مقدمة عن التحليل العددي وتحليل الاخطاء

التحليل العددي Numerical Analysis

التحليل العددي

العديد من المسائل في الرياضيات لا يمكن حلها باستخدام الرياضية التحليلية اي بمعنى آخر لا توجد طريقة أو قاعدة تعطي الحل الدقيق أو الصحيح). من أمثلة ذلك إيجاد تكامل

$$\int e^{x^2}\,dx$$

وحل معادلة كثير الحدود العامة من الدرجة الخامسة فما فوق

في هذه الحالات يمكن البحث عن حل عددي .

التحليل العددي : هو علم يهتم باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرق التحليلية الجبرية المعتادة ..

مقدمة :

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات الهامة وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي ويستخدم عادة في إيجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية حيث تكون النتيجة التي نحصل عليها نتيجة تقريبية. بما أننا نحصل على نتيجة تقريبية أو حل تقريبي هذا يعني أنه يوجد خطأ وعلينا حساب الخطأ إلا أنه لو استطعنا إيجاد الخطأ لاستطعنا إيجاد الحل الفعلي (الحقيقي) الأمر الذي يعني أن إيجاد الخطأ غير ممكن ونسعى بالتالي إلى إيجاد تقريب للخطأ أو حجم الخطأ أي تلك القيمة التي لا يتجاوزها الخطأ. وتتلخص مهمة التحليل العددي في إيجاد الحل التقريبي لمسألة ما وتقويم الخطأ.

إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالبا ما تمثل أطوال . وقياسات أو قيم لمقادير فيزيائية بنتيجة القياس وهي بحد ذاتها تقريبية. كذلك فإن الكثيــر من الأعداد الحقيقية لا يمكن التعبير عنها بعدد منته من الأرقام فمثلاً العــدد π يســاوي تقريباً 3.14159.

تقدير الأخطاء :

تنشأ الأخطاء في التحليل العددي من أكثر من مصدر. فهناك أخطاء تنشــأ مــن استعمال الصيغ التقريبية ذاتها. وعادة ما تكون النظرية قد وضعت صيغة لهــذا الخطـــأ. وهناك أخطاء ناشئة من استعمال هذه الصيغ فمثلاً نكتفي برقمين عشريين (بمنزلتين) بعد الفاصلة فى الحسابات فينشأ خطأ التقريب وأحياناً نكتفي بعدد معين من حدود المتسلســلة اللانهائية فينشأ خطأ الاقتطاع وهكذا تنشأ العديد من الأخطاء سنكتفي بتعريــف الــبعض منها.

الخطأ المطلق والخطأ النسبي :

إذا كانت x القيمة الفعلية (التامة) لعدد ما و x_o القيمة التقريبية لهذا العــدد فــإن العدد :

$$\Delta x = x_o - x$$

هو الخطأ المرتكب في حساب x_o

تكون إشارة Δx موجبة أو سالبة لذلك نعرف ما يسمى بالخطأ المطلق.

الخطاء المطلق Absolute error (Δ)

هوالقيمة المطلقة للفرق بين القيمة الحقيقية للعدد x والقيمة التقريبية له x_0 اي ان:

$$\Delta = |\Delta x| = |x_0 - x| = |x - x_0|$$

غالباً ما يكون العدد الفعلي x غير معلوم، عندئذ لا يمكن تعيين الخطـــأ المطلـــق من أجل ذلك نلجأ إلى إيجاد حد أعلى لهذا الخطأ مثل ε_x ويحقق المتباينة :

$$|\Delta x| = |x_o - x| \le \varepsilon_x$$

وهكذا نحصل على :

$$x_o - \varepsilon_x \le x \le x_o + \varepsilon_x$$

أي أن العدد الفعلي يقع بين العددين $x_o + \varepsilon_x$ و $x_o - \varepsilon_x$ حيث القيمة $x_o + \varepsilon_x$ تمثل تقريب العدد x بالزيادة والقيمة $x_o - \varepsilon_x$ تمثل تقريبه بالنقصان.

مثال (1ـ1) :

بفرض أعطي طول غرفة $a_1 = 5.43\ m$ وعرضها $b_1 = 3.82\ m$ بدقة تتراوح حتى $1cm$ ، أحسب الحد الأعلى للخطأ المرتكب في حساب مساحة الغرفة.

