تكون القوة المعيدة والتردد الزاوي اعظم ما يكون وتكون (موجات واقفة).

السرع في الحركة الموجية:

هنالك ثلاث سرع في الحركة الموجية متميزة عن بعضها تماما وهي:

1- سرعة الذرة: وهي السرعة التوافقية للذرة حول موقع الاتزان، وهي مقدار متغير فهي تكون في غايتها العظمى في لحظة مرور الذرة في موقع الاتزان. وتكون صفراً عندما تكون في اقصى إزاحة عن موقع الاتزان.

2- سرعة الطور(v) : وهي سرعة تقدم طور معين للموجة المفردة وهي مقدار ثابت في الوسط الواحد والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالعلاقة التالية: $\left(v = \frac{\omega}{K}\right)$

أي ان سرعة الطور هي عبارة عن سرعة انتشار موجة نقية ذات تردد معين (ω) ومتجه موجي K

3- سرعة المجموعة (v_g): عبارة عن سرعة انتشار عدد غير محدود من الترددات. أي ان سرعة المجموعة تمثل سرعة النبضة (Pulse) والتي متوسط ترددها (ω) ومتجه الموجة **K**. والتي يمكن التعبير عنها رياضياً بالعرقة التالية: $\left(v_g = \frac{\partial\omega}{\partial K}\right)$

انماط الاهتزاز لشبيكة احادية ثلاثية الابعاد:

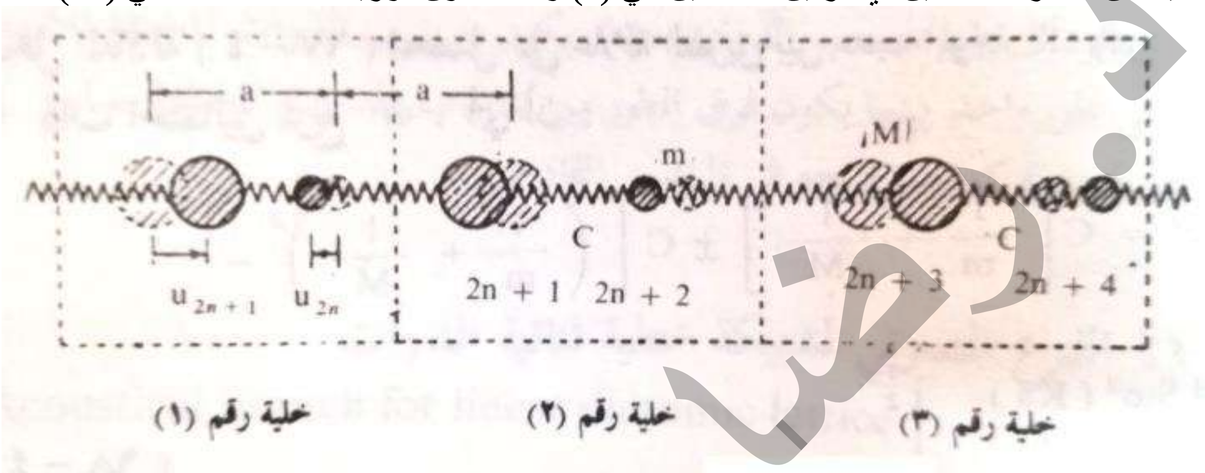
سابقا افترضنا وجود نوع واحد من الازاحات الذرية هي ازاحات طولية (Longiludinal)، اي ان اتجاه الذرات باتجاه انتشار الموجه (K) ولكن توجد ايضا ازاحات ذرية مستعرضة (transvers) باتجاه عمودي على اتجاه انتشار الموجه. ان الموجه في شبيكة او بلورة ثلاثية الابعاد لها الخصائص المستعرضة والطولية والمعادلات الخاصة بذلك تصبح أكثر تعقيد من تلك المعادلات لشبيكة خطية حيث ان كل بعد يولد مركبة ديكارتية إضافية لمتجه الازاحة ولذلك يجب ان تتضمن المعادلات حدودا مناسبة لثوابت القوى وكذلك السرع بحيث تناسب الازاحات الطولية والمستعرضة.

وخلاصة القول انه لشبيكة ذات ثلاثة ابعاد يجب علينا إيجاد حل لمعادلة تكعيبية أي معادلة من الدرجة الثالثة في ω^2 بينما المعادلة (*) للشبيكة الخطية تمثل معادلة في ω^2 . ويمكن فيزيائيا معرفة الجذور الثلاثة للمعادلة التكعيبية عند التركيز على حدود الاطوال الموجية الطويلة أي كاننا نتعامل مع وسط مرن مستمر. فمن المعروف جيدا انه في وسط مرن مستمر، يمكن ان تنتشر ثلاث انواع من الموجات الصوتية (acoustic) ذات سرع مختلفة والاختلاف الاساسي بينها يكمن في طبيعة استقطابها Polarization.

فمثلاً لوسط مستمر متماثل الخواص الاتجاهية يكون أحد الانماط ذات استقطاب طولي (متجه الازاحة لكل ذرة يكون في موازاة اتجاه انتشار الموجه). اما النمطان الاخران فلهما السرعة نفسها واستقطابها مستعرض (اي تتحرك الذرات في سطوح عمودية على اتجاه متجه الموجه). وبصورة عامة تكون سرعة النمط الطولي اعلى من سرعة النمط المستعرض.

