

## ايجاد جذور المعادلات

طرق حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

### المعادلات الخطية وغير الخطية

المعادلة الخطية هي المعادلة على الصورة  $y = f(x) = ax + b$  وهي لبسط المعادلات الخطية وتعتبر المعادلة خطية إذا كانت  $x$  من الدرجة الأولى، أما المعادلات التي يكون فيها درجة  $x$  أكبر من 1 فتسمى غير خطية مثل المعادلات من الدرجة الثانية فتكون على الصورة  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ، وبشكل عام تعرف معادلة أو كثيرة الحدود من الدرجة  $n$  هي المعادلة على الشكل

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \dots + a_n x^n$$

### المعادلات التصاعدية Transcendental

وهي المعادلات التي تحتوي حدود غير  $x^n$  مثل  $\cos x, \sin x, \ln x \dots$  مثل

$$f(x) = x^2 + \cos x - e^x$$

### المعادلات الجبرية

وهي عبارة عن معادلات كسرية أو نسبية لحدوديتين على الشكل  $f(x) = \frac{g(x)}{p(x)}$  حيث  $g(x), p(x)$  هي حدوديات.

جذر المعادلة: هو القيمة  $x$  التي تجعل قيمة  $f(x) = 0$  أو هي قيمة  $x$  التي يمر عندها خط المنحنى بمحور السينات.

وبالتالي سيكون جذر أو حل المعادلة الخطية السابقة هو  $x = -\frac{b}{a}$ ، ويكون جذر معادلة الدرجة لثانية على

$$\text{شكل } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ وهناك معادلات من الدرجة الثالثة إلخ...}$$

### طرق ايجاد جذور المعادلة

#### Bisection Method

#### الطريقة الاولى: طريقة التنصيف

تتلخص هذه الطريقة بما يلي:

إذا كانت الدالة  $f(x)$  دالة مستمرة ومعروفة للفترة  $[x_1, x_2]$  وتحوي على جذر في هذه الفترة هذا يعني أن إشارة الدالة تتغير من الموجب إلى السالب و بالعكس أي أن:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

لنفرض أننا نريد حل المعادلة

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

تحتسب قيمة الدالة عند نهاية الفترة  $x_1, x_2$ ، من أجل ذلك  $f(x_1)$  و  $f(x_2)$  لهما إشارتين مختلفتين أي أن:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

لذلك يوجد حل ( جذر ) للمعادلة (1) ضمن هذا المجال ولنحاول الآن إيجاد القيمة التقريبية للحل.

أسهل طريقة هي اختيار قيمة نقطة المنتصف للدالة , أي أن:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2)$$

ولنحسب  $f(x_3)$  ، هناك احتمالين:

$$-1 \text{ إذا كان: } f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$$

هذا يعني أن الجذر يقع في النصف الأول من الفترة أي بين بداية الفترة  $x_1$  ونقطة المنتصف  $x_3$  .  
نختار قيمة جديدة  $x_4$  تمثل نقطة المنتصف بين  $x_1, x_3$  بحيث يكون

$$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

$$-1 \text{ أما إذا كان } f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$$

هذا يعني ان الجذر يقع في النصف الثاني من الفترة اي بين نهاية الفترة  $x_2$  ونقطة المنتصف  $x_3$  نختار قيمة جديدة  $x_4$  تمثل نقطة المنتصف بين  $x_2, x_3$  بحيث يكون

ونختار

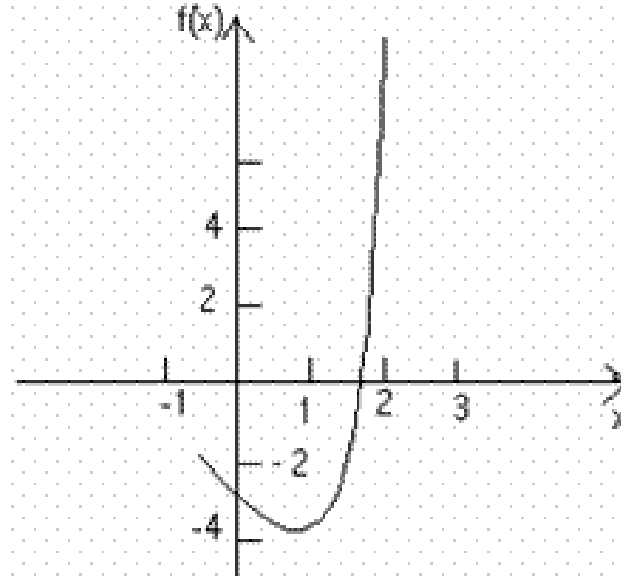
$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

