- **الاخطاء في العمليات الحسابية Arithmetic operation error**

نظرية Theorem (1)

الخطا المطلق في حاصل جمع (طرح) عددين مقربين اقل من او يساوي مجموع الاخطاء

البرهان:

ليكن x_0 هي القيمة المقربة للعدد x , و y_0 هي القيمة المقربة للعدد y , ولنحسب الخظاء في عملية الجمع والطرح للعددين.

وليكن :

$$z_0 = x_0 + y_0$$
$$z = x + y$$

$$\Delta z = z - z_0 = (x + y) - (x_0 - y_0) = (x - x_0) + (y - y_0)$$
$$= \Delta x + \Delta y$$
$$|\Delta z| = |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

مثال : لنفرض لدينا العددين $x = 3.221$, $y = 3.222$, اوجدي الخطاء المطلق والنسبي الناتج في عملية جمع وطرح العددين.

الحل

الخطاء المطلق الناتج من تقريب او تدوير العدد هو:

$$\Delta x = \Delta y = 5 \times 10^{-4}$$

ومنه فان الخطاء المطلق المرتكب في عمليتي الحمع والطرح للعددين يكون:

$$|\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001$$

$$|\Delta x - \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001$$

ويكون الخطأ النسبي في حالة الجمع

$$R = \frac{|\Delta x + \Delta y|}{x + y} = \frac{0.001}{6.443} = 0.00015526$$

أما الخطأ النسبي في حالة الطرح

$$R = \frac{|\Delta x - \Delta y|}{|x - y|} = \frac{0.001}{0.001} = 1$$

2- الخطاء النسبي لضرب عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الاخطاء النسبية للعددين.

الإثبات :

لتكن x_o قيمة تقريبية لـــ x

و y_o قيمة تقريبية لـــ y

وبفرض أن $z_o = x_o \cdot y_o$ قيمة تقريبية لـــ $z = x \cdot y$

فإن

$$z = x \cdot y = (x_o + \Delta x)(y_o + \Delta y)$$
$$= x_o y_o + x_o \Delta y + y_o \Delta x + \Delta x \Delta y$$

وبإهمال الحد $\Delta x \Delta y$ الذي هو مقدار صغير فإن

$$\Delta z = z - z_o = x_o y_o + x_o \Delta y + y_o \Delta x - x_o y_o$$
$$= x_o \Delta y + y_o \Delta x$$

الخطأ المطلق

$$\Delta = |\Delta z| = |x_o \Delta y + y_o \Delta x|$$

الخطأ النسبي

$$R_{x.y} = \frac{\Delta}{x_o y_o} = \frac{|x_o \Delta y + y_o \Delta x|}{x_o y_o}$$
$$\leq \frac{|x_o \Delta y| + |y_o \Delta x|}{x_o y_o} = \frac{|\Delta y|}{y_o} + \frac{|\Delta x|}{x_o}$$

أي أن :

$$R_{x.y} \leq R_x + R_y$$

مثال (1ـ7) :

عين الخطأ النسبي لحاصل ضرب العددين التقريبيين

$$x = 3.7148 \quad , \quad y = 0.281$$

الحل :

حاصل الضرب هو

$$x \cdot y = 1.0438588$$

الحطاء الناتج من تقريب العددين:

$$\Delta x \leq 5 \times 10^{-5} \quad , \quad \Delta y \leq 5 \times 10^{-4}$$

الخطاء النسبي :

$$R_{x \cdot y} \leq R_x + R_y = \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{|\Delta y|}{y}$$

$$= \frac{0.00005}{3.7148} + \frac{0.0005}{0.281} = 0.0017929$$

ويمكن استنتاج الخطأ المطلق كما يلي :

$$R_{x \cdot y} = \frac{|\Delta (x \cdot y)|}{x \cdot y}$$

ومنه

$$|\Delta (x . y)| = (x \cdot y) R_{x \cdot y}$$

$$= (1.0438588) \ (0.0017929)$$

$$= 0.0018715$$

وهي قيمة الخطأ المطلق.

3ـ الخطأ النسبي في حاصل قسمة عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النســبية للعددين.

الإثبات :

لتكن $x_\circ$ قيمة تقريبية لـــ x

$y_\circ$ قيمة تقريبية لـــ y

بفرض أن $z_\circ = \frac{x_\circ}{y_\circ}$ $(y_\circ \neq 0)$ قيمة تقريبية لــ $z = \frac{x}{y}$

فإن :

$$\Delta z = \Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} - \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{x_\circ + \Delta x}{y_\circ + \Delta y} - \frac{x_\circ}{y_\circ}$$

$$= \frac{x_\circ y_\circ + y_\circ \Delta x - x_\circ y_\circ - x_\circ \Delta y}{y_\circ (y_\circ + \Delta y)}$$

$$= \frac{y_\circ \Delta x - x_\circ \Delta y}{y_\circ (y_\circ + \Delta y)}$$

الخطأ المطلق $$|\Delta z| = \left|\Delta\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \left|\frac{y_\circ \Delta x - x_\circ \Delta y}{y_\circ (y_\circ + \Delta y)}\right|$$

والخطأ النسبي $$R_{\frac{x}{y}} = \frac{\left|\frac{y_\circ \Delta x - x_\circ \Delta y}{y_\circ (y_\circ + \Delta y)}\right|}{\frac{x_\circ}{y_\circ}} = \left|\frac{y_\circ \Delta x - x_\circ \Delta y}{x_\circ (y_\circ + \Delta y)}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\Delta x}{x_\circ}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_\circ}\right| = R_x + R_y$$

