ثانيا: طريقة نيوتن – رافسون

لايجاد جذر المعادلة في طريقة نيوتن – رافسون , تعطى قيمة تخمينية لجذر المعادلة ومن ثم تحسب قيمة الدالة عند النقطة التالية والتي تبعد بمسافة h عن النقطة السابقة.
لتكن الدالة $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة للفترة [a,b] , ولنفرض ان للدالة جذرا في هذه الفترة.
لنفرض ان x_0 هو القيمة التخمينية للجذر , ولنجد جذر الدالة x_1 والذي يبعد مسافة h عن x_0 اي ان:

$$f(x_0) = 0 \ \ , f(x_1) = 0$$

$$h = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 + h$$

وعلى فرض قيمة h صغيرة جدا تقترب من الصفر , يمكن اعتبار ميل مماس الدالة عند تلك النقطة مساويا للصفر , اي ان:

$$h \to \tan(\theta) \approx 0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f(x_0) \approx f(x_0 + h) = 0 \qquad (1)$$

وباستخدام متسلسلة تيلر Taylor series للدالة عندة النقطة $(x_0 + h)$ يكون:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) +$$

وعند اهمال الحدود التي تحوي على المشتقة الثانية صعودا نحصل على:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \qquad (2)$$

وبنعويض المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0$$

$$h \approx - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ولكن

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (3)$$

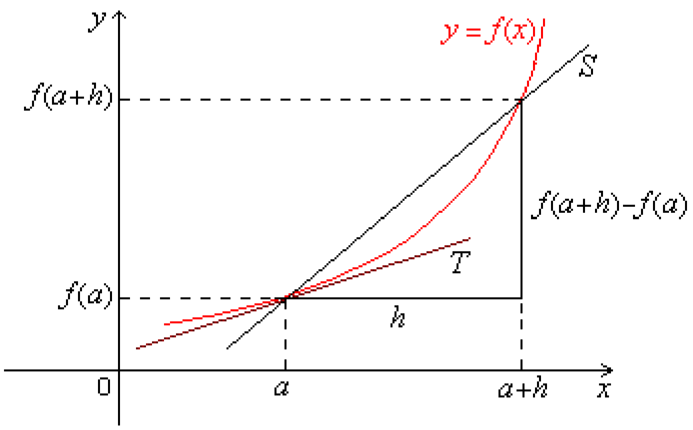
يلاحظ من المعادلة (3) انه يمكن حساب قيمة ادق للجذر من القيمة المخمنة للجذر x_0 , و هي x_1 , و بنفس الطريقة يمكن حساب قيمة الجذر x_2 من الجذر x_1 , اي ان:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبصورة عامة يكون:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

وهذه هي خوارزمية طريقة نيوتن رافسن لايجاد جذور المعادلات.



مثال - 1- اوجدي جذر الدالة $f(x) = e^x + 3x$ باستخدام طريقة نيوتن - رافسن بحيث يكون الخطاء اقل من 0.001 .

الحل:

$$f(x) = e^x + 3x \Rightarrow f'(x) = e^x + 3 \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{e^x + 3x}{e^x + 3}$$

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$error = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0	-0.25	0.25
1	-0.25	-0.2576	0.007621673
2	-0.25762	-0.2576	5.98027E-06
3	the root	-0.2576	5.98027E-06

مثال – 2 - اوجد جذر الدالة $f(x) = x^2 - 5$ باستخدام طريقة نيوتن - رافسن , بحيث يكون الخطاء اقل من 0.0001.

الحل:

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$f'(x) = 2x$$

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$error = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1	3	2
1	3	2.333333	0.666666667
2	2.3333	2.238095	0.095238095
3	2.2380	2.236069	0.002026342
4	2.2360	2.236068	9.18143E-07
	the root	2.236068	

مثال - 3- اوجد جذر الدالة $f(x) = \frac{x^2}{4} - \sin(x)$ باستخدام طريقة نيوتن – رافسن للفترة [0,1] , بحيث يكون الخطاء اقل من 0.00001

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \sin(x)$$

$$f' = \frac{x}{2} - \cos(x)$$

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$error = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1	-13.6759	14.67
1	-13.6759	-7.13289	6.54
2	-7.13289	-3.94582	3.18
3	-3.94582	-1.46617	2.47
4	-1.46617	0.362976	1.82
5	0.362976	-0.0646	0.42
6	-0.0646	-0.00093	0.063
7	-0.00093	-2.1E-07	0.0009