جامعة بغداد

كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

قسم الفيزياء / المرحلة الاولى

المادة: الميكانيك

Uniform circular motion الحركة الدائرية المنتظمة

الحركة الدائرية المنتظمة لجسم:

هي حركة جسم على مسار دائري بنصف قطر ثابت بسرعة مقدارها ثابت، ولكن اتجاه السرعة يتغير باستمرار

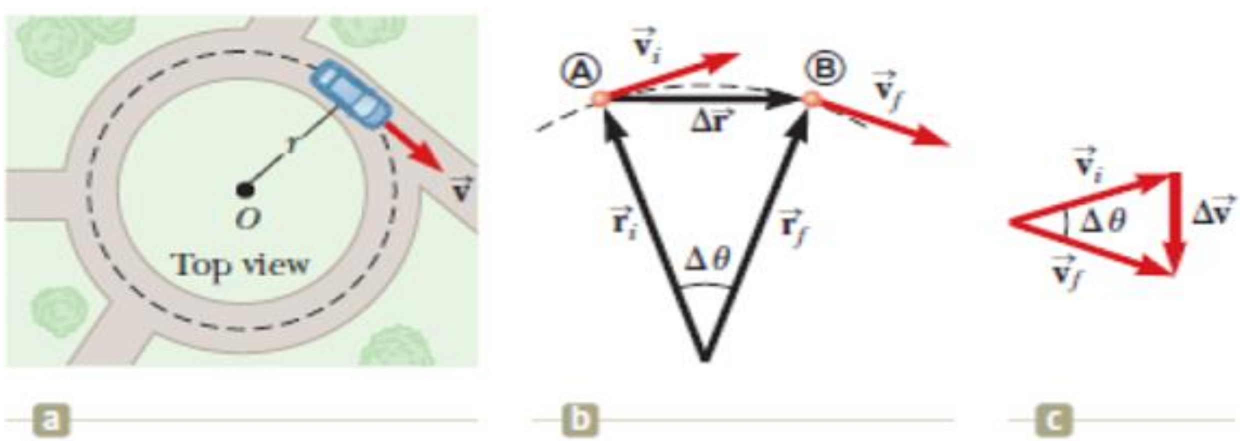
_لنتصور حركة عجلة سيارة في مسار دائري **وبانطلاق v (speed) ثابت** وعليه يطلق تسمية الحركة الدائرية المنتظمة. ولابد من توضيح ان في حالة الحركة الدائرية المنتظمة لجسم ما فانه يمتلك تعجيل وكما موضح ادناه ، من معادلة التعجيل التالية

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ويتضح لنا ان التعجيل يعتمد على التغيير في السرعة . ولما كانت السرعة كمية متجهة فعليه ان التعجيل ممكن ان يحدث بالطريقتين التاليتين:

1- التغيير بمقدار السرعة **2- التغيير باتجاه السرعة**

القيمة الثابتة لمتجه السرعة عادة تكون **مماسية tangent** لمسار حركة الجسم وتكون عمودية على نصف قطر دائرة المسار. **وللحركة الدائرية المنتظمة** فان متجه التعجيل يمتلك **فقط** مركبة عمودية على مسار الحركة وباتجه مركز الدائرة .



من الشكل اعلاه ، بالامكان ان نجد او نحدد قيمة او مقدار التعجيل للجسم. من الشكل (b) ، الزاوية $\Delta\theta$ مابين متجهي الموقع $(\vec{r_i} ، \vec{r_f})$ هي نفسها الزاوية $\Delta\theta$ مابين متجهي السرعة$(\vec{v_i} ، \vec{v_f})$ في الشكل (c) وذلك بسبب ان متجه السرعة عادة عمودي على متجه الموقع $\vec{r}$. وعليه فان كلا **المثلثين متشابهين** (اذا تساوت الزواية مابين ضلعي مثلثين وتساوت النسبة مابين ضلعي المثلثين فعليه ان كلا المثلثين متشاهيين) . بامكاننا الان ان نكتب علاقة رياضية مابين اطوال كلا الضلعين في المثلثين .

