الفصل السادس

الحركة الموجية

الموجات المستعرضة في بعد واحد

اقتصرت دراستنا في الفصول السابقة على الحركة الاهتزازية للجسيم المنفرد وتعتبر تلك الدراسة ضرورية وخطوة اساسية نحو فهم الحركة الموجية، اذ ان الحركة الموجية هي بالأساس حركة اهتزازية لوسط مادي يتألف من عدد كبير جداً من الجسيمات، وعند دراسة الحركة الموجية نتعامل مع مجمل سلوك الوسط المادي وليس مع سلوك الجسيمات المنفردة المكونة له.

1.6 الحركة الموجية

الحركة الموجية هي شكل من الاضطراب ينتقل من نقطة الى اخرى عبر وسط مادي او في الفراغ وتعتبر وسيلة لنقل الطاقة من نقطة الى اخرى دون ان تنتقل جسيمات الوسط.

يمكن تقسيم الحركة الموجية الى نوعين اساسيين هما:

أ- موجات كهرومغناطيسية (Electromagnetic Waves):

هي موجات تنشأ عادة من اهتزاز جسيمات مشحونة ونتيجة لذلك تتكون مجالات كهربائية ومغناطيسية متعامدة ولا تحتاج لوسط مادي لانتشارها ومن امثلتها: الضوء، الامواج الراديوية، الاشعة السينية، واشعة كاما.

ب- موجات ميكانيكية (Mechanical Waves):

هي موجات تنشأ عن مصدر مهتز مثل الشوكة الرنانة او وتر مهتز، وهي تحتاج الى وسط مادي لانتقالها وقد يكون الوسط صلباً أو مائعاً (سائل أو غاز) ومن أمثلتها الصوت والموجات المائية والزلازل.

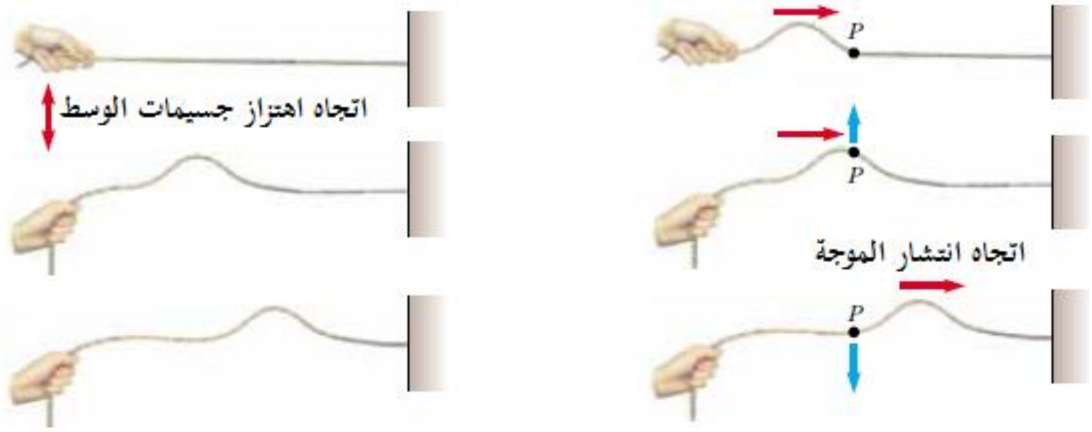
ستقتصر دراستنا على الحركة الموجية الميكانيكية.

- لكي تنتقل الموجة الميكانيكية في وسط ما يجب ان تتوفر في الوسط الناقل خاصتي المرونة والقصور الذاتي.
- في حالة ازاحة جزء صغير من الوسط المادي المرن من موضع توازنه الطبيعي وترك حراً فان ذلك الجزء يهتز حول موضع توازنه، ونتيجة لخواص الوسط ينتقل نمط ذلك الاهتزاز (الاضطراب) من جزء الى آخر، وبالتالي يتقدم هذا الاضطراب (الموجة) في الوسط المادي بسرعة ثابتة تتوقف على طبيعة ذلك الوسط من حيث مرونته وكثافته.

