جامعة بغداد

كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

قسم الفيزياء / المرحلة الاولى

المادة: الميكانيك

Chapter Two الفصل الثاني

المتجهات Vectors

ما هو المتجه

المتجه هو كمية فيزيائية لها مقدار (طول) واتجاه .أمثلة على المتجهات: الإزاحة، القوة، السرعة

الكميات المتجهة والكميات العددية Vectors and Scaler:

توصف **الكمية العددية** بقيمة مع وحدة القياس وليس لها اتجاه . وكمثال على الكميات العددية هي درجة الحرارة temperature، حجم المادة volume، كتلة المادة mass، الانطلاق speed، الزمن time، وغيرهما من الكميات الاخرى .

توصف **الكمية المتجهة** بقيمة عددية ووحدة قياس مع الاتجاه وكمثال على الكميات المتجهة السرعة velocity، الازاحة displacement، القوة force، وغيرهما من الالكميات الاخرى .

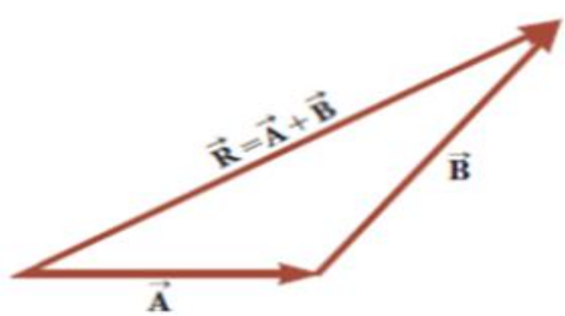
مقارنة بين الكميات العددية والاتجاهية

الخصائص	الكميات العددية	الكميات الاتجاهية
التعريف	كميات توصف **بالمقدار** فقط	كميات توصف **بالمقدار والاتجاه**
البيانات المطلوبة	العدد + الوحدة فقط عدد عادي (مثل: m= 5 Kgm)	العدد + الوحدة + الاتجاه $\overrightarrow{v_x} = 2\ m/sec$ شمالا
القيمة	تكون دائمًا موجبة (أو صفر)	يمكن أن تكون موجبة، سالبة، أو صفر
عمليات الجمع	جمع عادي	جمع هندسي

خصائص المتجهات Properties of vectors

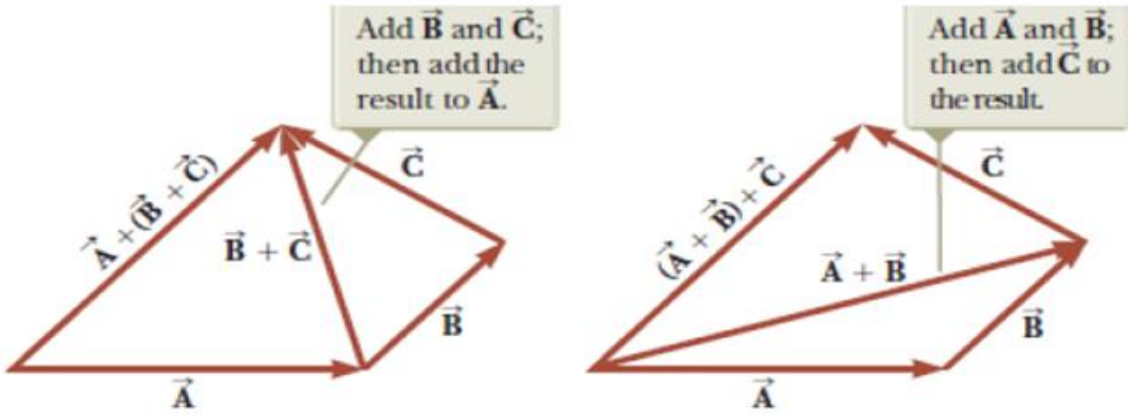
- **جمع المتجهات** Adding vectors: عملية الجمع مابين متجهين لاتعتمد على حالة ترتيب المتجهين