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

حيث $v_i = v_f = v$ وكذلك $r_i = r_f = r$

قيمة معدل التعجيل خلال فترة الزمنية لحركة الجسم من النقطة A الى النقطة B ، تعطى بالعلاقة التالية

$$|\overrightarrow{a_{avg}}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

من المعلوم ان كلما اقتربت النقطة A من النقطة B فان عامل الزمن Δt يقترب من الصفر، والمقدار $|\Delta\vec{r}|$ يقترب من المسافة التي يقطعها الجسم على طول المسار الدائري . وعليه فان النسبة $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ تقترب من قيمة الانطلاق speed . بالاضافة الى ان معدل التعجيل يصبح بمثابة التعجيل الاني instantaneous acceleration عند النقطة A . وعليه فبحدود اقتراب $\Delta t \to 0$ ، فقيمة التعجيل تعطى بالعلاقة التالية

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \text{centripetal acceleration التعجيل المركزي} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

التعجيل اعلاه يطلق عليه تسمية التعجيل المركزي وبسبب ان التعجيل موجه باتجاه مركز الدائرة وعمودي على متجه السرعة $\vec{v}$. في اغلب الحالات ، من المناسب ان نوصف حركة الجسم يتحرك بانطلاق ثابت على مسار دائرة نصف قطرها r بدلالة زمن الدورة T والذي يعرف (الفترة الزمنية اللازمة لدورة كاملة) ، حيث ان الجسم سيتحرك خلال هذه الدورة الكاملة مسافة قدرها محيط الدائرة $2\pi r$. بسبب ان انطلاق الجسم يساوي المسافة المقطوعة (محيط الدائرة) مقسومة على زمن الدورة ، اي $v = \frac{2\pi r}{T}$ ، وعليه فان زمن الدورة الكاملة يعطى بالعلاقة التالية

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \qquad v = \frac{2\pi r}{T} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

مثال (1): احسب قيمة التعجيل المركزي للارض عندما تدور او تتحرك بمدارها orbit ماحول الشمس .

باستخدم المعادلتين (1)و(2) ، نحصل

$$a = \frac{\frac{(2\pi r)^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

ومن المعروف ان زمن دوران الارض حول الشمس هو سنة واحدة 1 year ونصف قطر مدار الارض حول الشمس يساوي $r = 1.496 \times 10^{11}$ m

$$a = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\, m)}{1\, yr} = 5.93 \times 10^{-3} m/s^2$$

حيث تم تحويل عاما الزمن من وحدات سنين الى وحدات ثانية وكما يلي $1yr = 3.156 \times 10^7$ s حيث

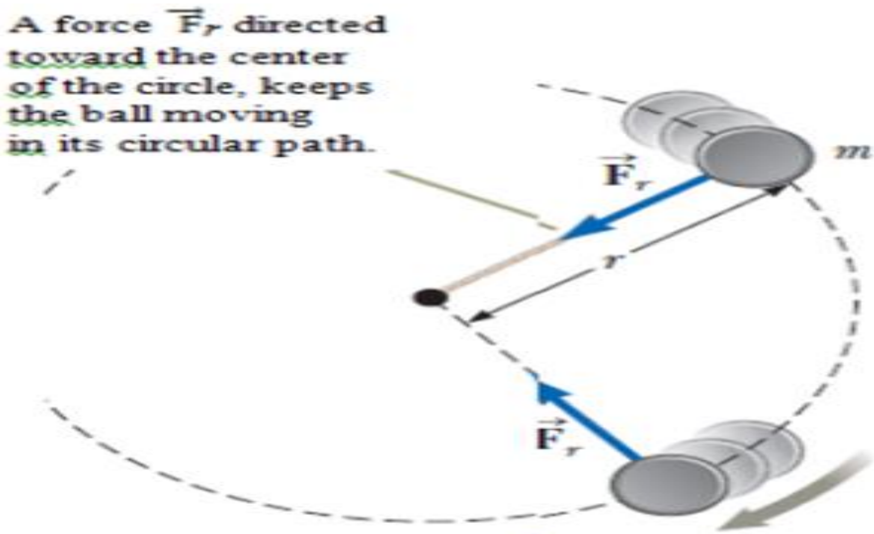
$$1yr = 365\, days \times 24\, hrs \times 60\, min \times 60\, sec = 3.156 \times 10^7 \text{ s}$$

- الان ، لنتصوران كرة كتلتها m مربوطة بخيط string طوله r وتتحرك الكرة بانطلاق ثابت constant speed في مسار دائرة افقية .