انماط الاهتزاز لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

هنا ترافق نقطة الشبيكة الواحدة ذرتان قد تكونان متشابهتين في الكتلة كما في الماس او مختلفتين في الكتلة كما في (Nacl) في هذه الحالة فان علاقة التفريق بين K & ω لكل نمط من الاستقطاب. يظهر فرعان رئيسان هما الفرع الصوتي (acoustical branch) والفرع البصري (optical branch) وكل منهما يضم موجات طولية ومستعرضة. وهذا يعني انه يمكن الحصول على موجات او فونونات:
صوتية مستعرضة (TA) وصوتية طولية (LA) وبصرية مستعرضة (TO) وبصرية طولية (LO).
الان نفترض وجود سلسلة تحوي **نوعين من الذرات الصغيرة (m) والذرات الكبيرة (M)** مرتبة بالتعاقب بحيث ان اقصر مسافة بين اي ذرتين متعاقبتين هي (a) وبذلك تكون دورية فضاء السلسلة هي (2a).



سلسلة خطية ثنائية الذرات

تنتشر الموجه الطولية على طول السلسلة. عندئذ يمكن كتابة ازاحات الذرات المتباينة الاتية وهي تمثل موجات منتقلة وكما يلي:

$$\left.\begin{aligned} u_{2n} &= A\exp\{i[K(2n)a - \omega t]\} \\ u_{2n+1} &= B\exp\{i[K(2n+1)a - \omega t]\} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

حيث ان A،B تمثلان سعة اهتزاز الذرات الصغيرة والكبيرة على التوالي وتكون عادة ذات قيم متباينة، وعلى فرض :

1- ان ثابت القوة (c) متساو في جميع ازواج هذه السلسة. أي ان الثابت المرن لأية اصرة كمية ثابتة.
2- وان القوة المعيدة للجيران الاوائل هي المؤثرة فقط في اية ذرة في السلسلة.
3- وقوع الازاحات الذرية ضمن المدى المرن لقانون هوك

فبذلك يمكن كتابة معادلات الحركة لكل من M،m هي:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2u_{2n}}{dt^2}\right) &= m\left(-\omega^2 u_{2n}\right) = c\left[u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n}\right] \\ M\left(\frac{d^2u_{2n+1}}{dt^2}\right) &= M\left(-\omega^2 u_{2n+1}\right) = c\left[u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ومن خلال تعويض الازاحات الذرية u_{2n} & u_{2n+1} من المعادلة (7) في (8) ينتج:

$$\left.\begin{aligned} -m\omega^2 A &= cB\left[\exp(iKa)+\exp(-iKa)\right]-2cA \\ -M\omega^2 B &= cA\left[\exp(iKa)+\exp(-iKa)\right]-2cB \end{aligned}\right\}$$

$$\exp(iKa)+\exp(-iKa)=2\cos Ka$$

$$\left.\begin{aligned} (m\omega^2-2c)A+2cB\cos Ka &= 0 \\ (M\omega^2-2c)B+2cA\cos Ka &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

المعادلة (9) تمثل معادلتين خطيتين متجانستين ويمكن حلهما آنياً للتخلص من المجاهيل A , B لنحصل:

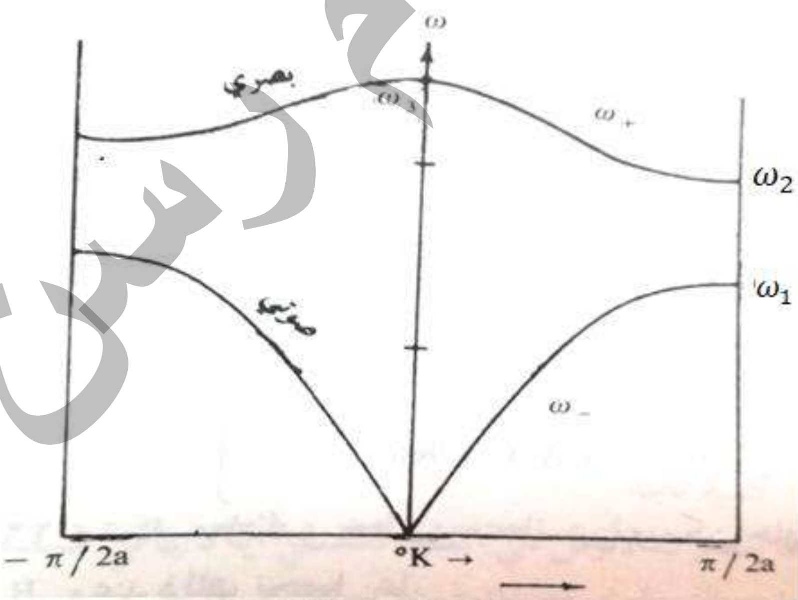
$$\therefore (2c-m\omega^2)(2c-M\omega^2)=4c^2\cos^2 Ka\ldots\ldots$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على علاقة التفريق بين متجه الموجة K والتردد الزاوي ω

$$\omega_{\pm}^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

المعادلة (10) تمثل علاقة التفريق لشبيكة خطية ثنائية الذرات.