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



ويطلق على هذه الخاصية **"خاصية التبادل"** Commutative . توجد خاصية اخرى لجمع المتجهات يطلق عليها تسمية خاصية "الانتقال الترابطي" Associative

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



المتجه السالب Negative vector : يعرف المتجه السالب بانه المتجه الذي عند جمعه مع نظيره المتجه الموجب فنتيجة الجمع مساوي للصفر ، حيث المتجهين $\vec{A}$ و $-\vec{A}$ ، متساويان بالمقدار ومتعاكسان بلاتجاه .

$$\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=0$$

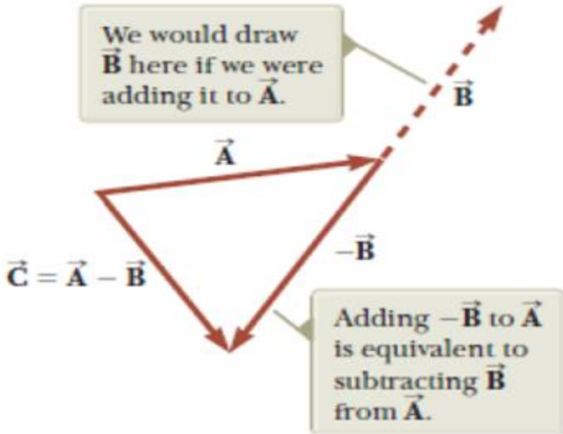
تطبيقات عملية: القوى المتزنة:

- **عندما تكون القوة F و F- تؤثران على جسم يكون محصلة القوى F + (-F) = 0 وبالتالي يكون الجسم في حالة اتزان**

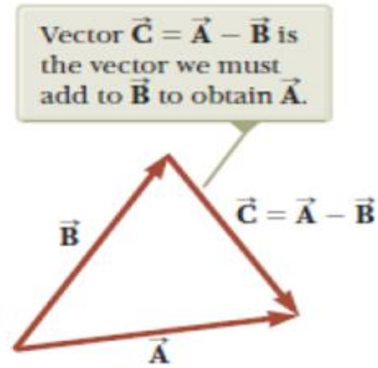
طرح المتجهات Subtraction vectors : عملية طرح المتجهات مشابة لتعريف المتجه السالب ، حيث العملية $\vec{A}-\vec{B}$ ممكن تعريفها كعملية جمع مابين المتجه $-\vec{B}$ مع المتجه $\vec{A}$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(\overrightarrow{-B})$$

الشكل التالي يوضح التمثيل الهندسي لطرح متجهين



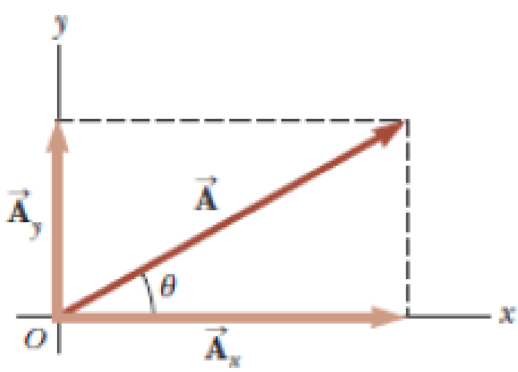
المتجه B يضاف الى المتجه A

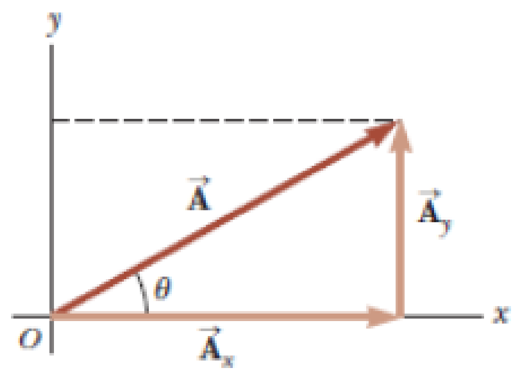


المتجه C يضاف الى المتجه B للحصول على المتجه A

مركبات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

مركبات المتجه Vector components: يوصف او يحلل المتجه بواسطة مركباته باتجاه الاحداثيات المستخدمة (بعد واحد ، بعدين ، ثلاثة ابعاد) . لنفترض وجود المتجه $\vec{A}$ في مستوي الاحداثيات x-y ويصنع زاوية قدرها θ مع المحور السيني الموجب وكما موضح بالشكل الاتي