حسب قانون نيوتن الاول ، الكرة تتحرك على طول خط مستقيم عندما لايوجد قوة مسلطة عليها ، بينما الخيط يحاول ممانعة الحركة بخط مستقيم من خلال تسليط قوة نصف قطرية radial force $\vec{F}$على الكرة تحاول ابقاء الكرة بالحركة الدائرية، وهذه القوة موجهه على طول الخيط وباتجاه مركز الدائرة. عند تطبيق قانون نيوتن الثاني باتجاه نصف القطر، فصافي القوة المحدثة او المسببة للتعجيل المركزي ممكن ان ترتبط مع التعجيل كمايلي:

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \quad \text{القوة المركزية} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\,(3)$$

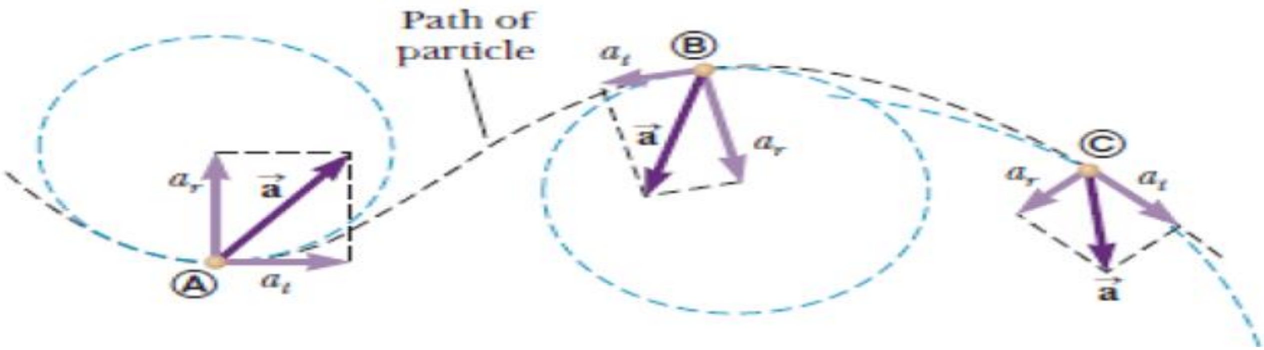
هذه القوة تحدث او تنشأ تعجيل مركزي يعمل باتجاه مركز المسار للدائرة وينتج عنه تغيير باتجاه متجه السرعة. وعندما تتلاشى هذه القوة ، فان الجسم سيستمر بالحركة في المسار الدائري ، بدلا من ذلك المسار على خط مستقيم مماسي للمسار الدائري ، وكما موضح بالشكل التالي.



قيمة او مقدار القوة المركزية اللازمة لادامة الجسم بالحركة على مسار دائري تعتمد على **كتلة الجسم وتعجيله**.

Tangential and Radial acceleration التعجيل المماسي والتعجيل نصف القطري

لنتصور الحركة العامة لجسم ما على طول مسار منحني والمتمثلة بحركة جسم نحو اليمين على طول مسار منحني وسرعة الجسم تتغيير **بالاتجاه وبالمقدار**. في هذه الحالة، فان متجه السرعة عادة مايكون مماسا لمسار الحركة وتعجيل الجسم $\vec{a}$. اتجاه متجه التعجيل الكلي $\vec{a}$ يتغيير من نقطة لاخرى ، حيث في اية لحظة زمنية فان متجه التعجيل الكلي يتحلل الى مركبتين وكما موضح بالشكل التالي.