يمكن تصنيف الحركة الموجية الميكانيكية بالاعتماد على اتجاه اهتزاز اجزاء الوسط بالنسبة لاتجاه انتشار الموجة فيه الى نوعين:

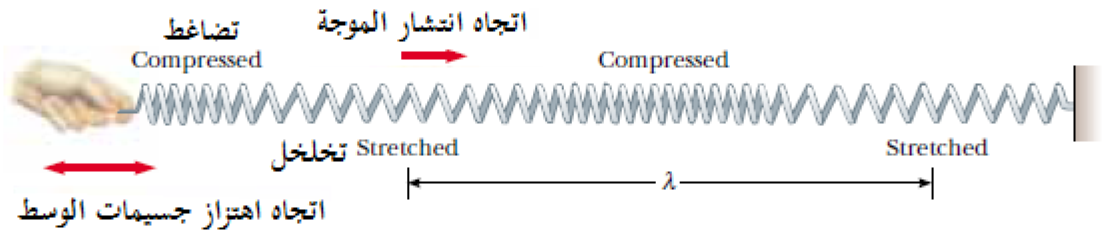
1. موجات مستعرضة (Transverse Waves)

في هذه الحالة تكون حركة جسيمات الوسط المادي عمودية على اتجاه انتشار الموجة ومن امثلتها الموجة المتكونة في حبل افقي متوتر مثبت من احد طرفيه ويهتز صعوداً ونزولاً من طرفه الآخر حيث تنتقل الموجة المستعرضة على طول الحبل بينما تتذبذب اجزاء الحبل عمودياً على اتجاه انتقال الموجة كما موضح بالشكل التالي:



2. موجات طولية (Longitudinal Waves)

في هذه الحالة تتحرك جسيمات الوسط الناقل ذهاباً واياباً باتجاه انتقال الموجة ومن امثلتها الموجة التي تتولد في نابض محلزن متوتر بتأثير ضغط او سحب احد طرفيه قليلا كما موضح بالشكل التالي، كما تعتبر الموجة الصوتية احد انواع الموجات الميكانيكية الطولية.



2.6 خواص الحركة الموجية الميكانيكية

تمتاز الحركة الموجية الميكانيكية على اختلاف انواعها بالخصائص التالية:

1- هي شكل من الاضطراب في وسط مادي (صلب، سائل، غاز) مرن يولده نمط من الحركة الدورية في جسيمات ذلك الوسط يسببها جسم متحرك يدعى بالمصدر.

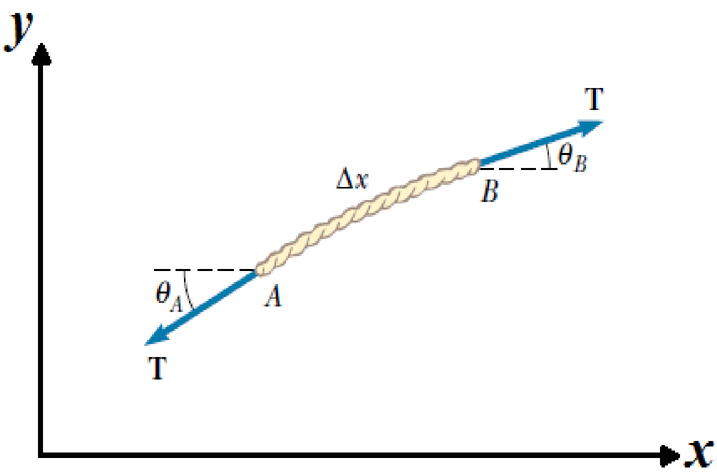
2- شكل الاضطراب الذي يمثل شكل الموجة هو الذي ينتقل من نقطة الى اخرى خلال الوسط بينما جسيمات ذلك الوسط لا تنتقل بل تتذبذب بحركة اهتزازية حول موضع توازنها مماثلة لحركة المصدر.

3- سرعة انتقال الاضطراب (الموجة) في وسط ما هي مقدار ثابت يعتمد على خاصيتي المرونة والقصور الذاتي لذلك الوسط.

4- سرعة انتقال الاضطراب (الموجة) يختلف عن سرعة جسيمات الوسط الناقل للموجة.

5- لا تتحرك جسيمات الوسط الناقل للموجة بطور واحد بل يتغير طور الحركة بانتظام من جسيم الى آخر كلما ابتعدنا عن المصدر، فالجسيم الاقرب الى المصدر يبدأ بالحركة الاهتزازية قبل الجسيم الابعد عنه.

3.6 معادلة الموجة المستعرضة في وتر مشدود



نفرض ان لدينا حركة موجية على طول وتر مشدود، قوة الشد فيه T وكثافته الطولية μ $\left(\mu = \frac{m}{l}\right)$ حيث: m كتلة الوتر، l طول الوتر، ونفرض ان لدينا عنصر طول تفاضلي (Δx) يصنع زاوية صغيرة (θ_A, θ_B) مع المحور الافقي (x-axis) كما موضح بالشكل المجاور.

