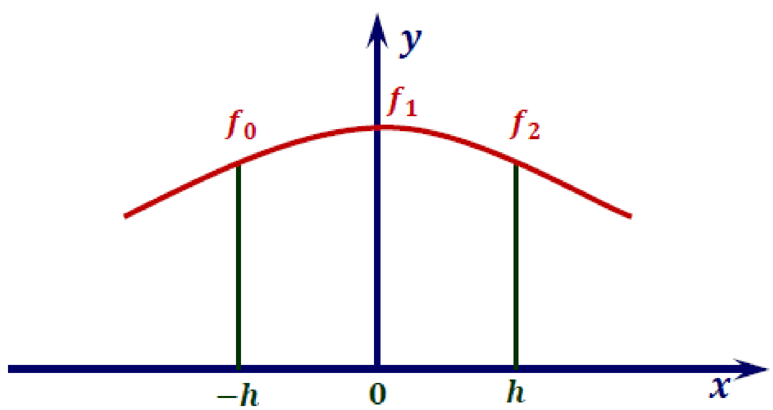
طريقة سمبسون لايجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد Simpson's Rule

طريقة سمبسون هي احدى طرق التحليل العددي لايجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد باستخدام متعددة حدود من الدرجة الثانية.

لنجد اولا المساحة تحت منحني القطع المكافئ $f = a + bx + cx^2$ الذي يمربالنقاط الثلاث التالية:

$(-h, f_0),\ (0, f_1)\ ,(h, f_2)$



$$I = \int_{-h}^{h} (a + bx + cx^2)\, dx$$

$$= \left(ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-h}^{h}$$

$$= \left(ah + b\frac{h^2}{2} + c\frac{h^3}{3} \right) - \left(-ah + b\frac{h^2}{2} - c\frac{h^3}{3} \right)$$

$$= 2ah + \frac{2c\, h^3}{3}$$

ولان النقاط $(-h, f_0), ((0, f_1), (h, f_2)$ تقع على منحني القطع المكافئ لذلك فهي تحقق معادلته $f = a + bx + cx^2$ ولذلك فان:

$$f_0 = a + b(-h) + c(-h)^2 = a - bh + ch^2 \qquad (1)$$

$$f_1 = a + b(0) + c(0)^2 = a \qquad (2)$$

$$f_2 = a + b(h) + c(h)^2 = a + bh + ch^2 \qquad (3)$$

وبتعويض المعادلة (2) في المعادلتين (1) و (3) نحصل على:

$$f_0 = f_1 - bh + ch^2$$

$$f_2 = f_1 + bh + ch^2$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على:

$$f_0 + f_2 = 2f_1 + 2ch^2$$

$$f_0 - 2f_1 + f_2 = 2ch^2 \qquad (4)$$

ولكن

$$I = 2ah + \frac{2c\,h^3}{3}$$

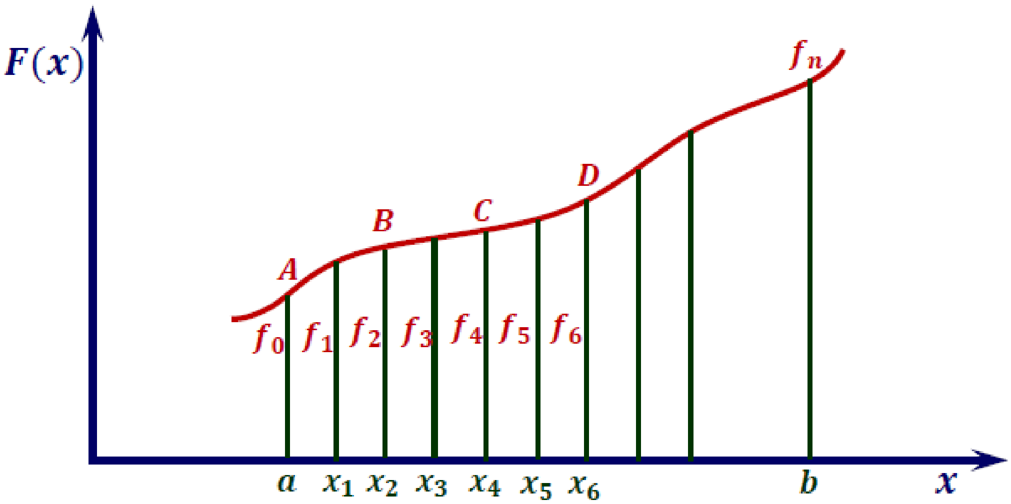
$$I = \frac{h}{3}\,[6a + 2ch^2] \qquad (5)$$

بتعويض المعادلتين (2) و (4) في المعادلة (5) نحصل على:

$$I = \frac{h}{3}\,[6f_1 + f_0 - 2f_1 + f_2]$$

$$\boxed{I = \frac{h}{3}\,[\,f_0 + 4f_1 + f_2] \qquad (6)}$$

وبالامكان تعميم المعادلة (6) لحساب مساحة تحت المنحني لتقسيمات متتالية لاي منحني مثل $y = f(x)$ للفترة $a \le x \le b$ كما موضح في الشكل التالي:



$$I_{AB} = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

$$I_{BC} = \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$I_{CD} = \frac{h}{3}[f_4 + 4f_5 + f_6]$$

$$\boxed{\therefore\ I = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + \cdots + f_n]}$$

مثال – 1- استخدمي طريقة سمبسون لايجاد القيمة التقريبية للتكامل المحدد التالي على فرض تقسيم الفترة الى اربع اقسام :

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

الحل:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

x	$f(x)$
0	0
$\pi/4$	0.707106
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	0.707106
π	0

$$I = \frac{\pi/4}{3}\,[4(0.707106) + 2(1) + 4(0.707106)] = 2.004558$$

$$exact\ solution \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi} \sin x \ dx = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$$

$$Trapezoidal: \quad I = \frac{\pi}{4}\,[0.707106 + 1 + 0.707106] = 1.896118898$$

مثال – 2 – استخدمي طريقة سمبسون لايجاد الحل التقريبي للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\ dx$$

على فرض تقسيم الفترة الى 10 اقسام, قارني الحل مع الحل المضبوط وجدي مقدار الخطاء.

Solution

$h = \frac{1-0}{10} = 0.1 \quad , \qquad f(x) = e^{-x^2}$

x	$f(x)$		
0	1		
0.1		0.990050	
0.2			0.960789
0.3		0.913931	
0.4			0.852144
0.5		0.778801	
0.6			0.697676
0.7		0.612626	
0.8			0.527292
0.9		0.444858	
1	0.367879		
$\sum$	1.367879	3.740266	3.037901

$$I = \frac{0.1}{3}\left[(1.367879) + 4(3.740266) + 2(3.037901)\right] = 0.746825$$

مثال – 2 – استخدمي طريقة سمبسون لايجاد الحل اللتقريبي للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+ x^2}}\, dx$$

على فرض تقسيم الفترة الى ثمانية اقسام :

Solution

$h = \frac{1-0}{8} = 0.125$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+ x^2}}$

x	$f(x)$	$4 \times f(x)$	$2 \times f(x)$
0	1		
0.125		3.969112	
0.250			1.940285
0.375		3.745317	
0.5			1.788854
0.625		3.391993	
0.750			1.600000
0.875		3.010307	
1	0.707107		
$\sum$	1.707107	14.116729	5.329139

$$I = \frac{0.125}{3}[1.707107 + 14.116729 + 5.329139] = 0.881374$$