بالاعتماد على نقطة اصل في مركز الدائرة المنقطة وفي لحظة زمنية معينة . تكون هناك مركبتان:
المركبة القطرية a_r على طول نصف قطر الدائرة **والمركبة المماسية a_t** العمودية على نصف القطر. **متجه التعجيل الكلي $\vec{a}$** يكتب كحاصل جمع اتجاهي لكلا المركبتين القطرية والمماسية وكمايلي:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t} \qquad Total\ acceleration \quad \text{التعجيل الكلي} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

المركبة المماسية للتعجيل تسبب او تنشأ تغيير في انطلاق الجسم speed وهذه المركبة المماسية موازية للسرعة الانية وقيمتها يحدد كمايلي:

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| \quad Tangential\ acceleration \quad \text{التعجيل المماسي} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

مركبة التعجيل القطرية تتولد من التغيير في اتجاه متجه السرعة وتحدد كمايلي:

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \quad Radial\ acceleration \quad \text{التعجيل القطري} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

حيث r يمثل نصف قطر منحني المسار (التحدب او التقعر)
الاشارة السالبة في معادلة (6) ، تؤشر او تبين ان اتجاه التعجيل المركزي هو باتجاه مركز الدائرة والمتمثل بنصف قطر الدائرة. وهذا الاتجاه معاكس لاتجاه موضع الجسم $\vec{r}$ والذي عادة مايكون باتجاه بعيدا عن نقطة الاصل في مركز الدائرة.
بسبب ان كلا المركبتين $\overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{a_t}$ متعامدتان ، فعليه يكون قيمة او مقدار التعجيل الكلي $\vec{a}$ ، يحسب كمايلي:

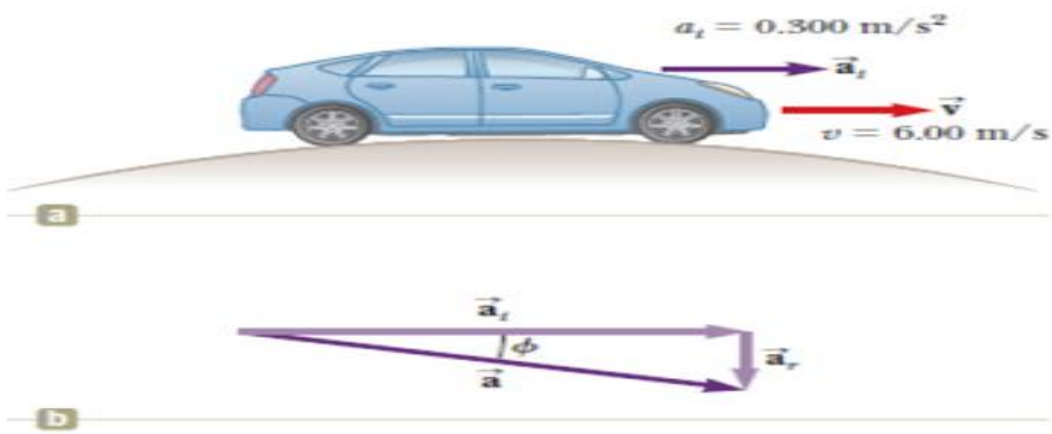
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

عند قيمة معينة لانطلاق الجسم ، وعندما يكون نصف قطر التقوس لمنحني المسار صغير، يكون التعجيل القطري a_r اكبر من التعجيل المماسي وكما موضح بالنقطة A والنقطة B في الشكل اعلاه. والعكس صحيح ، يكون قيمة التعجيل القطري a_r اقل من التعجيل المماسي عندما يكون نصف قطر التقوس لمنحني المسار واسع او كبير وكما موضح بالنقطة C .

اتجاه التعجيل المماسي، اما ان يكون بنفس اتجاه السرعة $\vec{v}$ (في حالة السرعة المتزايدة للجسم) كما في الشكل A او ان يكون معاكس لاتجاه السرعة $\vec{v}$ (في حالة السرعة المتناقصة للجسم) وكما هو الحال عند النقطة B .

في الحركة الدائرية المنتظمة uniform circular motion، حيث تكون سرعة الجسم v ثابتة ، فعليه يكون التعجيل المماسي $a_t = 0$ وتعجيل الجسم هو فقط التعجيل القطري a_r . بمعنى اخر، الحركة الدائرية المنتظمة هي حالة خاصة من الحركة على مسار منحني .

