الفصل الرابع

الاهتزاز المضمحل

Damped Oscillation

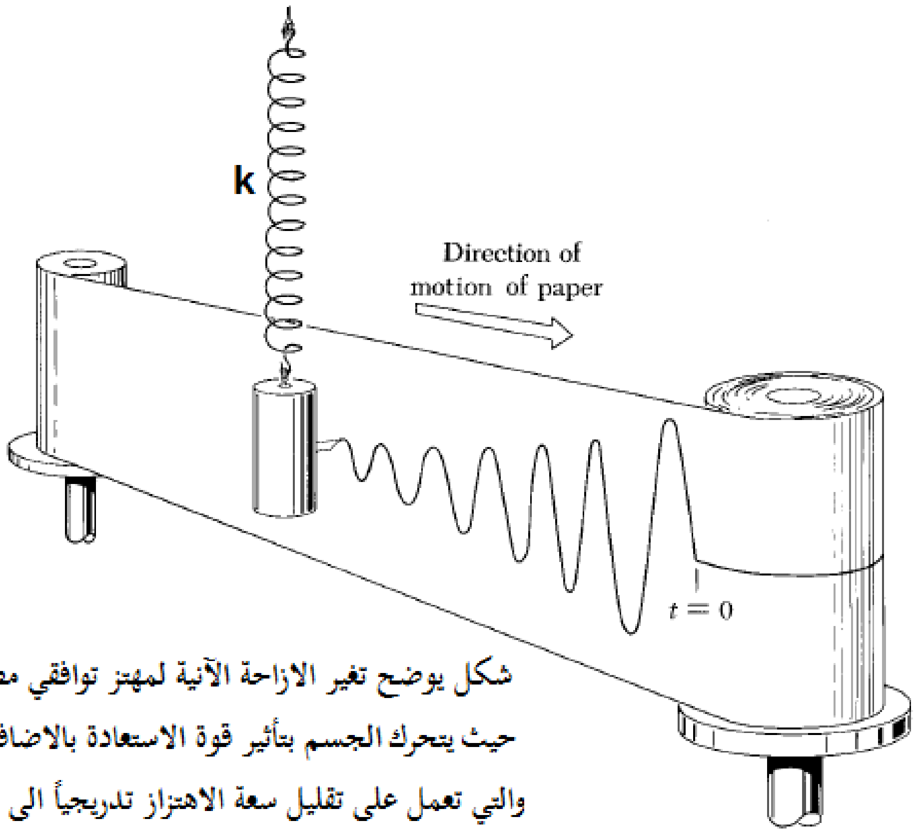
1.4 القوى المسببة لاضمحلال الاهتزازات

2.4 معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

3.4 حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

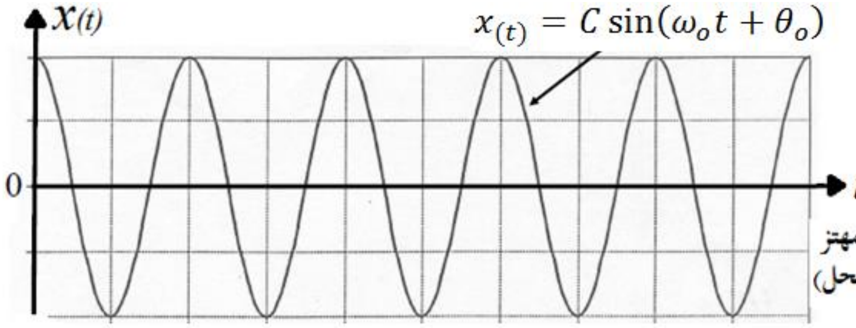
4.4 حالات الحركة التوافقية المضمحلة

5.4 مقاييس الاضمحلال



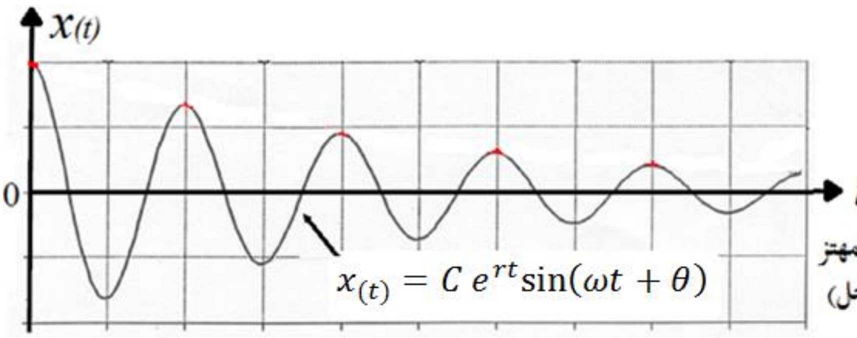
شكل يوضح تغير الازاحة الآنية لمهتز توافقي مضمحل مع الزمن حيث يتحرك الجسم بتأثير قوة الاستعادة بالاضافة لقوة مقاومة الهواء والتي تعمل على تقليل سعة الاهتزاز تدريجياً الى ان يتوقف الجسم