الشكل التالي يوضح الفرع الصوتي (المنحني السفلي) والفرع البصري (العلوي) لسلسلة خطية ثنائية الذرات ويعود السبب في هذه التسمية الى طور تذبذب الذرات حيث يكون تذبذب الذرات المختلفة للأنماط الصوتية في طور واحد، بينما يكون فرق الطور بين تذبذب الذرات المختلفة مساويا ل (π) للأنماط البصرية.



$$\omega_2=\omega_+=\left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_1=(\omega_-)_{max}=\left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

علاقة التفريق لانتشار موجة طولية في سلسلة خطية ثنائية الذرات

يتضح من هذه المعادلة (10)

- ان التردد الزاوي هو دالة دورية لمتجه الموجة (K) ولما كانت قيمة (ω) كمية موجبة دائما، فان اية قيمة من قيم (ω^2) تؤدي الى قيمة واحدة لـ (ω) وهذا يعني وجود قيمتين للتردد الزاوي ω− ، ω+ لكل قيمة واحدة لمتجه الموجة (K) .
- وهذا يعني وجود فرعين لطيف اهتزاز سلسلة خطية ثنائية الذرات احدهما يمثل جميع الاختيارات لقيم (ω-) للمعادلة (10) اي مجاميع الانماط الصوتية ويدعى بالفرع الصوتي. والاخر يمثل جميع الاختيارات الموجبة لقيم (ω+) للمعادلة (10) اي مجاميع الانماط البصرية ويدعى بالفرع البصري.

الفرع الصوتي لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

الفرع الصوتي لشبيكة خطية ثنائية الذرات مشابه لمنحني التفريق في شبيكة خطية أحادية الذرات. ولكن توجد بعض الاختلافات الأساسية بين هذين المنحنين. في المعادلة (10) تعتمد (ω^2) على ($\sin^2 Ka$)

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\boldsymbol{\omega}_{\pm}^{2}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right) \pm \mathbf{C}\left[\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right)^{2} - \frac{4\sin^{2}(\mathbf{Ka})}{\mathbf{mM}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{-}^{2}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right) - \mathbf{C}\left[\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right)^{2} - \frac{4\sin^{2}(\mathbf{Ka})}{\mathbf{mM}}\right]^{\frac{1}{2}}$$ للفرع الصوتي

$$\boldsymbol{K} = \pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2a}}$$ عند

$$\sin^{2}(\mathbf{Ka}) = \sin^{2}\left(\pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2a}}\mathbf{a}\right) = \sin^{2}\left(\pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right) = \pm 1$$

$$\boldsymbol{\omega}_{-}^{2}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right) - \mathbf{C}\left[\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right)^{2} - \frac{4}{\mathbf{mM}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{-}^{2}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}\left(\frac{\boldsymbol{M}+\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{mM}}\right) - \mathbf{C}\left[\left(\frac{1}{\mathbf{m}}+\frac{1}{\mathbf{M}}\right)^{2} - \frac{4}{\mathbf{mM}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{-}^{2}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}\left(\frac{\boldsymbol{M}+\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{mM}}\right) - \mathbf{C}\left(\frac{\boldsymbol{M}-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{mM}}\right)$$

$$\omega_1 = \omega_{-}(\mathrm{K}) = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\boldsymbol{K} = \pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2a}}\right)$$ عند

س5) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع الصوتي ω_ ، اثبت ان علاقة التفريق عند $\left(\boldsymbol{K} = \pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2a}}\right)$ تصبح:

اعظم قيمة ممكنة للتردد الزاوي في الفرع الصوتي $\omega_1 = (\omega_{-})_{max} = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$

س6) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع الصوتي ω_ ، اثبت ان: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ عندما $\boldsymbol{K} = \mathbf{0}$

اي ان قيمة (ω^2) يكون ضمن مدى لمتجه الموجه K من $\left(\frac{\pi}{2a}\right)$ الى $\left(-\frac{\pi}{2a}\right)$ للفرع الصوتي (الاختيار السالب) او الفرع البصري (الاختيار الموجب). وهذا المدى يمثل حدود منطقة برليون الاولى :

مدى منطقة برايون الاولى $\left(-\frac{\pi}{2a}\right) \le K \le \left(\frac{\pi}{2a}\right)$

وتقابل $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ لشبيكة خطية احادية الذرات. وهذا الاختلاف يعني ان مدى منطقة برليون الاولى يعتمد على دورية الشبيكة لان (دورية الشبيكة الاحادية هي "a" ودورية الشبيكة الثنائية هي "2a").

وعند تعويض عن قيمة $\left(K = \mp\frac{\pi}{2a}\right)$ في المعادلة (10) لغرض الحصول على اعظم قيمة ممكنة للتردد الزاوي ω_1 :

$$\omega_1 = (\omega_-)_{max} = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (11)$$

نرى بوضوح ان اعظم تردد زاوي لاهتزازات الانماط الصوتية لا يعتمد على كتلة الذرة الصغيرة (m) بل يعتمد فقط على كتلة الذرة الكبيرة (M) حيث انه عند تساوي كتل ذرات السلسلة (m = M) تتحول الشبيكة الى شبيكة أحادية.