من الشكل اعلاه وباستخدام مفاهيم وقوانين الدوال المثلثية sin θ و cos θ حيث

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \quad \text{and} \quad \sin\theta = \frac{A_y}{A}$$

$$A_x = A\cos\theta \quad and \quad A_y = A\sin\theta$$

مقدار قيمة المتجه $\vec{A}$ واتجاهه θ تحدد باستخدام العلاقتين التاليتين :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad , \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

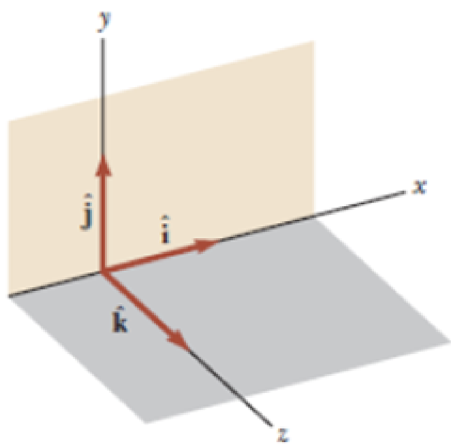
<u>**وحدة المتجهات Unit vectors** :</u> يوصف او يعبر عن وحدة المتجه بمتجه عديم الابعاد وقيمته واحد 1 ويستخدم لوصف اتجاه معين . في علوم الميكانيك تستخدم الحروف $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ للتعبير او لتمثيل وحدات المتجهات بالاتجاهات الثلاثة الموجبة من الاحداثيات x-axis و y-axis و z-axis . وكما ذكرنا سابقا ان القيمة العددية لكل وحدة متجه 1 وعليه

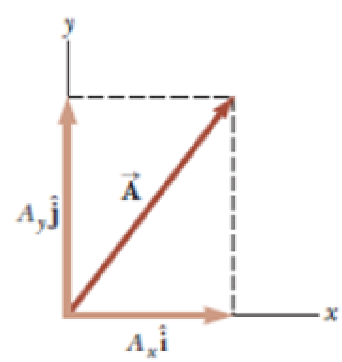
$$|\hat{\imath}\ | = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\therefore \ \overrightarrow{A_x} = \hat{\imath}\, A_x \ , \ \overrightarrow{A_y} = \hat{\jmath}\, A_y \ , \overrightarrow{A_z} = \hat{k}\, A_z$$

$$A = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y \qquad in\ \ 2 - dimension$$

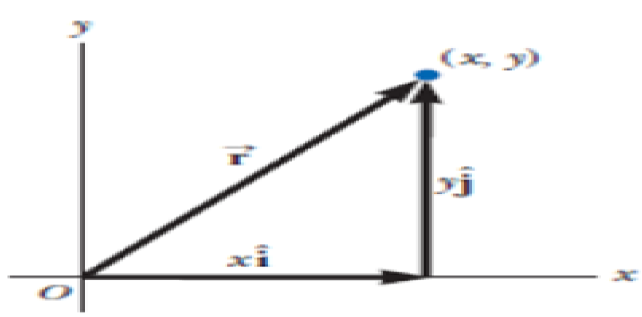
$$A = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y + \hat{k}\, A_z \qquad in\ \ 3 - dimension$$





$$A = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y + \hat{k}\, A_z \qquad\qquad A = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y$$

لنتصور نقطة واقعة في مستوي الاحداثي x-y واحداثياتها موضحة في الشكل التالي :