مثال (2): عجلة سيارة تتحرك بتعجيل ثابت قدره $0.3\ m/s^2$ بصورة موازية للطريق . وتجتاز طريق مرتفع وتصل الى قمة الطريق وكانه مسار دائرة نصف قطرها 500 m . في اللحظة التي تكون العجلة في قمة الارتفاع، تكون متجه السرعة يكون افقيا وقيمتها 6 m/s . احسب مقدار واتجاه متحه التعجيل الكلي عند تلك اللحظة؟



بسبب ان عجلة السيارة تتسارع على مسار طريق منحني، لذا فان العجلة تمتلك كلا من التعجيل القطري والتعجيل المماسي متجه التعجيل القطري موجه باتجاه الاسفل ومتجه التعجيل المماسي موجه نحو الافق ويمتلك قيمة قدرها $0.3\ m/s^2$.
التعجيل القطري يعطى بالعلاقة التالية:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6)^2}{500} = -0.072\ \frac{m}{s^2}$$

التعجيل الكلي $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072)^2 + (0.3)^2} = 0.309\ m/s^2$

اتجاه التعجيل الكلي يحدد من العلاقة التالية :

$$\emptyset = tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = tan^{-1}\frac{(-0.072)}{(0.3)} = tan^{-1}(-0.24) = -13^{\circ}.5$$

مثال (3): عجلة سيارة تتحرك بتعجيل ثابت قدره 0.5 m/s2 بصورة موازية للطريق . وتجتاز طريق مرتفع وتصل الى قمة الطريق وكانه مسار دائرة نصف قطرها 500 m . في اللحظة التي تكون العجلة في قمة الارتفاع، تكون متجه السرعة يكون افقيا وقيمتها 8 m/s . احسب مقدار واتجاه متحه التعجيل الكلي عند تلك اللحظة؟

Ans:

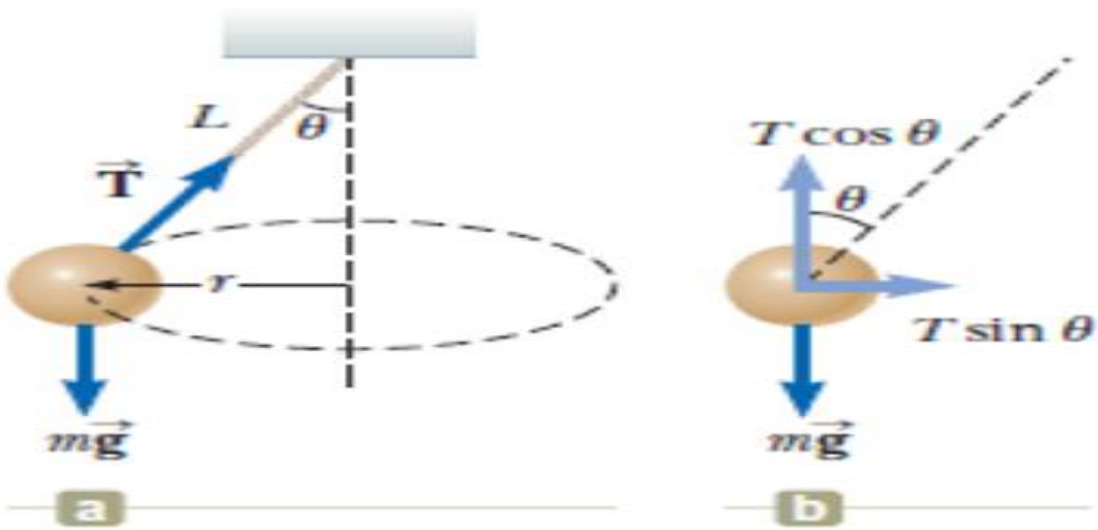
$$a_r = -0.128\ \frac{m}{s^2}$$

$a = 0.516\ m/s^2$ التعجيل الكلي

اتجاه التعجيل الكلي

$\emptyset = -14.3$

<u>مثال (4):</u> كرة صغيرة كتلتها m معلقة بخيط طوله L . الكرة تدور بسرعة ثابتة v في مسار دائرة افقية نصف قطرها r وكما موضح بالشكل. جد علاقة لحساب السرعة؟



نفترض θ تمثل الزاوية مابين الخيط والعمود. قوة الشد $\vec{T}$ المسلطة بواسطة الخيط على الكرة تتحلل الى مركبتين، احدهما عمودية $(T\cos\theta)$ والاخرى افقية $(T\sin\theta)$ ، تعمل باتجاه مركز المسار الدائري.