ان محصلة القوى العمودية المؤثرة على العنصر التفاضلي (Δx) تعطى بالعلاقة:

$$\sum F_y = T\, sin\, \theta_B - T\, sin\, \theta_A$$

$$\sum F_y = T(sin\, \theta_B - sin\, \theta_A)$$

في حالة الزوايا الصغيرة يمكن استعمال التقريب $(sin\, \theta \cong tan\, \theta)$ عندها يمكن كتابة معادلة محصلة القوى بالصيغة:

$$\sum F_y \cong T(tan\, \theta_B - tan\, \theta_A)$$

وحيث ان قيمة ظل الزاوية $(tan\, \theta)$ عند النقطتين A و B تساوي ميل المماس في تلك النقطتين، وكذلك فان الميل هو قيمة المشتقة عند تلك النقطة، وعندها يمكننا استنتاج العلاقة:

$$\sum F_y = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

يلاحظ اننا استعملنا الاشتقاق الجزئي وذلك لكون المتغير (y) دالة لمتغيرين مستقلين $[y = f(x,t)]$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة نحصل على:

$$\sum F_y = ma_y \quad , \quad \mu = \frac{m}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad m = \mu \Delta x \quad , \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\sum F_y = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right]$$

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right]}{\Delta x}$$

من تعريف المشتقة الجزئية لأي دالة لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

نلاحظ من المعادلتين الاخيرتين ان $f_{(x+\Delta x)}$ تقابل $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B$ وان $f_{(x)}$ تقابل $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A$ وذلك عند $(\Delta x \to 0)$

وعندها نحصل على:

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

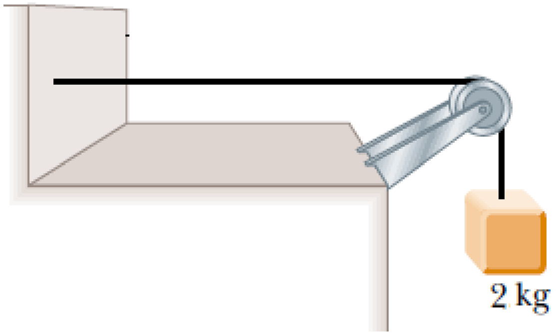
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad , \qquad let \quad \frac{T}{\mu} = c^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad , \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الحركة للموجة المستعرضة في وتر مشدود وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية، حيث (c) هي سرعة انتقال الموجة في الوتر.

من العلاقة $c = \sqrt{T/\mu}$ نجد ان سرعة انتقال الموجة المستعرضة في وتر مشدود تعتمد فقط على الشد في الوتر (T) وعلى كثافة الوتر الطولية (μ). ويجب الانتباه للوحدات عند التعويض في العلاقة.



مثال:

خيط طوله $4m$ وكتلته $30g$ احد طرفيه مربوط بنقطة ثابتة والطرف الآخر يمر فوق بكرة ومعلق به جسم كتلته $2kg$ كما هو موضح بالشكل المجاور، اوجد سرعة الموجة المستعرضة في ذلك الخيط.

الحل: من معطيات المسألة لدينا:

$l = 4m$,   كتلة الخيط $m_1 = 30g$, كتلة الثقل $m_2 = 2kg$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = W = m_2 g$$

$$T = 2 \times 9.8 = 19.6N$$

$$\mu = \frac{m_1}{l} = \frac{30 \times 10^{-3}}{4} = 7.5 \times 10^{-3} \frac{kg}{m}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6}{7.5 \times 10^{-3}}}$$

$$c = 51.12 \frac{m}{sec}$$

4.6 التمثيل الرياضي للموجة المستعرضة

ان شكل الموجة (أو النبضة) المتقدمة على طول سلك قد يكون جيبياً او مستطيلاً او مربعاً او مثلثاً وأي شكل آخر سواء كان بسيطاً او معقداً، والمهم عند اختيار اي شكل موجي محدد ان يكون شكل الدالة الموجية موافقا لذلك الشكل.

ان اكثر الاشكال الموجية استعمالاً هو الشكل الجيبي (دالة الجيب او الجيب تمام ، sin , cos) وذلك لبساطة تلك الدوال وامكانية تمثيلها لحالات عملية كثيرة بالإضافة لذلك فانه يمكن بطريقة تراكب عدد مناسب من الموجات الجيبية الحصول على اي شكل موجي مهما كانت درجة تعقيده وكذلك يمكن العكس ايضا اي تحليل شكل موجي معقد الى مركبات ابسط تتألف من مجموعة من الموجات الجيبية المتداخلة.