اما المعنى الفيزياوي للمعادلة (11) فيمكن توضيحه من المعادلة (12) حيث نرى ان النسبة بين سعة الذرة الكبيرة (B) الى سعة الذرة الصغيرة (A) هي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \left[\frac{2c - m\omega_-^2}{2c\cos(Ka)}\right] \\ \text{So} \ \frac{B}{A} &= \frac{2c\cos(Ka)}{2c - M\omega_-^2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

- ✓ وتقترب هذه النسبة من الواحد عندما تقترب قيمة (K) من الصفر وهذا يعني ان جميع الذرات الصغيرة والكبيرة في السلسلة تتحرك بالاتجاه نفسه او بالطور نفسه في منطقة الترددات الواطئة او الاطوال الموجية الطويلة. وبهذا نجد ان الموجات الصوتية تحقق الشروط التالية:

$$|K| \ll \frac{\pi}{2a}$$ ***متجه الموجة***

$$\mathbf{v}_o = \left[\frac{2Ca^2}{M+m}\right]^{\frac{1}{2}}$$ ***السرعة***

$$\omega = K\mathbf{v}_o \ll \left[\frac{2C}{M}\right]^{\frac{1}{2}}$$ ***التردد الزاوي***

✓ ولكن عندما تكون قيم (K) صغيرة بحيث يمكن التعويض عن قيمة $\sin^2(Ka)$ في المعادلة 10 بقيمة (K^2a^2) فان التردد الزاوي ω_- يتناسب طرديا مع قيمة متجه الموجه (K) عندئذ تكون سرعة انتشار الموجه الصوتية (V_0) كمية ثابتة وكأن الانتشار في وسط مرن مستمر اي ان

$$\omega_- \cong \left(\frac{2c}{m+M}\right)^{1/2} Ka$$

اي

$$V_0 = \frac{\omega_-}{K} = \left(\frac{2c}{m+M}\right)^{1/2} a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

وكلما زادت قيمة (K) تزداد قيم (ω_-) ولكن بنسب متفاوتة اي ان زيادة قيمة (K) بنسب معينة ما تسبب في زيادة قيمة (ω_-) ولكن بنسبة اقل، لان العلاقة ليست خطية بل تعتمد على (Sin Ka) اي ان نسبة السعات ستزداد بازدياد (K).

وعند الوصول الى اقصى قيمة لمتجه الموجه (حدود منطقة برليون) $\left(\mp\frac{\pi}{2a}\right)$ فان (ω_-) تقترب من (ω_1) وبذلك تقترب السعات $\left(\frac{B}{A}\right)$ من اللانهاية وتقترب سرعة المجموعة من الصفر اي ان:

$$K = \mp\frac{\pi}{2a} \qquad \omega_1 \rightarrow (\omega_-)_{max} = \left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{B}{A} = +\infty$$

$$\frac{\omega}{K} = \left(\frac{8\,ca^2}{\pi^2 M}\right)^{1/2}, \qquad \frac{d\omega}{dK} = 0 \qquad (14)$$

يمكن تفسير المعادلة (14) فيزيائيا كالاتي:

- عند بلوغ اعلى تردد زاوي للأنماط الصوتية (ω_1) فان اهتزاز الذرة الصغيرة (m) يضمحل وتصبح سعة اهتزازها (A) تساوي صفر اي تتوقف عن الحركة بغض النظر عن قيمة سعة اهتزاز الذرة الكبيرة (B) ولذلك لا تعتمد (ω_1) على كتلة الذرة الصغيرة بل تعتمد على كتلة الذرة الكبيرة وثابت القوة (c).
- من جهة اخرى لما كانت سرعة المجموعة تساوي صفر عند اعلى قيمة للتردد الزاوي معنى ذلك ان الموجه المنتقلة قد اصبحت واقفة وتنعكس بزاوية (180) بموجب قانون براك للحيود

ان المنطقة الفاصلة بين الفرع الصوتي والبصري في الشكل السابق هي منطقة التردد المحظور او الطاقة المحضورة، بسبب عدم وجود قيم ل ω_- اكبر من ω_1.

الفرع البصري لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

ان الفرع البصري يشمل جميع الترددات الزاوية (ω_+) في الشكل السابق والحاصلة من الاختيارات الموجبة للمعادلة (10). **علاقة التفريق لشبيكة خطية ثنائية الذرات:**

$$\omega_\pm^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{للفرع البصري}$$

عندما $K \cong 0$ فان التردد الزاوي (ω_3) يكون اعظم ما يمكن والانماط الصوتية = صفر اي عندما

$$\left.\begin{aligned} &K \Rightarrow 0, \quad \omega_+ \to \omega_3 = \left[2c\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{1/2} \\ &\frac{\omega}{K} \to \infty, \quad \frac{d\omega}{dK} \Rightarrow 0, \quad \frac{B}{A} \to -\frac{m}{M} \end{aligned}\right\} \quad \text{..........(15)}$$

وهذا يعني ان للأطوال الموجيه الطويلة ذات الاهتزاز البصـــري تتحرك الذرات المتجاورة باتجاهات متعاكســة او بفرق طور (π) بحيث ان مركز الكتلة لأية ذرتين متجاورتين يبقى ســاكنا اي كأن الجزيئة الثنائية في كل خلية تهتز بصورة مستقلة عن جيرانها من الجزيئات مع بقاء مركز الخلية ساكناً.