النقطة (x,y) ممكن وصفها بمتجه الموقع $\vec{r}$ حيث

$$\vec{r} = \hat{\imath}\, x + \hat{\jmath}\, y$$

في حالة وجود متجهين A و B في مستوي الاحداثيات x-y

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \qquad resultant\ vector$$

$$\vec{R} = \left(\hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y\right) + \left(\hat{\imath}\, B_x + \hat{\jmath}\, B_y\right)$$

$$\vec{R} = \hat{\imath}(\,A_x + \,B_x) + \hat{\jmath}\left(\,A_y + \,B_y\right)$$

$$\vec{R} = \hat{\imath}\, R_x + \hat{\jmath}\, R_y$$

وعليه نحصل على مركبات المتجه الناتج وهي

$$R_x = A_x + \,B_x \quad and \qquad R_y = A_y + \,B_y$$

وكما وضحنا سابقا ، **مقدار قيمة المتجه R** و **اتجاهه** يحدد من العلاقتيتين التاليتين

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + \,B_x)^2 + \left(A_y + \,B_y\right)^2}\,,$$

$$\tan\theta = \left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad ,then \qquad\qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

اذا كان المتجهين A و B واقعين في مستوي الاحداثيات الثلاثي x-y-z ، فتكون لكل متجه ثلاثة مركبات

$$\vec{A} = \hat{\imath}\, A_x + \,\hat{\jmath}\, A_y + \hat{k}\, A_z\,, \qquad \vec{B} = \hat{\imath}\, B_x + \,\hat{\jmath}\, B_y + \hat{k}\, B_z$$

متجه حاصل جمعهما

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \hat{\imath}\, A_x + \,\hat{\jmath}\, A_y + \hat{k}\, A_z + \,\hat{\imath}\, B_x + \,\hat{\jmath}\, B_y + \hat{k}\, B_z$$

$$\vec{R} = \hat{\imath}(\,A_x + \,B_x) + \hat{\jmath}\left(\,A_y + \,B_y\right) + \hat{k}(A_z + B_z)$$

مثال (1) : جد حاصل جمع متجهي الازاحة $\vec{A}, \vec{B}$ و قيمة المتجه الناتج واتجاهه الواقعين في مستوي الاحداثيات x-y حيث .

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \ \ and \ \ \vec{B} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

$$\boldsymbol{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} = (2+2)\hat{\imath} + (2-4)\hat{\jmath} = R_x + R_y}$$

$$\therefore \vec{R} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} \qquad\qquad R_x = 4\,m\,, \ \ R_y = -2\,m$$

مقدار قيمة المتجه الناتج واتجاهه يحدد كمايلي

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4.5\,m$$

$$\tan\theta = \left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \frac{-2}{4} = -0.5 \ \ , \ \ \theta = tan^{-1}(-0.5) = \ -27^{\circ}$$

من المفيد ان نوضح ان الاشارة السالبة تعني ان اتجاه المتجه مع اتجاه عقرب الساعة clockwise من المحور x.

مثال (2) : جد حاصل جمع متجهي الازاحة $\vec{A}, \vec{B}$ و قيمة المتجه الناتج الواقعين في مستوي الاحداثيات x-y-z . حيث

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 7\hat{k} \ \ and \ \ \vec{B} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} \ + 3\hat{k}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 7\hat{k} + 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