ان الحركة الموجية المستعرضة التي تسري في سلك بالاتجاه الموجب يمكن وصفها باستعمال دالة الجيب بالصيغة:

$$y = A\sin k(ct - x) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

حيث: A هو مقدار ثابت يمثل اقصى قيمة للإزاحة المستعرضة وتسمى سعة الموجة، (c) سرعة انتقال الموجة المستعرضة، k عامل تحويل البعد الى زاوية ويسمى العدد الموجي (Wave Number) حيث $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ وتمثل λ طول الموجة المستعرضة في السلك.

ان طول الموجة في السلك λ يعتمد على تردد الموجة الذي يرمز له (f) ويتحدد تردد الموجة طبيعياً من تردد المصدر المهتز الذي يولد الحركة الموجية بالسلك، اما السرعة التي تنتقل بها الموجة(c) فإنها تعتمد على خواص السلك (الكثافة الطولية μ) وكذلك على طبيعة القوة المولدة للاهتزاز (F) حيث$\left(c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$.

هناك علاقة مهمة تربط الطول الموجي (λ) وسرعة الموجة (c) وهي $(c = \lambda f)$ وتصح تلك العلاقة لجميع انواع الموجات.

المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة:

$$y = A\,sin(kct - kx) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بالتعويض عن العدد الموجي$\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ و سرعة الموجة $(c = \lambda f)$ في المعادلة (2) نحصل على:

$$y = A\,sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda f)t - kx\right]$$

من تعريف التردد الزاوي لدينا $(\omega = 2\pi f)$ وبالتعويض نحصل على:

$$y = A\,sin(\omega t - kx)$$

المعادلة الاخيرة تعطي وصفاً فيزيائياً كاملاً للحركة الموجية الجيبية المستعرضة التي تسري في سلك بالاتجاه الموجب فهي تمثل الاضطراب في السلك بدلالة الازاحة المستعرضة (y) في اي موقع على امتداد السلك(x) وفي اي لحظة زمنية (t).

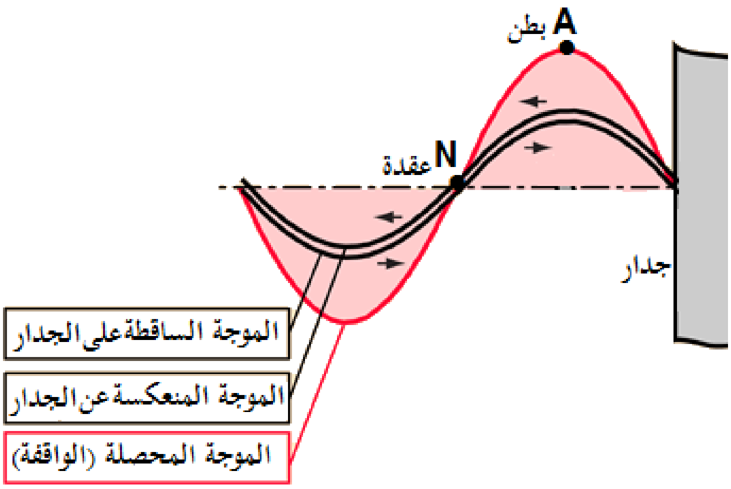
في حالة الحركة الموجية المستعرضة التي تسري في سلك بالاتجاه السالب فان التمثيل الجيبي للحركة يكون بالصيغة:

$$y = A\,sin(\omega t + kx)$$

5.6 الموجات الواقفة (Standing Waves)

هي تلك الموجات التي تنتج من تداخل موجتين متقدمتين لهما نفس السعة والتردد وتسيران باتجاهين متعاكسين. ان الموجات الواقفة (او الساكنة) تنتج عندما تتقدم سلسلتان من الموجات المتماثلة تماماً في السعة والتردد وتسيران في اتجاهين متعاكسين خلال نفس الوسط.

ان افضل طريقة للحصول على موجتين متماثلتين تماما من حيث السعة والتردد ومتحركتين في اتجاهين متضادين هي باستعمال الموجات الساقطة والموجات المنعكسة، فالموجة المستعرضة عندما تسري في سلك مشدود نحو طرفه المثبت بإحكام في جدار صلب، فان تلك الموجة ستنعكس والموجة المنعكسة في هذه الحالة يختلف طورها دائماً عن طور الموجة الساقطة بـ 180^0 كما هو موضح بالشكل المجاور.