ان نسبة السعات $\left(\frac{B}{A}\right)$ تبقى سالبة خلال الفرع البصري ولكنها تقترب من الصفر عندما تقترب قيمة (K) من اعظم قيمة لها $\left(\frac{\pi}{2a}\right)$ وتقترب (ω_+) من اقل تردد زاوي (ω_2) حيث يكون طول الموجه اقصـــر ما يمكن ($4a = \lambda$).

$$K = \frac{\pi}{2a} \qquad \omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{B}{A} = 0$$

$$\frac{\omega}{K} = \left(\frac{8ca^2}{\pi^2 m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ، \quad \frac{d\omega}{dk} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

س7) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع البصري ω_+ ، اثبت ان علاقة التفريق تصبح:

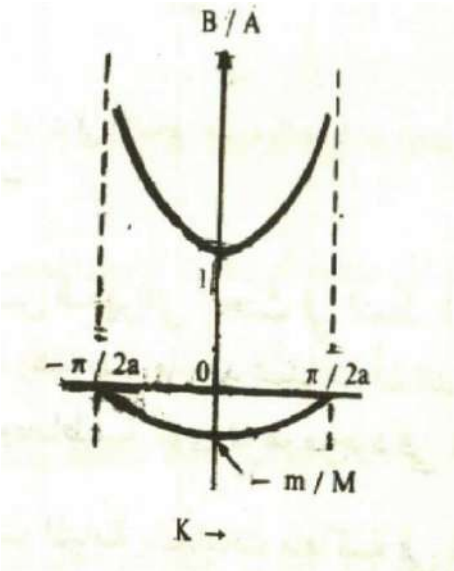
$$\boldsymbol{\omega_3 = \omega_{+max} = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{عندما} \qquad K = 0}$$

س8) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع البصري ω_+ ، اثبت ان علاقة التفريق تصبح:

$$\boldsymbol{K = \mp\frac{\pi}{2a} \qquad \text{عندما} \qquad \omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ان نسبة السعات اصبحت صفرا في هذه الحالة وهذا يعني ان سعة اهتزاز الذرة الكبيرة (B) اصبحت صفرا بغض النظر عن سعة اهتزاز الذرة الصغيرة (A) اي ان الذرة الكبيرة توقفت عن الحركة ولذلك تعتمد ω_2 فقط على كتلة الذرة الصغيرة (m) وثابت القوة (c).

- ❖ في هذا الشكل نلاحظ ان النسبة بين سعات الذرات المختلفة الكتلة لأنماط الاهتزاز الصوتية تتغير من واحد (للموجات الطويلة جدا) الى مالا نهاية (لأقصر موجه ممكنة).



- ❖ بينما تتغير هذه النسبة لأنماط الاهتزاز البصرية من $\left(\frac{-m}{M}\right)$ (للموجات الطويلة جدا) الى صفر (لأقصر طول موجه ممكنة).
- ❖ ان النمط البصري يظهر انبعاثاً او امتصاصا للموجات الكهرومغناطيسية اقوى مما هو موجود في النمط الصوتي.
- ❖ يمكن اثارة الانماط البصرية بوساطة المجال الكهربائي لموجه ضوئية. وللسبب نفسه تعود تسمية هذه الانماط بالانماط البصرية.

نعود الى المنطقة المحضورة، ان عرض هذه المنطقة يعتمد على نسبة كتل الذرتين $\left(\frac{m}{M}\right)$. فعند تقارب كتل الذرتين تضيق منطقة الترددات المحضورة ثم تنعدم هذه المنطقة عندما $(\omega_1 = \omega_2)$ عندما تتساوى كتل هاتين الذرتين والعكس صحيح حيث يزداد عرض المنطقة بازدياد نسبة كتلتيهما $\left(\frac{m}{M}\right)$.

ان مدى الترددات للفرع البصري $(\omega_3-\omega_2)$ يعتمد على نسبة الكتل $\left(\frac{m}{M}\right)$ فعند تقارب كتل الذرتين تضيق منطقة الترددات المحضورة ليتسع مدى ترددات الفرع البصري وتكون $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ حوالي 40% اكبر من ω_2.

وتتقيد جميع اهتزازات الفرع البصري في مدى ضيق جداً ذات تردد زاوي مقارب الى (ω_2) وهذا يعني ان التردد الزاوي للفرع البصري لا يعتمد على متجه الموجه تقريبا وان $\left(\frac{d\omega}{dK}\right)$ تكون مقاربة للصفر.

انماط الاهتزاز لشبيكة ثلاثية الابعاد متعددة الذرات:

يمكن اعتبار صفات طيف الاهتزاز لشبيكة ثلاثية الابعاد (بلورة) تحوي خليتها الاولية ذرتين متشابهتين او مختلفتين، مشابهة تقريبا لصفات طيف الاهتزاز لشبيكة خطية ثنائية الذرات، ان ذلك يعني وجود فرعين اساسين لطيف اهتزاز البلورة هما الفرع الصوتي والبصري وكل من هذين الفرعين يشتمل على فروع للموجات الطولية والمستعرضة. ان عدد الانماط المستعرضة هو دائما ضعف عدد الانماط الطولية.

بصورة عامة اذا كان عدد الذرات في خلية الوحدة لبلورة هو P، فان عدد الفروع لطيف تفريق الفونون (اهتزاز الشبيكة هو (3P) ثلاثة منها هي مجموع الفروع الصوتية و(3P-3) هي مجموع الفروع البصرية.