$$= (2+2)\hat{\imath} + (2-4)\hat{\jmath} + (7+3)\hat{k} = R_x + R_y + R_z$$

$$\therefore R_x = 4\,m\,, \ \ R_y = -2\,m \ \ \ R_z = 10m$$

مقدار قيمة المتجه الناتج واتجاهه يحدد كمايلي

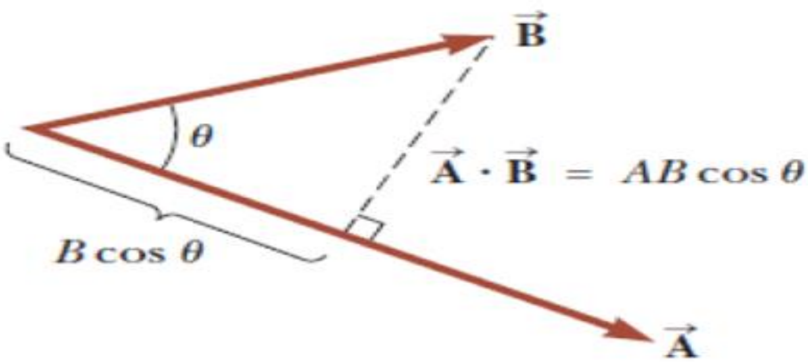
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (10)^2} = \sqrt{120} = 10.95\,m$$

الضرب العددي Scalar product : يعرف الضرب العددي لمتجهين $\vec{A}$،$\vec{B}$ بالتعبير

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

القيمة العددية لحاصل ضربهما تحسب من العلاقة الاتية

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\cos\theta$$



وعادة مايطلق على الضرب العددي تسمية ال dot product ويفسر الضرب العددي لمتجهين بانه حاصل ضرب قيمة المتجه الاول $\vec{A}$ في قيمة العمود الساقط من المتجه $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$ (المسقط) projection ويعبر عنه ب $B\cos\theta$

خصائص الضرب العددي Properties of scalar product

1- الضرب العددي يخضع **لخاصية التبادل commutative** ، اي

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

2- يخضع الضرب العددي **لقانون التوزيع Distributive** للضرب:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

3- اذا كان المتجهين **متعامدين** $\vec{A} \perp \vec{B}$ ، ويعني $(\theta = 90^\circ)$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\cos\theta = 0$$

4- اذا كان المتجهين **متوازيان** $\vec{A} \parallel \vec{B}$ ، ويعني $(\theta = 0^\circ$ او $\theta = 180^\circ)$ وعليه

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B \quad if\ \theta = 0^\circ \qquad , \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = -A\,B \quad if\ \theta = 180^\circ$$

5- ناتج الضرب العددي تكون **سالبة** عندما

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

6- الضرب العددي ل**متجهين متساويان** $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

ملاحظة: يجب مراعاة القاعدة الاتية في الضرب العددي

$$\boldsymbol{\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1}$$

$$\boldsymbol{\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0}$$

يعبر عن المتجهات بدلالة وحدات المتجه وكما يلي

$$\vec{A} = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y + \hat{k}\, A_z \quad , \quad \vec{B} = \hat{\imath}\, B_x + \hat{\jmath}\, B_y + \hat{k}\, B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

مثال (3) : المتجه $A=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ والمتجه $B=-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$. احسب قيمة الضرب العددي للمتجهين وزاوية الاتجاه مابين المتجهين ؟

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \cdot (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = -2(\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) + 4(\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}) - 3(\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}) + 6(\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -2 + 0 - 0 + 6 = 4$$

قيمة المتجه A

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.6$$

قيمة المتجه B

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2.24$$

من العلاقة

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\, B \cos\theta \rightarrow\rightarrow\rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\, B}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{13}\,\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \cong 0.5 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

مثال (4) : المتجه $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ والمتجه $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. احسب قيمة الضرب العددي للمتجهين وزاوية الاتجاه مابين المتجهين ؟

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = -1 + 4 - 2 = 1$$

قيمة المتجه A

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + -1^2} = \sqrt{6}$$

قيمة المتجه B $$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

من العلاقة $$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\,cos\,\theta \rightarrow\rightarrow\rightarrow cos\,\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\,B}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \frac{4}{\sqrt{54}} \cong 0.1361 \quad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad \theta = 82.2^{\circ}$$

الضرب الاتجاهي Vector product : ناتج حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين هو متجه ثالث وقيمته العددية تحسب من العلاقة $A\,B \sin\theta$ ، بالمعنى الرياضي