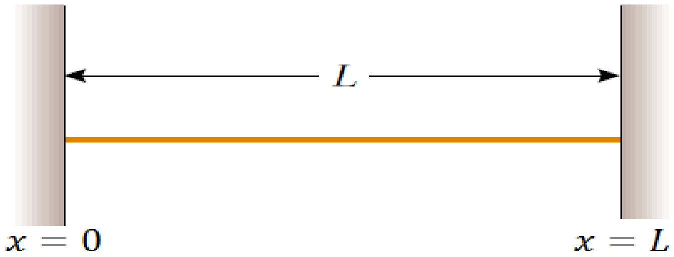


ان الازاحة التي تسببها الموجة المنعكسة عند الجدار يجب ان تكون دائماً مساوية ومعاكسة للإزاحة التي تسببها الموجة الساقطة لكي تكون محصلة الازاحة للسلك في تلك النقطة مساوية للصفر دائما (وذلك لكونها نقطة ساكنة) ومثل تلك النقطة التي تنعدم فيها الحركة والازاحة تدعى بالعقدة (Node) ويرمز لها بالرمز (N). حسب مبدأ التراكب فان المحصلة الآنية في أية نقطة اخرى على السلك وفي أية لحظة زمنية تمثل المجموع الجبري لإزاحتي الموجتين الساقطة والمنعكسة في تلك النقطة، ويمكن ملاحظة ذلك في الشكل السابق وفيه يمثل المنحنى الثالث الموجة المحصلة للموجتين الساقطة والمنعكسة، ويلاحظ من الشكل ان هناك نقاط محددة تتلاشى فيها الازاحة و تلك النقاط تمثل العقد، كما يلاحظ ايضا ان هناك نقاطا محددة تقع في منتصف المسافة بين عقدتين متتاليتين تكون فيها محصلة الازاحة اكبر من بقية النقاط الاخرى على السلك ومثل تلك النقاط تسمى بطون (Antinode) ويرمز لها بالرمز (A).

ان مواقع العقد (N) والبطون (A) تبقى ثابتة ولهذا السبب تدعى محصلة الموجة الناتجة من تراكب الموجتين الساقطة والمنعكسة بالموجة الواقفة. ان طاقة الموجات الواقفة لا تنتقل على طول السلك الى اليمين او الى اليسار اذ ان الطاقة لا يمكنها ان تنساب عبر النقط الثابتة (العقد) لكونها في حالة سكون دائم، ولهذا لا يمكن على وجه الدقة اعتبار الموجة الواقفة كحركة موجية لعدم حدوث انتقال للطاقة على طول السلك ولذلك تعتبر الموجات الواقفة حركة اهتزازية لسلك يسببها تراكب موجتين متقدمتين لهما نفس السعة والتردد وتسيران باتجاهين متعاكسين.

6.6 نظرية الاهتزاز لوتر مشدود ومحدد الطول

نفرض ان لدينا وتراً مشدوداً طوله (L) وطرفاه مثبتان بإحكام بمسندين صلبين غير قابلين للحركة كما هو موضح في الشكل المجاور.



اذا اثرنا في الوتر بدفعات دورية ذات تردد احادي (ثابت) مناسب فأن تتابعاً موجياً يستحدث في الوتر ويتقدم في كلا الاتجاهين على امتداد الوتر، ونظرا لمحدودية طول الوتر فان انعكاساً سيحدث في كلا طرفين.

ان الموجة المتقدمة على الوتر باتجاه اليمين يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$y_1 = a\,sin(\omega t - kx) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اما الموجة المتقدمة بالاتجاه المعاكس (نحو اليسار) فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$y_2 = b\,sin(\omega t + kx) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث y_1 ، y_2 تمثلان الازاحتين الآنيتين المستعرضتين اللتين تسببهما الموجتان المنتقلتان في اتجاهين متضادين في أية نقطة (x) على طول الوتر. ويلاحظ ان للموجتين نفس التردد والطول الموجي ولكنهما يختلفان في الاتجاه والسعة.

ان محصلة الازاحة الآنية (y) في اية نقطة (x) على امتداد الوتر المهتز يمكن الحصول عليها من تطبيق مبدأ التراكب، حيث يكون: $y = y_1 + y_2$

$$y = a\,sin(\omega t - kx) + b\,sin(\omega t + kx) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نبحث الآن في الشروط الحدودية، لما كان كل طرف مثبت بسطح صلب غير قابل للحركة تماما لذلك يجب ان تكون قيمة محصلة الازاحة (y) عند السطح الصلب مساوية للصفر دائماً، وعليه يكون الشرطان الحدوديان كما يلي:

1- الشرط الحدودي عند الطرف $(x = 0)$ هو $(y = 0)$ لكل قيم t.