اما اذا كان لدينا بلورة تحوي على N من الخلايا الاولية فيصبح العدد الكلي للفروع 3PN موزعا كالاتي:

عدد الانماط الصوتية الطويلة	**N**
عدد الانماط الصوتية المستعرضة	**2N**
عددالانماط البصريه الطوليه	**(P-1)N**
عدد الانماط البصريه المستعرضه	**2(PN)N**

تفاعل الاشعة تحت الحمراء وانماط الاهتزاز البصرية:

هنالك سطوح للبلورة تعكس الاشعاع الكهرومغناطيسي الساقط عليها بينما هناك سطوح اخرى تمتص هذا الاشعاع. وهذه الظواهر تعتمد على ترددات الاشعاع الساقط وعلى الترددات الذاتية للمواد الصلبة.

ان سرعة الموجات الكهرومغناطيسية أكبر بكثير من سرعة الصوت حيث ان نسبة الزخم الى طاقة الاشعاع الكهرومغناطيسي اقل بكثير من تلك لأنماط الاهتزاز الصوتية الذاتية للمواد الصلبة. وسبب هذا التفاوت بين السرعتين لا يمكن تحقيق قوانين حفظ الزخم والطاقة عند تحويل فوتون بصري الى فوتون صوتي ولكن من الممكن افناء فوتون بصري لتوليد فونون بصري فعند امتصاص بلورة لفوتون اشعة تحت الحمراء ذات تردد زاوي $\approx 10^{B}$ زاوية نصف قطرية لكل ثابت وتولد فونون نتيجة فناء ذلك الفوتون فان قانون حفظ متجه الموجه (حفظ الزخم) يصح عندئذ متجه الفوتون يساوي متجه موجه الفونون.

بصورة عامة فان البلورات التي تحوي خليتها الاولية ذرتين فقط، يمكن القول ان الترددات الزاوية للفرع البصري تقع ضمن منطقة الاشعة تحت الحمراء من طيف الاشعاع الكهرومغناطيسي، لذلك تظهر الانماط البصرية انبعاثاً او امتصاصاً للأشعة تحت الحمراء من طيف الاشعاع الكهرومغناطيسي لذلك تظهر الانماط البصرية انبعاثاً او امتصاصاً للأشعة تحت الحمراء اقوى مما تظهره الانماط الصوتية.

عند مرور فوتونات موجه كهرومغناطيسية خلال اي تركيب ايوني يستقطب متجه المجال الكهربائي لذلك التركيب بحيث ان الايونات المتجاورة ذات القطبية المختلفة تشجع على الحركة بأطوار متضادة لذلك فان هناك علاقة بين الاستقطاب وبين عملية فوتون وتولد فونون بصري في البلورات الايونية.

وبزيادة التردد الزاوي، كتردد الاشعة فوق البنفسجية او اعلى فقد تنعدم مساهمة الالكترونات الخارجية لعدم وجود الوقت الكافي لكي تتجاذب هذه الالكترونات والتردد العالي للإشعاع الكهرومغناطيسي. هناك علاقة بين ثابت عزل البلورة المتعرضة للإشعاع الكهرومغناطيسي ومربع معامل انكسارها كما في العلاقة:

$$n^2 = \varepsilon(\omega) = \frac{c^2}{\mathrm{v}^2} = \frac{c^2 K^2}{\omega^2}$$

v = سرعة الاشعاع الكهرومغناطيسي في الوسط المادي

c = السرعة في الفرغ

$\varepsilon(0)$ = ثابت العزل

n = معامل الانكسار

انماط الفونون الموضعي:

تكون البلورات الحقيقية عادة بلورات غير مثالية، اي وجود عيوب فيها ولهذه العيوب تأثير كبير على الصفات المرنة والكهربائية والصوتية للمواد الصلبة.

ومن العيوب التقليدية في البلورات احلال شائبة (impurity) محل احدى ذرات او ايونات البلورة ويدعى نمط الاهتزاز المرافق لهذه الشائبة بنمط الفونون الموضعي. ان هذا الاحلال يؤدي الى تشويش ضعيف على ترددات انماط الاهتزازات الطبيعية للبلورة وخلق حالات اهتزازية ضمن مدى الترددات الزاوية المحصورة بين الفرع الصوتي والبصري تتلاشى سعتها اسياً مع المسافة من الذرة الشائبة حيث تكون متجهات الموجه لهذه الحالات مركبة.

أسئلة ومسائل

س) عرف: - الفونون، تردد القطع، سرعة الطور، سرعة المجموعة، تشتت برليون (استطارة برليون)، الفونونات المهيجة حراريا، النيوترون الحراري.

س) علل ما يأتي:

1-في تشتت او استطارة برليون يكون التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا؟

ج) بسبب الفرق الكبير بين سرعة الموجه الصوتية في البلوة $(v_{s.})$ وسرعة الفوتون او الموجه الكهرومغناطيسية c (سرعة الضوء) فان التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا ولذلك تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا

2- علل: في تشتت او استطارة برليون تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا؟

ج) بسبب الفرق الكبير بين سرعة الموجه الصوتية في البلوة $(v_{s.})$ وسرعة الفوتون او الموجه الكهرومغناطيسية c (سرعة الضوء) فان التغير في طاقة الفوتون تكون صغيرة جدا ولذلك تكون طاقة الفونون المتولد او الممتص صغيرة جدا

3- علل: يفضل النيوترون على الفوتون عند دراسة طيف الفونون؟

يعد تزحزح تردد (طاقة) فوتون الاشعة السينية نتيجة استطارته غير المرنة صغير جدا مقارنة بتزحزح طاقة النيوترونات المستطيره مع الفونون لذلك يفضل النيوترون على الفوتون عند دراسة طيف الفونون (العلاقة بين تردده الزاوي ومتجه موجته) في المواد الصلب. حيث يمكن قياس تزحزح طاقة النيوترون بصورة مباشرة بينما تصعب قياس التزحزح الصغير في حزمة الاشعة السينية المستطيره.