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \qquad vector\ product$$

$$C = A\,B \sin\theta \qquad magnitude\ of\ vector\ product$$

- ويسمى الضرب الاتجاهي أيضا بـ **Cross Product**

خصائص الضرب الاتجاهي Properties of Vector Product

1- لايمتلك الضرب الاتجاهي خاصية التبادل ، اي

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\,\vec{B} \times \vec{A}$$

2- اذا كان المتجهين متعامدين $\vec{A} \perp \vec{B}$ ، ويعني $(\theta = 90^{\circ})$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A\,B$$

3- اذا كان المتجهين متوازيان $\vec{A} \parallel \vec{B}$ ، ويعني $(\theta = 0^{\circ}$ او $\theta = 180^{\circ})$ وعليه

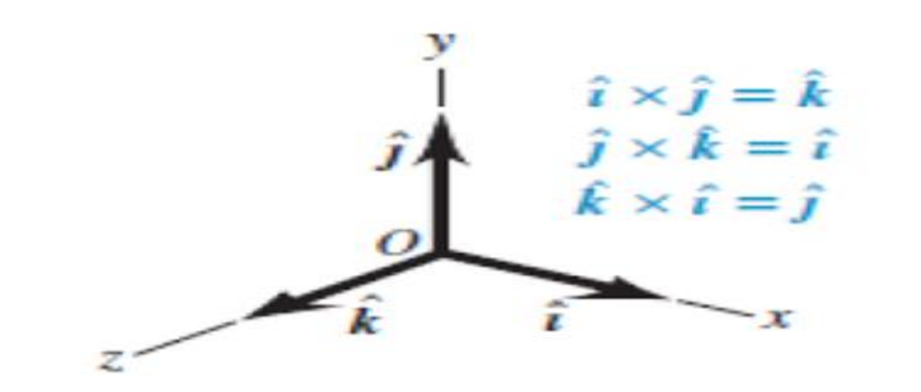
$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \quad and \quad \vec{A} \times \vec{A} = 0$$

4- تتحقق خاصية التوزيع للضرب بالضرب الاتجاهي $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

5- **مشتقة الضرب الاتجاهي بالنسبة لمتغيير ما** وليكن t تنفذ بالصورة الاتية

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

في الضرب الاتجاهي ، من الضروري مراعاة القاعدة التالية في ضرب وحدات الاتجاه الثلاثة .



$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}\,, \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$

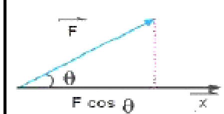
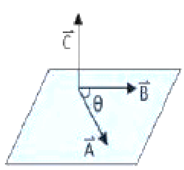
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \;\;, \qquad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \;\;, \qquad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

بالامكان التعبير عن الضرب الاتجاهي لمتجهين بدلالة محددة المصفوفة matrix detriment

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

No.	The scaler (dot product) الضرب القياسي (النقطي)	The vector product (cross product) الضرب الاتجاهي
1	The product of two vectors of a scalar quantity. ناتج حاصل ضرب متجهين كمية عددية	The product of two vectors of a scalar quantity. ناتج حاصل ضرب متجهين كمية اتجاهية عمودية على المتجهين
2	Represents by relation يمثل بالعلاقة : $\vec{A}\,.\vec{B} = \lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert\cos\theta$	Represents by relation يمثل بالعلاقة : $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert\sin\theta$
3	The product has no direction ناتج الضرب ليس له اتجاه	The product has direction and is determined by the rule of the right hand. ناتج الضرب له اتجاه و يحدد بقاعدة الكف اليمنى
4	The commutative property is achieved تتحقق خاصية الابدال $\vec{A}\,.\vec{B} = \vec{B}\,.\vec{A}$	The commutative property is not achieved لاتتحقق خاصية الابدال $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
5	Like work مثل الشغل  $W = \vec{F}\,.\vec{x} = Fx\cos\theta$	Like torque مثل العزم  $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{x} = Fx\sin\theta$

مثال (5) : للمتجهين المعرفان ادناه

$$\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\ , \qquad \vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