2- الشرط الحدودي عند الطرف $(x{=}\mathrm{L})$ هو $(y = 0)$ لكل قيم t.

من المعادلة (3) وبتطبيق الشرط الحدودي الاول نحصل على:

$$1)\ When\ \ x = 0\ , \qquad y = 0$$

$$0 = a\,sin\,\omega t + b\,sin\,\omega t$$

$$0 = (a + b)\,sin\,\omega t$$

ولما كانت المعادلة الاخيرة صحيحة لكل قيم (t) وان $\sin \omega t$ لا تساوي صفرا دائما الا عند قيم محددة من (t) لذلك يجب ان تكون القيمة $(a + b)$ هي التي تساوي صفر لكل قيم (t)، اي ان:

$$a + b = 0$$

$$a = -b \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

نستنتج من العلاقة الاخيرة ان سعتي الحركتين الموجيتين يجب ان تكونان متساويتين بالمقدار، وهذا يعني ان الموجة الساقطة على الطرف الايسر قد انعكست بالكامل (على افتراض عدم حدوث اي امتصاص للطاقة من قبل الحائط وعدم وجود احتكاك داخلي بين الجسيمات المؤلفة للسلك).

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نحصل على:

$$y = a\,sin(\omega t - kx) - a\,sin(\omega t + kx)$$

$$y = a[sin(\omega t - kx) - sin(\omega t + kx)] \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

من المتطابقات المثلثية لدينا:

$$sin(\omega t - kx) = sin\,\omega t\,cos\,kx - cos\,\omega t\,sin\,kx$$

$$sin(\omega t + kx) = sin\,\omega t\,cos\,kx + cos\,\omega t\,sin\,kx$$

بالتعويض في العلاقة (5) نحصل على:

$$y = a[(sin\,\omega t\,cos\,kx - cos\,\omega t\,sin\,kx) - (sin\,\omega t\,cos\,kx + cos\,\omega t\,sin\,kx)]$$

$$y = -2a\,sin\,kx\,cos\,\omega t \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

المعادلة الاخيرة تمثل معادلة الموجة الواقفة على وتر محدد الطول، ويلاحظ ان اي نقطة بالموضع (x) لا تقع على طرف الوتر (او في مواقع العقد) تتحرك حركة توافقية بسيطة مع مرور الزمن وان جميع النقاط تهتز بنفس التردد الزاوي (ω) اما سعة الاهتزاز والتي تمثلها الكمية $(2a\,sin\,kx)$ فتختلف من نقطة الى اخرى وذلك باختلاف الموضع (x) على الوتر (وهذا يختلف عن سلوك الموجة الساقطة والمنعكسة والتي كانت كل نقطة فيها تهتز بنفس السعة).

ان اعظم سعة لاهتزاز الموجة الواقفة يكون في المواضع التي تحقق العلاقة: $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\dots$

من تعريف العدد الموجي لدينا $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ وبالتعويض في العلاقة الاخيرة نحصل على:

$$x = \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\dots\right.$$

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots\dots$$

المواضع المحددة بالعلاقة الاخيرة تمثل البطون وهي تتوزع على ابعاد متساوية عن بعضها بمقدار نصف طول الموجة $(\lambda/2)$.

ان ادنى سعة لاهتزاز الموجة الواقفة هي صفر وتحدث في المواضع التي تحقق العلاقة:

$$kx = 0\,,\pi\,,2\pi\,,3\pi\,,\dots\dots$$

وحيث ان $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ وبالتعويض نحصل على:

$$x = \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}}(0\,,\pi\,,2\pi\,,3\pi\,,\dots\dots.$$

$$x = 0\,,\frac{\lambda}{2}\,,\lambda\,,\frac{3\lambda}{2}\,,\dots\dots..$$

العلاقة الاخيرة تحدد مواضع العقد وهي تتوزع على ابعاد متساوية تساوي نصف طول الموجة $(\lambda/2)$.