4- علل: سرعة المجموعة هي الأكثر أهمية فيزيائياً من سرعة الطور؟

الجواب: وبما ان الطاقة والزخم تنقل عملياً بواسطة النبضات وليس الموجات النقية لذا فان سرعة المجموعة هي الأكثر أهمية فيزيائياً .

سؤال 1 في كتاب فيزياء الحالة الصلبة د. مؤيد جبرائيل:

س1) فوتون ضوئي طول موجته في الفراغ $5*10^{-7}$ m يستطير بواسطة بلورة معامل انكسارها 1.5 وسرعة الصوت فيها $4.5*10^{3}$ m/s احسب. 1-اقصى تردد زاوي ومتجه موجة الفونون المتولد عن هذه الاستطارة؟. 2- اقصى تغير نسبي للتردد الزاوي للفوتون نتيجة الاستطارة؟

الجواب: (1)

$$\omega_o \cong 2v_s\omega nc^{-1}\sin\frac{\emptyset}{2} \quad \& \quad \omega_{omax} \cong 2v_s\omega nc^{-1} \quad \& \quad \sin\frac{\emptyset}{2} = \sin\left(\frac{180}{2}\right) = 1$$

ω_o تردد الفونون المنبعث & ω التردده الزاوي لمتجه الفوتون الساقط

v_s سرعة الموجه الصوتية & c سرعة الضوء & $\emptyset$ تمثل زاوية الاستطارة

$$\omega = 2\pi f = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)$$

$$\omega_o \cong \frac{2v_s\omega n}{c} = \frac{2v_s n}{c}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = \frac{4\pi v_s n}{\lambda}$$

$$= \frac{4\times\pi\times4.5\times10^{3}\times1.5}{5\times10^{-7}} = 16.9\times10^{10}\ \text{Hz} = 1.69\times10^{11}\ \text{Hz}$$ **اقصى تردد زاوي**

$$v_s K \cong 2v_s\omega nc^{-1}\sin\frac{\emptyset}{2}$$ K **يمثل متجه موجة الفونون**

$$K \cong 2\omega nc^{-1}\sin\frac{\emptyset}{2}$$

$$K \cong 2\omega nc^{-1} = \frac{2\omega n}{c} = \frac{2n}{c}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = \frac{4\pi n}{\lambda}$$

$$= \frac{4\times3.14\times1.5}{5\times10^{-7}} = 37.68\times10^{6}\ \ \text{m}^{-1}$$ متجه موجة الفونون المتولد نتيجة الاستطارة

2) ان اقصى تغير نسبي لتردد الفوتون (الضوء المرئي) في هذه العملية نتيجة استطارته استطارة غير مرنة هو

$$\frac{\omega-\omega'}{\omega}=\frac{\omega_o}{\omega}\cong 2v_s n c^{-1} \qquad \frac{\omega_o}{\omega}\cong\frac{2v_s n}{c}=\frac{2\times4.5\times10^3\times1.5}{3\times10^8}=45\times10^{-6}$$

ولهذا قلنا بان تزحزح تردد (طاقة) فوتون الاشعة السينية نتيجة استطارته غير المرنة يكون صغير جدا. حيث يصعب قياس التزحزح الصغير في حزمة الاشعة السينية المستطيره.

س2) لشبيكة خطية أحادية الذرات وعند منطقة الأمواج الطويلة اثبت ان: $\omega\approx\mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}Ka$

الجواب:

ان التناســب بين التردد الزاوي (ω) ومتجه الموجهK **لقيم صــغيرة جداً اي ان (Ka<< 1) (أي عند منطقة اطياف موجات طويلة)** ويماثل ذلك للموجات المرنة في وسط مستمر متجانس اي ان:

$$\omega=\mp2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\ \dots\ \text{علاقةالتفريق}\ \dots(3)$$

وبما ان قيمة K صــغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ســتكون صــغيرة جدا وعند ذلك ســيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right)=\left(\frac{ka}{2}\right)\ \dots\dots\dots\dots\ \text{عندما تكون الزاوية صغيرة}$$

$$\omega\approx\mp2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right) \qquad \omega\approx\mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}Ka\ \dots\dots\dots(5)$$

س3) لشبيكة خطية أحادية الذرات وعند منطقة الأمواج الطويلة اثبت ان: $\omega\approx V_oK$

الجواب:

عندما يكون Ka<< 1 فان $K<<\frac{1}{a}$ أو λ >> a

أي عند (<u>منطقة اطياف موجات طويلة</u>) ولذلك تتناسب (ω) خطيا مع K تقريبا اي ان:

$$\omega=\mp2\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\ \dots\ \text{علاقةالتفريق}\ \dots(3)$$

وبما ان قيمة K صــغيرة جدا فعليه تكون الزاوية $\left(\frac{ka}{2}\right)$ ســتكون صــغيرة جدا وعند ذلك ســيكون جيب الزاوية يساوي الزاوية