-احسب قيمة الضرب الاتجاهي $\vec{A} \times \vec{B}$ باستخدام خاصية محدد المصفوفة

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{\jmath}\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \hat{k}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

$$OR \qquad = \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{\jmath}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(4 - -2) + \hat{\jmath}(1-2) + \hat{k}(2 - -2) = \hat{\imath}(6) + \hat{\jmath}(-1) + \hat{k}(4) = 6\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

<u>مثال (6) :</u> المتجهين $A=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ والمتجه $B=-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$. احسب قيمة الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$. اثبت ان $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(2)(2) - (3)(-1)] = 7\hat{k}$$

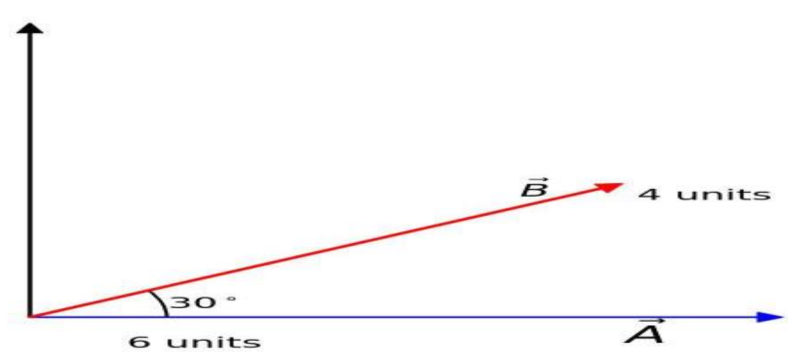
للتحقق من العلاقة $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ نستعمل نفس الطريقة كما يلي:

$$\vec{B}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(-1)(3) - (2)(2)] = -7\hat{k}$$

لذلك العلاقة صحيحة.

<u>مثال (7):</u> المتجه $\vec{A}$ قيمته 6 units وحدات باتجاه الاحداثي السيني الموجب . المتجه $\vec{B}$ قيمته 4 units وواقع في مستوي الاحداثيات x-y ويصنع زاوية قدرها 30 درجة مع الاحداثي السيني . احسب قيمة الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ ؟



من المعطيات في المسألة ، نستنتج ان كلا المتجهين بالامكان التعبير عنهما كمايلي

$$\vec{A} = 6\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} \;\; and$$

$$\vec{B} = 4\,\hat{\imath}\cos\theta + 4\,\hat{\jmath}\sin\theta + 0\,\hat{k} = 4\,\hat{\imath}\,cos\,30 + 4\,\hat{\jmath}\,sin\,30$$

$$\vec{B} = \left(4\ \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{\imath} + \left(4\ \times \frac{1}{2}\right)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\sqrt{3}\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}\left[(6)(2) - (0)\left(2\sqrt{3}\right)\right] = 12\hat{k}$$

$$\vec{C} = 12\,\hat{k}$$

مثال (8): 1- ما هو حاصل جمع المتجه وسالب المتجه؟ ولماذا؟

$$\vec{A} + \left(-\vec{A}\right) = \left(-\vec{A}\right) + \vec{A} = 0$$

لان المتجهين متساويين بالمقدار ومتعاكسين بالاتجاه (بالإشارة)

2- ما هو حاصل جمع متجه مع نفسه

$$\vec{A} + \left(\vec{A}\right) = 2\vec{A}$$

عند جمع متجه مع نفسه ينتج مقدار يساوي ضعف مقدار المتجه واتجاهه نفسه اتجاه المتجه

مثال (9): اذا كان $\vec{A}$و$\vec{B}$ متجهان فما ناتج مايأتي : (واجب)

1- **الضرب العددي للمتجهان $(\vec{A}.\vec{B})$ عندما يكونان متعامدان**
2- **الضرب الاتجاهي للمتجهان $(\vec{A} \times \vec{B})$ عنما يكونان متوازيان**
3- **الضرب العددي للمتجه A في نفسه $(\vec{A}.\vec{A})$**
4- **الضرب الاتجاهي للمتجه B في نفسه $(\vec{B} \times \vec{B})$**