مثال (1ـ8) :

عين الخطأ التقريبي والخطأ المطلق المرتكب في ناتج قسمة العددين التقريبيين

$x_o = 12.4 \ , \ y_o = 1.25$

الحل :

$$\frac{x_o}{y_o} = \frac{12.4}{1.25} = 9.92$$

والخطأ المرتكب في x_o هو $\Delta x \le 5 \times 10^{-2} = 0.05$

والخطأ المرتكب في y_o هو $\Delta y \le 5 \times 10^{-3} = 0.005$

والخطأ النسبي المرتكب في حاصل القسمة هو

$$R_{\frac{x}{y}} \le R_x + R_y = \frac{0.05}{12.4} + \frac{0.005}{1.25}$$
$$= 0.004 + 0.004 = 0.008$$

والخطأ المطلق المرتكب في حاصل القسمة هو :

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x_o}{y_o}\right) R_{\frac{x}{y}}$$
$$= (9.92)\,(0.008) = 0.07936$$

مثال (1ـ9) :

لتكن لدينا الأعداد المدورة التالية :

$x = 3.219 \ , \ y = 2.73 \ , \ z = 1.842 \ , \ s = 8.7193$

احسب L واحسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق المرتكبين حيث:

$$L = \frac{x + y \, . \, z}{s}$$

الحل :

$$y \cdot z = (2.73)\ (1.842) = 5.02866$$

$$x + y \cdot z = 3.219 + 5.02866 = 8.24766$$

$$L = \frac{x + y . z}{s} = \frac{8.24766}{8.7193} = 0.9459085$$

الخطأ النسبي لـــ $y \cdot z$

$$R_{y.z} = \frac{0.005}{2.73} + \frac{0.0005}{1.842} = 0.002130$$

الخطأ المطلق لـــ $y \cdot z$

$$\Delta\ (y \cdot z) = (0.002130)\ (5.02866) = 0.010575$$

الخطأ المطلق لـــ $x + y \cdot z$

$$\Delta\ (x + y \cdot z) \leq 0.0005 + 0.01575 = 0.011075$$

الخطأ النسبي لـــ $x + y \cdot z$ $\qquad R_{x+y.z} = \frac{0.011075}{8.24760} = 0.001343$

الخطأ النسبي لـــ L $\qquad R_L \leq 0.001343 + \frac{0.00005}{8.7193} = 0.001349$

الخطأ المطلق لـــ L $\qquad \Delta\ (L) = (0.001349)\ (0.9459085) = 0.001276$

ملاحظة (1ـــ3) :

إذا رمزنــــــا للخطـــــــأ النســـــبي المرتكـــــب فـــــي حســــاب القيمـــــة التقريبية x_o بالرمز $\frac{\Delta x}{x_o}$ حيث $\Delta x = [x - x_o]$, x القيمة الحقيقية (الفعلية) فإنه يمكــن أن نكتب

$$y = x^n \Rightarrow \frac{\Delta y}{y_o} = n \frac{\Delta x}{x_o}$$

وبشكل عام إذا كان لدينا $u = \frac{x^a \cdot y^b}{z^c}$ فإن الخطأ النسبي يعطى بالعلاقة

$$\frac{\Delta u}{u_o} = a\frac{\Delta x}{x_o} + b\frac{\Delta y}{y_o} + c\frac{\Delta z}{z_o}$$

مهما تكن قيم $a، b، c$ صحيحة أو كسرية، موجبة أو سالبة على أن تؤخذ بقيمتها المطلقة.

ملاحظة (1–4) :

عندما نقول أن العدد x_o هو قيمة تقريبية للعدد x بخطأ لا يتجاوز 10^{-n} أو بدقة حتى 10^{-n} فإن هذا يعني أن :

$$[x - x_o] \le \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$$

مثال (1–10) :

احسب الخطأ النسبي والخطأ المطلق في حساب القيمة

$$u = \frac{x^2 \cdot y}{z}$$

حيث $x = 8 \mp 0.08 \;,\; y = 5 \mp 0.1 \;,\; z = 10 \mp 0.1$

الحل :

الخطأ النسبي هو

$$\frac{\Delta u}{u_o} = 2\frac{\Delta x}{x_o} + \frac{\Delta y}{y_o} + \frac{\Delta z}{z_o}$$

$$\frac{\Delta u}{u_o} = 2\frac{0.08}{8} + \frac{0.1}{5} + \frac{0.1}{10}$$

$$= \frac{2}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100}$$

ومنه الخطأ المطلق المرتكب

$$\Delta u = u_o\left(\frac{5}{100}\right) = \frac{x_o^2\, y_o}{z_o}\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$= \frac{(64)\,(5)}{10}\left(\frac{5}{100}\right) = 1.6$$

وبذلك يمكن أن نكتب :

$$u = \frac{(64)\,(5)}{10} \mp 1.6 = 32 \mp 1.6$$

مثال (1–11) : احسب $y = \sqrt[3]{x^2}$ حيث $x = 8000 \mp 3$

الحل :

$$y_\circ = x_\circ^{\frac{2}{3}} = (8000)^{\frac{2}{3}} = 400$$

$$\frac{\Delta y}{y_\circ} = \frac{2}{3}\,\frac{\Delta x}{x_\circ} = \frac{2}{3}\,\frac{3}{8000} = \frac{1}{4000}$$

ومنه

$$\Delta y = (400)\,\frac{1}{4000} = \frac{1}{10} = 0.1$$

إذن

$$y = 400 \mp 0.1$$