نطبق قانون توازن او تعادل الجسم(الكرة) بالاتجاه العمودي

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow T\cos\theta = mg \quad \dots\dots\dots(1)$$

باستخدام قانون القوى بالاتجاه الافقي

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) واعتبار ان $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

بالاستفادة من العلاقة $r = L\sin\theta$ ، نحصل على $v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$

<u>ملاحظة:</u> من علاقة السرعة اعلاه، يتبين ان السرعة لاتعتمد على كتلة الجسم (الكرة).

<u>مثال(5):</u> عجلة سيارة تتحرك على طريق مستوي افقي وبمسار منحني كما موضح بالشكل التالي. اذا كان نصف قطر منحني المسار 25 m ومعامل الاحتكاك المستقر مابين اطارات العجلة والرصيف للشارع هو 0.523 . حدد اقصى سرعة ممكن ان تسير بها العجلة وتبقى محافظة على الدوران بسلامة؟

لنتصور ان المسار المنحني للطريق هو جزء من دائرة كبيرة وعليه فان العجلة تتحرك بمسار دائري.
القوة التي تمكن العجلة بالمحافظة على مسارها الدائري هي قوة الاحتكاك المستقرة السكوني وذلك لعدم حدوث انزلاق عند نقطة تماس الاطارات مع حافة الطريق. اعظم سرعة للعجلة v_{max} تدور بها ماحول المسار المنحني هي تلك السرعة عندما تكون العجلة عند حافة الطريق للانزلاق نحو الخارج. وعند هذه النقطة تكون قوة الاحتكاك تمتلك اعظم قيمة

$$f_{s,max} = \mu_s n$$

$$f_{s,max} = \mu_s n = m\frac{v^2}{r} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y = n - mg = 0 \;\rightarrow\rightarrow\rightarrow\; n = mg$$

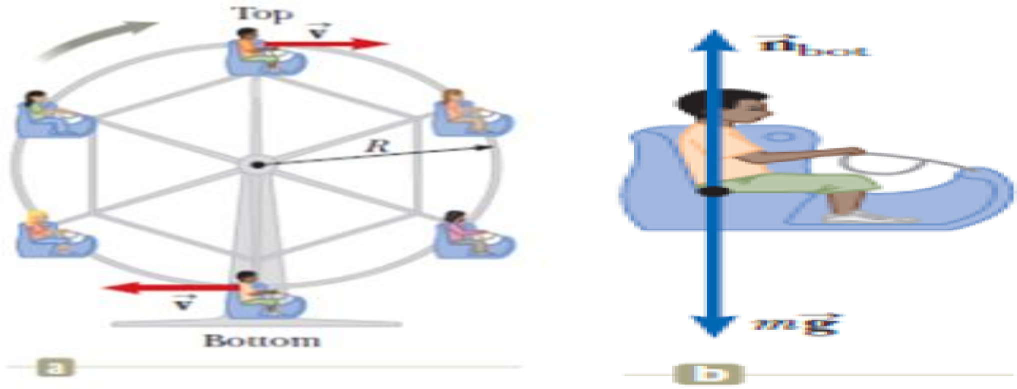
من المعادلة (1) ، نحصل على قيمة اعظم سرعة للعجلة

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mu_s n\, r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s mg\, r}{m}} = \sqrt{\mu_s\, g\, r} = \sqrt{(0.523)\left(\frac{9.8m}{s^2}\right)(35m)} = 13.4\,\frac{m}{s}$$

يتضح من المعادلة اعلاه، ن اعظم سرعة للعجلة لاتعتمد على كتلة العجلة.

<u>مثال (6):</u> طفل كتلته m راكب عجلة دولاب هوائي وكما موضح بالشكل التالي. الطفل يتحرك ضمن دائرة عمودية نصف قطرها 10 m وبانطلاق ثابت قدره 3 m/s .