بتطبيق الشرط الحدودي الثاني على المعادلة (6) نحصل على:

$$2)\ When\ \ x = L\ ,\qquad y = 0$$

$$0 = -2a\sin kL\cos\omega t$$

$$\sin kL\cos\omega t\ = 0$$

وحيث ان المعادلة الاخيرة صحيحة لكل قيم (t) ولما كانت $(\cos\omega t)$ لا تساوي صفرا دائما الا عند قيم محددة من (t) لذا يستلزم ان يكون: $\sin kL = 0$

اي ان: $kL = 0\,,\pi\,,2\pi\,,3\pi\,,4\pi\,,\dots\dots\dots$

$$kL = n\pi\ \ ,\ \ n = 0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,\dots\dots$$

وبالتعويض عن العدد الموجي في العلاقة الاخيرة نحصل على:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{2L} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

من علاقة الطول الموجي بسرعة الموجة والتردد $(c = \lambda f)$ لدينا:

$$\lambda = \frac{c}{f}\ \ \rightarrow\ \ \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c}$$

بالتعويض في العلاقة (7) نحصل على:

$$\frac{f}{c} = \frac{n}{2L} \qquad \rightarrow \quad f = \frac{nc}{2L}$$

العلاقة الاخيرة تحدد الترددات الطبيعية المسموحة للوتر. ولما كانت هذه الترددات تعتمد على العدد الصحيح (n) لذا يفضل ان تكتب المعادلة الاخيرة بالصيغة:

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

ان الترددات الطبيعة للوتر يمكن الحصول عليها بتعويض القيمة المناسبة لـ (n) وهي كالتالي:

عندما تكون $(n = 0)$ فان $(f_0 = 0)$ وهذا يعني ان التردد الطبيعي يساوي صفر اي لا يحدث اهتزاز.

عندما تكون $(n = 1)$ فان $\left(f_1 = \frac{c}{2L}\right)$ ويسمى تردد النغمة الاساسية (أو التردد التوافقي الاول).

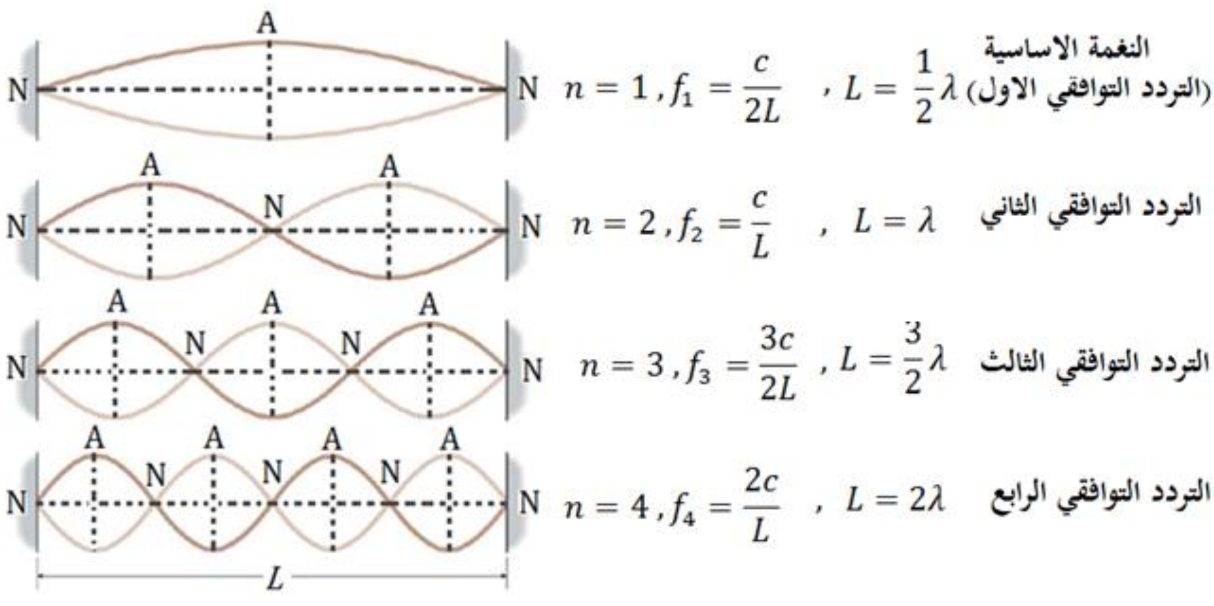
عندما تكون $(n = 2)$ فان $\left(f_2 = \frac{c}{L}\right)$ ويسمى التردد التوافقي الثاني.

عندما تكون $(n = 3)$ فان $\left(f_3 = \frac{3c}{2L}\right)$ ويسمى التردد التوافقي الثالث.