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right)=\left(\frac{ka}{2}\right)\ \dots\dots\dots\dots\ \text{عندما تكون الزاوية صغيرة}$$

$$\omega\approx\mp2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right) \qquad \omega\approx\mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}Ka=2\pi v\ \dots\dots\dots(5)$$

v = نيو (Nu) يمثل تردد الموجه التي طولها λ.

$$\lambda v=\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}a=V_\circ \qquad \omega\approx\mp\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}}Ka=V_\circ K \qquad \omega\approx V_oK$$

س 4) سلسلة ذرية خطية احادي الذرات ذات مسافة بينية ($a=3*10^{-10}$ m) فاذا كانت سرعة الصوت تساوي 300 m/sec ، احسب تردد القطع؟

الجواب:

$$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{علاقة التفريق} \ldots\ldots\ldots.(3)$$

وجود قيمة عظمى للتردد الزاوي (ω_m) عندما تكون قيم K تساوي $\left(\mp\frac{\pi}{a}\right)$ او مضاعفاتها الفردية وهذا يعني ان هناك **حد اعلى او قطع لتردد الموجات المرنة (الصوتية)** في المواد الصلبة.

$$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi a}{2a}\right)$$

$$= \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \& \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4) \quad \textbf{(اعلى تردد) او (تردد القطع)}$$

$$\because\ V_\circ = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} a \qquad \frac{V_\circ}{a} = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{V_\circ}{a}\right)$$

$$\omega_m = 2\left(\frac{V_\circ}{a}\right) = 2 \times \left(\frac{300}{3 \times 10^{-10}}\right) = 2 \times 10^{12} \ \ (S^{-1})$$

__طريقة أخرى للحل__

$$\omega = \mp 2(\frac{c}{m})^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{علاقة التفريق} \ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$\omega_m = 2\left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{القيمة العظمى للتردد الزاوي}$$

$$\omega = \mp\omega_m \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \text{علاقة التفريق} \ldots\ldots\ldots.(3)$$

بالنسبة للموجات ذات الاطوال الموجية الكبيرة (أي عندما تكون λ كبيرة) (بعبارة أخرى عندما تكون K صغير) تنتقل ترددات هذه الموجات خلال الشبيكة، بينما الترددات الأخرى سوف تتلاشى بسرعة وبذلك تعمل الشبيكة عمل مرشح ميكانيكي للتخلص من الترددات الواطئة. وبما ان قيمة K صغيرة جدا فعليه يمكن اعتبار جيب الزاوية مساوياً للزاوية أي ان:

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\omega = \omega_m\left(\frac{ka}{2}\right) = \left(\frac{\omega_m a}{2}\right)k \qquad \because\ \ \omega = V_o k \qquad \therefore\ \ V_o = \frac{\omega_m a}{2}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\omega_m = \frac{2V_o}{a}} \qquad \omega_m = 2\left(\frac{V_\circ}{a}\right) = 2 \times \left(\frac{300}{3\times10^{-10}}\right) = 2 \times 10^{12} \ \ (S^{-1})$$

س5) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع الصوتي_ω ، اثبت ان علاقة التفريق عند $\left(K=\pm\frac{\pi}{2a}\right)$ تصبح:

اعظم قيمة ممكنة للتردد الزاوي في الفرع الصوتي $\omega_1=(\omega_-)_{max}=\left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$

الجواب:

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\omega_\pm^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

للفرع الصوتي

$$\omega_-^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)-C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

عند $K=\pm\frac{\pi}{2a}$

$$\sin^2(Ka)=\sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2a}a\right)=\sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm1$$

$$\omega_-^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)-C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_-^2(k)=C\left(\frac{M+m}{mM}\right)-C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_-^2(k)=C\left(\frac{M+m}{mM}\right)-C\left(\frac{M-m}{mM}\right) \qquad \therefore\ \omega_1=\omega_-^2(K)=\left(\frac{2c}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

س6) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع الصوتي_ω ، اثبت ان: $\omega=0$ عندما $K=0$

تمثل علاقة التفريق لشـــبيكة لشـــبيكة خطية $\omega_\pm^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-\frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$ **ثنائية الذرات**

وللفرع الصوتي نستعمل (ω_-) $at\ (K=0)$

$$\omega_-^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)-C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2-0\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_-^2(k)=C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)-C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)=0$$

س7) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع البصري ω_+ ، اثبت ان علاقة التفريق تصبح:

$\omega_3 = \omega_{+max} = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ عندما $K = 0$

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\omega_\pm^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

للفرع البصري

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - 0\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

$$\omega_+^2(k) = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]$$

$$\omega_3 = \omega_+(k) = \left[2C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

س8) لشبيكة خطية ثنائية الذرات وللفرع البصري ω_+ ، اثبت ان علاقة التفريق تصبح:

$K = \mp\frac{\pi}{2a}$ عندما $\omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

علاقة التفريق لشبيكة لشبيكة خطية ثنائية الذرات:

$$\omega_\pm^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

للفرع البصري

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(Ka)}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$K = \pm\frac{\pi}{2a}$ عند $\sin^2(Ka) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2a}a\right) = \sin^2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$

$$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) + C\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\omega_+^2(k) = C\left(\frac{M+m}{mM}\right) + C\left(\frac{M-m}{mM}\right) = \frac{2C}{m}$ $\qquad \omega_2 = \omega_+ = \left(\frac{2c}{m}\right)^{\frac{1}{2}}1$

H.W