Order Statistics 8) إحصاءات ترتيبية

(تصنيف العينات)

Def: let $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ be a random sample from Continuous r.v's with p.d.f $f(y)$ and distribution function $F(y)$.

[معناه كلهم جميعا نفس دالة الكثافة الاحتمالية و الدالة التجميعية]

$Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ where $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \ldots \leq Y_{(n)}$

where: [يعني نقوم بترتيبهم بشكل تصاعدي]

$Y_{(1)} = \min(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)})$

$Y_{(n)} = \max(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)})$

The Aim: To find the distribution function and probability function of $Y_{(1)}$ & $Y_{(n)}$.

Here, we have four rules:

① For $Y_{(n)} = \max(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)})$

* The distribution Function c.d.F:

$$F_{Y_{(n)}}(y_n) = (F_Y(y_n))^n$$

* The p.d.f of $Y_{(n)}$ is:

$$f_{Y_{(n)}}(y_n) = n\left[F_Y(y_n)\right]^{n-1} f_Y(y_n)$$

② For $Y_{(1)} = \min(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)})$

* The c.d.f is :-

$$F_{Y_{(1)}}(y_1) = 1 - (F_Y(y_1))^n$$

* The p.d.f. is :-

$$f_{Y_{(1)}}(y_1) = n\left[1 - F_Y(y_1)\right]^{n-1} \cdot f_Y(y_1)$$

توزيع *

X_1	X_2	X_3	X_4
5	-1	3	2

ترتيبها تصاعدي :-

$$\underset{y_{(1)}}{-1} \quad \underset{y_{(2)}}{2} \quad \underset{y_{(3)}}{3} \quad \underset{y_{(4)}}{5}$$

$$Y_{(1)} < Y_{(2)} < Y_{(3)} < Y_{(4)}$$

i.e

$$Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots < Y_{(n)} \quad , \; n = \text{Sample Size}$$

المهم بالحالتين ① انه الترتيب الاحصائية تطبق على التوزيعات المستمرة ② لكل Y توزيع يختلف عن ال Y الأخرى .

$$Y_1 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$
$$Y_2 = \text{Second}\{X_1, \dots, X_n\}$$
$$\vdots$$
$$Y_n = \text{Max}\{X_1, \dots, X_n\}$$

الصيغة العامة :-

$$g(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1-F(y_k)]^{n-k} f(y_k)$$

where :-

$$F(y_k) = \int_{min}^{y_k} f(x)\,dx$$

and; min value of x التي موجودة بالدالة

* $g(y_1) = n\,[1-F(y_1)]^{n-1} f(y_1)$ (min) الدالة الاحتمالية

* $g(y_n) = n\,[F(y_n)]^{n-1} f(y_n)$ (max) دالة الاحتمالية

* $Y_n - Y_1 \Rightarrow$ range of r.s.

* $\frac{Y_n + Y_1}{2} \Rightarrow$ mid-range

* $Y_{\frac{n+1}{2}} \Rightarrow$ median [is case of odd observation]

* The Joint of $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ is :-

$$g(y_1, y_2, \dots y_n) = n!\, f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n) \quad , a < y_1 < y_2 \dots < y_n <$$
$$= n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i)$$

* The Joint of i & j :-

$$g(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} [F(y_i)]^{i-1} [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} *$$
$$[1-F(y_j)]^{n-j} f(y_i) f(y_j) ,$$

$f(i) < f(j)$,

$a < i < j < b$

Ex: Let $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , 0 < x < \theta \\ 0 & , o/w \end{cases}$

Find the smallest Y_1 ? largest Y_n ?

Sol: $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$

$g(y_1) < \dots < g(y_n)$

Now,

① $g(y_1) = n\left[1 - \underbrace{F(y_1)}\right]^{n-1} \underbrace{f(y_1)}$

$f(y_1) = \boxed{\frac{1}{\theta}}$ { هنا يجب أن نعوض كل X بالدالة بـ y
ولكن هنا لا يوجد X فأخذنا الدالة كما هي }

$F(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{1}{\theta} x \Big|_0^{y_1} = \boxed{\frac{y_1}{\theta}}$

Now;

$g(y_1) = n\left[1 - \frac{y_1}{\theta}\right]^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta}\left[\frac{\theta - y_1}{\theta}\right]^{n-1}$

$= \begin{cases} \frac{n}{\theta^n}(\theta - y_1)^{n-1} & , 0 < y_1 < \theta \\ 0 & , o/w \end{cases}$ (تأكدنا من حدود X)

② $g(y_n) = n\left[\underbrace{F(y_n)}\right]^{n-1} \underbrace{f(y_n)}$

$f(y_n) = \frac{1}{\theta}$

$F(y_n) = \frac{y_n}{\theta}$