عندما تكون $(n = 4)$ فان $\left(f_4 = \frac{2c}{L}\right)$ ويسمى التردد التوافقي الرابع.

وهكذا لبقية قيم (n).

الشكل التالي يوضح الموجات الواقفة المسموحة للوتر عند التوافقيات الاربعة الاولى.



يلاحظ من الشكل ان شرط حدوث موجات واقفة في وتر مشدود محدد الطول هو ان يكون طول الوتر مساوياً لمضاعفات نصف طول الموجة.

مثال: وتر طوله (1) وكتلته (2g) واقع تحت تأثير قوة شد تعادل ثقل كتلته ($400kg$).

احسب:

1- تردد النغمة الاساسية.
2- التردد التوافقي الثاني والثالث والرابع.

الحل:

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

$$n = 1 \ , \quad f_1 = \frac{c}{2L} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

قوة الشد $T = W = Mg = 400 \times 9.8 = 3920\text{N}$

الكثافة الطولية للوتر $\mu = \frac{m}{L} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1}$

$$\mu = 2 \times 10^{-3} \frac{kg}{m}$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2 \times 1}\sqrt{\frac{3920}{2 \times 10^{-3}}}$$

$f_1 = 700 \ Hz$ (التوافقي الاول) تردد النغمة الاساسية

$$f_n = \frac{nc}{2L} = nf_1$$

$$f_2 = 2f_1$$

$f_2 = 2 \times 700 = 1400Hz$ التردد التوافقي الثاني

$$f_3 = 3f_1$$

$f_3 = 3 \times 700 = 2100Hz$ التردد التوافقي الثالث

$$f_4 = 4f_1$$

$f_4 = 4 \times 700 = 2800Hz$ التردد التوافقي الرابع

أسئلة الفصل السادس

س1: اشتق معادلة الموجة المستعرضة في وتر مشدود.

س2: اكتب العلاقة الرياضية الخاصة بالترددات المسموحة لاهتزاز وتر مشدود ومحدد الطول، ومنها أوجد الترددات التوافقية الأولى والثانية والثالثة مع الرسم.

س3: ناقش العبارة التالية: لا يمكن على وجه الدقة اعتبار الموجات الواقفة حركة موجية.

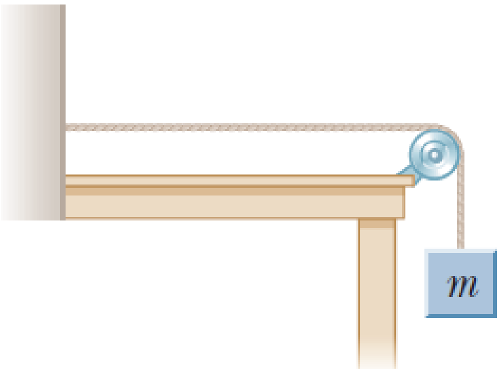
س4: حبل طوله $(2.4m)$ وكتلته (19.2g) و مشدود بحمل كتلته$(5kg)$، اوجد:

1- سرعة الموجة المستعرضة في ذلك الحبل.

2- الترددات التوافقية الثلاثة الاولى.

الاجابة:

$(1 - c = 78.26\, m/s)$ ، $(2 - f_1 = 16.3Hz, f_2 = 32.6Hz, f_3 = 48.9Hz\,)$



س5: اذا علمت ان سرعة الموجة المستعرضة في الحبل المشدود الموضح في الشكل المجاور هي $(28\, m/s)$ وذلك عندما كانت كتلة الثقل المعلق هي (2kg). أوجد:

أ- كتلة وحدة الأطوال للحبل المشدود.

ب-سرعة الموجة المستعرضة في حالة استبدال الثقل المعلق بآخر كتلته (4kg).

الاجابة : أ) $\mu = 0.025\, kg/m$, ب) $c = 39.6\, m/s$

س6: تعطى معادلة موجة مستعرضة تنتقل في حبل بالعلاقة: $y = 12 sin\pi(3t - 0.04x)cm$

حيث $y\,, x$ بالسنتمترات و t بالثواني، أوجد: أ- السعة والتردد والسرعة والطول الموجي للموجة.

ب-السرعة الآنية والتعجيل الآني لنقطة على الحبل.

الاجابة:

$A = 12cm,\ \ f = 1.5Hz, \qquad \lambda = 0.5m \ \ , \qquad c = 0.75\, m/s$

$v = 1.131 cos\pi(3t - 0.04x)\ m/s$

$a = -10.66\, sin\pi(3t - 0.04x)\, m/s^2$