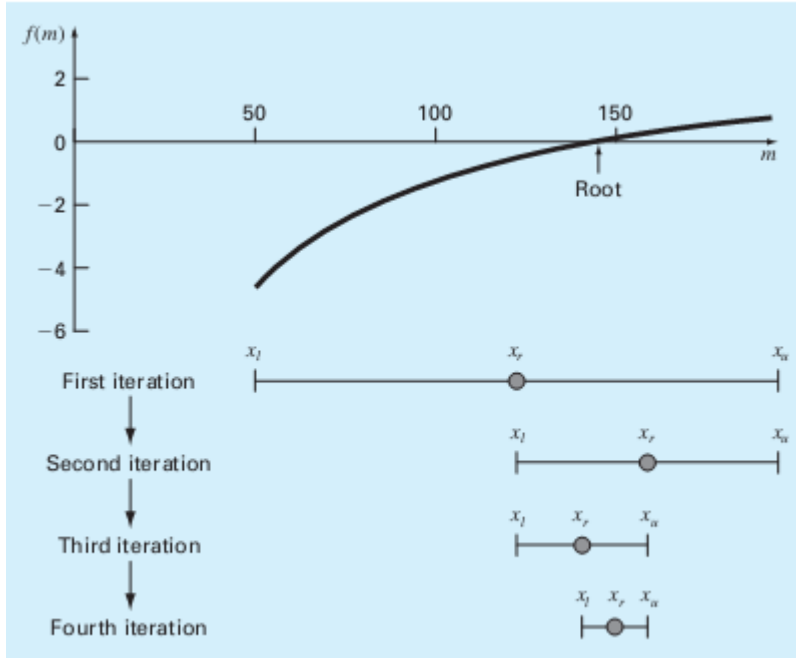
و نستمر بنفس الطريقة حتى نحصل على  $|f(x_N)|$  بحيث تكون إما صغيرة جداً و قريبة من الصفر بالقدر الكافي أو :

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

حيث أن  $\varepsilon$  قيمة صغيرة ( قيمة الاقتراب من الجذر) .

إن هذه الطريقة تعرف باسم التنصيف أو طريقة تقسيم المجال .





مثال- 1- اذا كان جذر المعادلة  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  هو 4 , جد جذر هذه المعادلة عدديا باستخدام طريقة التنصيف بحيث يكون الخطا اقل من 0.1 . للفترة [2,8]

A	B	$c = \frac{A+B}{2}$	f(A)	f( c)	$sign(f(A) \cdot f(c))$	root=c	err = $ 4 - c $
2	8	5	-2	4	-1	5	1
2	5	3.5	-2	-1.25	1	3.5	0.5
3.5	5	4.25	-1.25	0.8125	-1	4.25	0.25
3.5	4.25	3.875	-1.25	-0.359	1	3.875	0.125
3.875	4.25	4.0625	-0.359375	0.1914	-1	4.0625	0.063
3.875	4.0625	3.9688	-0.359375	-0.093	1	3.9688	0.031
3.9688	4.0625	4.0156	-0.092773	0.0471	-1	4.0156	0.016

مثال -2- جدي جذر الدالة  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ ,  $x \in [1,2]$  بحيث يكون الخطاء

$$|x_{n+1} - x_n| = 0.01$$

A	B	C	f(A)	f(c)	$\text{sign}(f(A) \cdot f(c))$	root	error = $ A - c $
1	2	1.5	-5	2.375	-1	1.5	0.5
1	1.5	1.25	-5	-1.797	1	1.25	0.25
1.25	1.5	1.375	-1.796875	0.1621	-1	1.375	0.125
1.25	1.375	1.3125	-1.796875	-0.848	1	1.3125	0.063
1.3125	1.375	1.3438	-0.848388672	-0.351	1	1.3438	0.031
1.3438	1.375	1.3594	-0.350982666	-0.096	1	1.3594	0.016
1.3594	1.375	1.3672	-0.096408844	0.0324	-1	1.3672	0.008

مثال 3- جدي جذر الدالة  $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ ,  $x \in [0,1]$  بحيث يكون:  $error = 0.01$

A	B	C=(A+B)/2	f(A)	f(c)	Sign f(A). f(c)	root=c	error= C-A
0	1	0.5	-1	-0.1705	1	0.5	0.5
0.5	1	0.75	-8.875	0.1343	-1	0.75	0.25
0.5	0.75	0.625	-8.875	-0.0204	1	0.625	0.125
0.625	0.75	0.6875	-8.19335	0.0563	-1	0.6875	0.0625
0.625	0.6875	0.65625	-8.193355	0.0178	-1	0.6562	0.0325
0.625	0.6562	0.64063	-8.19335	-0.0013	1	0.6406	0.0153
0.6406	0.6562	0.64844	-8.095485	0.0082	-1	0.6484	0.0071
0.6406	0.6484	0.64453	-8.095485	0.0034	-1	0.6445	0.0039
0.6406	0.6445	0.64258	-8.095485	0.0010	-1	0.6425	0.0019