مثال (10)

1-ما مقدار الزاوية بين متجهين عندما يكون حاصل ضربهما القياسي أعظم ما يمكن

1-صفر 2- أعظم ما يمكن؟

2-ما مقدار الزاوية بين متجهين عندما يكون حاصل ضربهما الاتجاهي

1-صفر 2- أعظم ما يمكن؟

3- تحت اية ظروف يمكن لمتجه ان يمتلك مركبتين متساويتين بالمقدار؟

ج : عندما يصنع المتجه زاوية قياسها 45° مع المحور الافقي x

اسئلة problems

1- للمتجهين المعرفان ادناه . احسب قيمة الضرب الاتجاهي $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 6\hat{k} \ , \ \vec{B} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Ans: $\vec{A} \times \vec{B} = 18\hat{\imath} + 21\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ الجواب هو

2- المتجه $\vec{A}$ قيمته 3 units بالاتجاه السالب لمحور السينات x-axis والمتجه $\vec{B}$ قيمته 5 units واقع في مستوي الاحداثيات x-y ويصنع زاوية قدرها 120 درجة مع الاحداثي السيني . احسب قيمة الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A} \times \vec{B}$ ؟

$$\vec{A} = -3\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} \ \ and$$

$$\vec{B} = 5\,\hat{\imath}\cos\theta + 5\,\hat{\jmath}\sin\theta + 0\,\hat{k} = 5\,\hat{\imath}\,cos\,120 + 5\,\hat{\jmath}\,sin\,120$$

$$\vec{B} = (5\ \times -0.5)\hat{\imath} + (5\ \times 0.86602)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2.5 + 4.3301\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ -2.5 & 4.3301 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4.3301 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2.5 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2.5 & 4.3301 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(-3)(4.3301) - (0)(-2.5)] = -12.99\hat{k}$$

$$\vec{C} = -12.99\,\hat{k}$$

3- احسب قيمة الضرب العددي والضرب الاتجاهي وحدد الاتجاه لكلا المتجهين في الحالات ادناه .

$$\vec{A} = 5\hat{\imath} - 3\hat{k} \ , \ \vec{B} = 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

Ans: $\vec{A} \times \vec{B} = 6\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 10\hat{k}$ الجواب هو

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = -12$$

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} \ , \ \vec{B} = 5\hat{\imath} - 3\hat{k}$$

Ans: $\vec{A} \times \vec{B} = -21\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 35\hat{k}$ الجواب هو

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 15$$

4- المتجه $\vec{A}$ قيمته 7 units بالاتجاه الموجب لمحور السيني x-axis والمتجه $\vec{B}$ قيمته 5 units واقع في مستوي الاحداثيات x-z ويصنع زاوية قدرها 30 درجة مع الاحداثي السيني . وضح المتجهين بالرسم وحدد العلاقة الرياضية لكلا منهما .

احسب قيمة الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{A} \times \vec{B}$ ؟

Ans: $\vec{A} \times \vec{B} = -17.5\hat{k}$ الجواب هو

ملاحظة : من الضروري حل المسائل اعلاه للتدريب والتمكن من الاجابة عليها وعلى مثيلاتها اثناء الاختبارات .

ملاحظة : على الطلبة الاعزاء الانتباه للالية التالية في ضرب وحدات الاتجاه الثلاثة مع بعضها البعض . من الشكل التالي ، نتصور الحركة مع اتجاه عقارب الساعة ، وعليه فان عملية حاصل ضرب وحدة المتجه $\hat{\imath}$ مع وحدة المتجه $\hat{\jmath}$ يعطي وحدة المتجه الثالث $\hat{k}$ بسبب ان كلاهما بنفس الاتجاه . بينما عملية حاصل ضرب وحدة المتجه $\hat{\imath}$ مع وحدة المتجه $\hat{k}$ يعطي وحدة المتجه الثالث $-\hat{\jmath}$ بسبب ان كلاهما معاكس لاتجاه الاخر .