1- احسب القوة المسلطة من مقعد الجلوس على الطفل عند اسفل نقطة للجولة؟
2- احسب القوة المسلطة من مقعد الجلوس على الطفل عند اعلى نقطة للجولة؟



من الشكل (b) يتضح لنا ان القوى المؤثرة على الطفل هي قوة الجاذبية الارضية ونحو الاسفل $\vec{F} = mg$ وقوة نحو الاعلى $\overrightarrow{n_{bot}}$ المسلطة من المقعد على الطفل. محصلة القوى العمودية هي كمايلي:

$$\sum F = n_{bot} - \mathrm{mg} = ma_c = \mathrm{m}\frac{v^2}{r}$$

$$n_{bot} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg + m\frac{gv^2}{gr} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

$$n_{bot} = mg\left[1 + \frac{\left(3\,\frac{m}{s}\right)^2}{(10\,m)\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)}\right] = 1.09\,mg$$

من النتيجة اعلاه، يتضح ان القوة المسلطة من المقعد على الطفل اكبر من قوة وزن الطفل (mg) بالعامل 1.09 .
الشكل (c) التالي يوضح القوى المؤثرة على الطفل في موضع اعلى الرحلة

محصلة القوى نحو الاسفل التي تنتج تعجلا مركزيا هي $mg - \overrightarrow{n_{top}}$

$$\sum F = mg - n_{top} = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{top} = mg - m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 - \frac{v^2}{rg}\right)$$

$$n_{top} = mg\left[1 - \frac{\left(3\,\frac{m}{s}\right)^2}{(10\,m)\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)}\right] = 0.908\,mg$$

في الحالة اعلاه، يتضح لنا ان مقدار القوة المسلطة من المقعد على الطفل اقل من الوزن الحقيقي للطفل mg بالعامل 0.908 . وعندها الطفل يشعر بوزن خفيف .

الجاذبية Gravitation

قانون نيوتن العام للجاذبية Newton's law of universal gravitation

كل جسم بالطبيعة يتجاذب مع الاجسام الاخرى بقوة تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتي الجسمين وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة الفاصلة مابين الجسمين.

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \;\ldots\ldots\ldots(7) \qquad \textit{Gravitation force} \text{ قوة الجاذبية}$$

حيث G ، ثابت يطلق عليهب ثابت الجذب العام Universal gravitational constant وقيمته تساوي

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg$$

تعجيل الاجسام السقوط الحر وقوة الجاذبية Free-Fall acceleration and gravitational force

مقدار قوة الجاذبية على جسم بالقرب من سطح الارض يطلق عليها تسمية " وزن الجسم" weight

$$mg = G\frac{M_E m}{R_E^2} \rightarrow\rightarrow\rightarrow g = G\frac{M_E}{R_E^2} \qquad \ldots\ldots\ldots..(8)$$

حيث M_E :تمثل كتلة الارض و R_E : يمثل نصف قطر الارض.

من المعادلة (8) اعلاه، نلاحظ ان تعجيل السقوط الحر g ثابت بالقرب من سطح الارض بسبب ان الكميات الاخرى بالمعادلة هي كميات ثابتة.

مثال (7): اذا علمت ان سطح الارض يبتعد بمسافة قدرها تقريبا 6400 km عن مركزها. وكتلة الارض هي بحدود $6\text{x}10^{24}$ kg . مامقدار تعجيل الجاذبية g بالقرب من سطح الارض؟

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6.4 \times 10^6)^2} = 9.8\ m/s^2$$

الان، لنتصور وجود جسم كتلته m على مسافة ارتفاع قدرها h فوق مستوى سطح الارض او مسافة قدرها r عن مركز الارض $r = R_E + h$. قيمة او مقدار قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_g = G\frac{M_E m}{r^2} = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

مقدار قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم عند هذا الموضع او الموقع هي ايضا $\text{mg} = F_g$ ، حيث g يمثل قيمة التعجيل للسقوط الحر من على ارتفاع او الاتساع h . بتعويض قيمة هذه القوة في المعادلة اعلاه ، نحصل على علاقة لحساب التعجيل للسقوط الحر.

$$g = G\frac{M_E}{r^2} = G\frac{M_E}{(R_E + h)^2} \quad \textit{variation og g with altitude} \text{ تغيير التعجيل مع الاتساع}$$