الحل :

$$s_1 = a_1 \cdot b_1 = 20.7426\ m^2$$

وبما أن $\Delta b_1 = 0.01\ m \ , \ \Delta a_1 = 0.01\ m$

فإن القيم الحدودية المحتملة للمساحة هي :

$$(a_1 + \Delta a_1)\ (b_1 + \Delta b_1) = (5.43+0.01)\ (3.82+0.01) = 20.8352\ m^2$$

$$(a_1 - \Delta a_1)\ (b_1 - \Delta b_1) = (5.43\text{-}0.01)\ (3.82\text{-}0.01) = 20.6502\ m^2$$

وبمقارنتها مع القيمة المحسوبة s_1 نحصل على :

$$20.7426 - 20.6502 \le s_1 - s \le 20.8352 - 20.7426$$

$$0.0914 \le s_1 - s \le 0.0926$$

ومنه نجد $|s_1 - s| \le 0.0926$

ملاحظة (1ـ1) :

الخطأ المطلق لا يكون كافياً لتمييز دقة التقريب أو الحساب لمقدار ما فإذا كان الخطأ المطلق في قياس طولين مختلفين هو نفسه فهذا لا يدل أن القياس له نفس الدقة في الحالتين.

تعريف (2-1)

الخطاء النسبي Relative error (R)

يعرف على انه نسبة الخطاء مطلق Δ المحسوب لعدد تقريبي x_0 الى القيمة المطلقة للعدد الفعلي x $(x \neq 0)$ اي ان :

$$R = \frac{\Delta}{|x|}$$

مثال (1ـ2) :

لتكن $x=3.257$ ولتكن $x_o = 3.26$ قيمة تقريبية لـ x عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

الحل :

الخطأ المطلق

$$\Delta = |\Delta x| = |x_o - x| = |3.26 - 3.257| = 0.003$$

الخطأ النسبي

$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.003}{3.257} = 0.000921$$

تعريف (1-3):

الخطاء النسبي (E) percentage error : هو حاصل ضرب الخطاء النسبي في 100%:

$$E = R \times 100\%$$

مثال (1ـ3) :

إذا كانت $x = 0.00004$ ، $x_0 = 0.00005$ قيمة تقريبية لـ x عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي والخطأ المئوي.

الحل :

الخطأ المطلق

$$\Delta = |x_o - x| = |0.00005 - 0.00004| = 0.00001$$

الخطأ النسبي

$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.00001}{0.00004} = 0.25$$

الخطأ المئوي

$$E = R \times 100\% = 0.25 \times 100\% = 25\%$$

أخطاء التدوير :

خطأ التدوير ينشأ من تدوير الأعداد وتقريبها أي الاكتفاء بعدد منته من الأرقام العشرية (الأرقام التي على يمين الفاصلة) وقاعدة التدوير تتم على الشكل التالي :

إذا كان لدينا العدد $x = 0.x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, x_n$ وأردنا الاكتفاء بـ (n-1) رقم على يمين الفاصلة أي أن العدد المدور يكون كما يلي :

$$x_o = 0.\, x_1\, x_2 \dots x_{n-2}\, \overline{x}_{n-1}$$

فإن $\overline{x}_{n-1}$ يتم تحديده بالشكل التالي :

إذا كان $x_n > 5$ فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$

وإذا كان $x_n < 5$ فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1}$

أما إذا كان $x_n = 5$ فإننا ننظر إلى x_{n-1} ونميز حالتين

1ـ إذا كان x_{n-1} زوجياً فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1}$

2ـ إذا كان x_{n-1} فردياً فإن $\overline{x}_{n-1} = x_{n-1} + 1$

عندئذ يكون الخطأ المرتكب والناتج عن عملية التدوير هو :

$$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{-n+1} = 5 \times 10^{-n}$$

عندئذ يكون الخطأ المرتكب والناتج من عملية التدوير :

$$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{-n+1} = 5 \times 10^{-n}$$

مثال (4-1)

دورالعدد $x = 7.2535$ الى ثلاث مراتب عشرية ثم مرتبتين عشريتن ثم الى مرتبة عشرية واحدة وما هو الخطأ المرتكب ؟

الحل :

$x_o = 7.254$ والخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-4}

$x_o = 7.25$ والخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-3}

$x_o = 7.2$ والخطأ المرتكب لا يتجاوز 5×10^{-2}

ولتمييز الأعداد المدورة نكتب عادة قيمة العدد زائداً أو ناقصاً نصف وحدة في المرتبة العشرية المدورة فنكتب مثلاً

$$7.254 \mp \frac{0.5}{10^3}$$

أو $$7.254 \mp \frac{5}{10^4}$$

أو $$7.254 \mp 5 \times 10^{-4}$$

مثال (1–5) :

بفرض أن $x = 0.235$ عدد مدور عين الخطأ النسبي المرتكب.

الحل :

الخطأ المرتكب الناتج عن عملية التدوير هو

$$\Delta x \leq 5 \times 10^{-4}$$

ومنه الخطأ النسبي $$R = \frac{\Delta x}{x} = \frac{5 \times 10^{-4}}{0.235} = 0.0021276$$

ملاحظة (1ـــ2) :

عند تطبيق العمليات الحسابية فإن الأخطاء المرتكبة تتراكم وتكبر ويمكـــن تقــدير الحـــد الأعظمي لهذه الأخطاء.