ناقشنا في الفصل الثاني الحركة التوافقية البسيطة (SHM) على اعتبار ان الاهتزاز حر حيث كانت القوة المسببة للاهتزاز هي قوة الاستعادة الناشئة عن خاصية المرونة فقط و دون وجود أي قوة مقاومة للحركة أو أي تبديد (خسارة) في طاقة المهتز (الطاقة الكلية للمهتز ثابتة ومحفوظة)، وكانت معادلة الحركة معرفة بالصيغة $(\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0)$ والحل العام (دالة الازاحة الآنية) لها كان بالصيغة: $\left[x_{(t)} = C\,sin(\omega_o t + \theta_o)\right]$، وحسب هذه الفرضية (فرضية الاهتزاز الحر) فان الاهتزاز يستمر على نفس الوتيرة و دون توقف مع مرور الزمن. الشكل (1) يمثل تغير الإزاحة الآنية مع الزمن للحركة التوافقية البسيطة.



شكل(١) تغير الازاحة الآنية مع الزمن للمهتز التوافقي البسيط (اهتزاز مثالي غير مضمحل)

ان الاهتزاز الحر (الحركة التوافقية البسيطة) هي حالة مثالية (غير واقعية) إذ لا يوجد مهتز حقيقي يستمر في الاهتزاز الحر إلى الأبد، وذلك لوجود قوى أخرى (بالإضافة لقوة الاستعادة) تحاول ان توقف (تخمد) الحركة مثل قوى الاحتكاك وهذا يتطلب من الجسم المهتز ان يبذل شغلاً إضافيا ليستمر بحركته وهذا الشغل المبذول لا يمكن استرداده وبالتالي يكون على حساب طاقة المهتز مما يؤدي إلى تناقصها تدريجياً (طاقة غير محافظة) ونتيجة لتناقص طاقة المهتز فان سعة اهتزازه تتناقص تدريجياً مع مرور الزمن إلى ان يتوقف المهتز عن الحركة. الشكل (2) يمثل تغير الإزاحة الآنية مع الزمن لإحدى حالات الحركة الاهتزازية المضمحلة وهي الحركة التوافقية ناقصة الاضمحلال.



شكل(٢) تغير الازاحة الآنية مع الزمن للمهتز التوافقي المضمحل (اهتزاز حقيقي مضمحل)

1.4 القوى المسببة لاضمحلال الاهتزاز

عملياً ان أي جسم مهتز يواجه نوعاً من القوى المقاومة لحركته والتي تؤدي إلى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجياً مع مرور الزمن، وقد يكون مقدار تلك القوى من الكبر بما لا يسمح بحدوث الاهتزاز أصلاً.

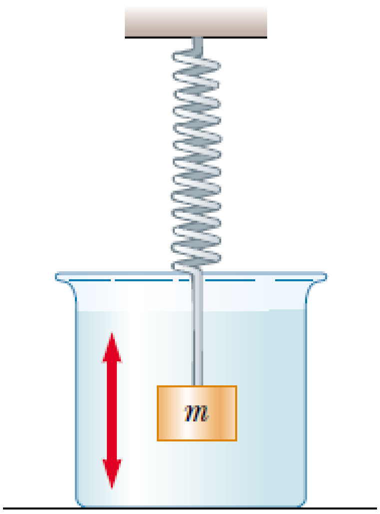
يمكن تقسيم القوى المسببة لاضمحلال الاهتزاز إلى نوعين:

أ- **قوى اضمحلال داخلية:** وهي قوى تنشئ بين جزيئات المهتز نفسه كقوى الاحتكاك الداخلية.

ب - **قوى اضمحلال خارجية:** وهي قوى تسلط من خارج الجسم وتحاول ان تقاوم حركة الجسم ومن اهم هذه القوى هي قوة الاحتكاك والتي تكون على نوعين:

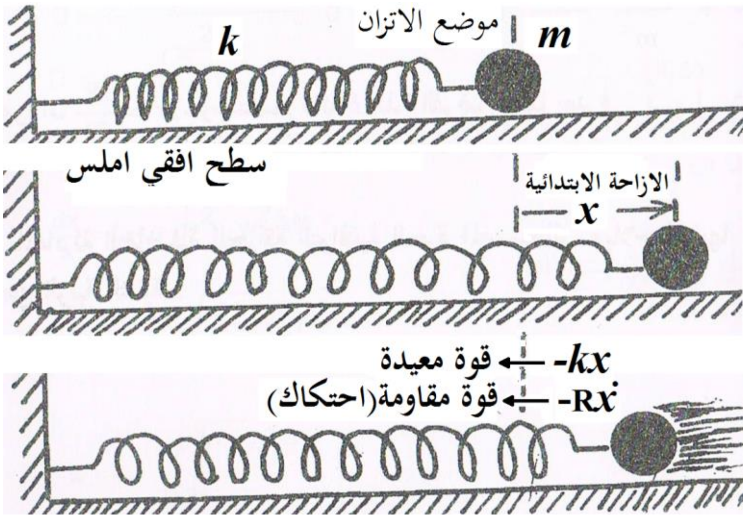
1- **احتكاك الجسم مع السطح الذي يستقر عليه:** ويعتمد مقداره على رد الفعل العمودي (N) وطبيعة السطحين المتلامسين $(F_R = -\mu N)$ حيث تمثل μ معامل الاحتكاك بين السطحين.

2- **احتكاك الجسم مع المائع الذي يحيط به:** وتكون بسبب لزوجة المائع الذي يحيط بالجسم حيث تزداد بزيادة لزوجة الوسط كما تعتمد على شكل الجسم وسرعته، وبشكل عام ان قوة احتكاك الجسم مع المائع المحيط تتناسب طردياً مع سرعة الجسم في السرعات الواطئة والمتوسطة $(F_R \propto \dot{x})$ وبتعبير آخر $(F_R = -R\dot{x})$ حيث R ثابت تناسب يسمى ثابت المقاومة (وحداته في النظام العالمي للوحدات$\frac{kg}{sec}$) ويعتمد مقداره على خواص المائع وشكل الجسم، إشارة السالب للدلالة على ان اتجاه قوة الإعاقة باتجاه معاكس لاتجاه السرعة. اما في السرعات العالية فان قوة الاحتكاك تزداد بصورة اكبر مع زيادة السرعة $(F_R \propto \dot{x}^2)$ وفي السرعات العالية جداً تكون $(F_R \propto \dot{x}^3)$ وهكذا.



الشكل المجاور يمثل تجربة عملية لتوضيح الحركة الاهتزازية المضمحلة، حيث يعلق جسم بنابض مثبت عموديا، ثم يغمر الجسم في سائل موضوع في إناء زجاجي شفاف، وعند ازاحة الجسم ازاحة عمودية فانه سيتحرك بتأثير قوتين الأولى قوة الاستعادة الناشئة عن مرونة النابض والثانية قوة إعاقة (مقاومة) ناشئة عن احتكاك الجسم بالسائل الذي يحيط به والتي تعتمد على سرعة الجسم بالإضافة إلى شكل الجسم وطبيعة السائل (لزوجته). ان قوة الإعاقة تعمل على إخماد حركة الجسم وبالنتيجة تضمحل الحركة تدريجيا، وكلما كانت لزوجة السائل اكبر كلما زاد مقاومة الحركة ونتج عنه اضمحلال اكبر.

2.4 معادلة الحركة التوافقية المضمحلة:



نفرض ان لدينا جسماً كروياً كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت قوته k ومثبت من الطرف الآخر بإحكام بمسند كما في الشكل المجاور.

عندما تزاح الكتلة m ازاحة صغيرة مقدارها x تظهر قوة استعادة مقدارها$(-kx)$ وحينما تترك الكتلة فأنها تتحرك للعودة إلى موضع اتزانها وخلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة من الاحتكاك مع المائع المحيط.

ان مقدار قوة المقاومة هي $(F_R = -R\dot{x})$ والاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه القوة المقاومة دائماً باتجاه معاكس لاتجاه السرعة النسبية للكتلة.

لإيجاد معادلة الحركة نقوم بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة ومنه نحصل على:

$$m\ddot{x} = -R\dot{x} - kx$$

بقسمة طرفي المعادلة على الكتلة وترتيب الحدود نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{let } \frac{R}{m} = 2r \;, \;\; \frac{k}{m} = \omega_o^2$$

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

الأخيرة تمثل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة والتي تصف التغير الزمني لدالة الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي المضمحل، وهي معادلة تفاضلية خطية ومتجانسة من المرتبة الثانية وفيها:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \;, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad , \quad r = \frac{R}{2m} \;, \;\; \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

حيث r مقدار ثابت يسمى ثابت الاضمحلال (Damping constant) ووحدته في النظام العالمي للوحدات هو (sec^{-1})، اما ω_o فهو التردد الزاوي الطبيعي للمهتز (التردد الزاوي في حالة الاهتزاز الحر).

3.4 حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة:

ان معادلة الحركة التوافقية المضمحلة هي معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية والحل العام لها يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = C_1 e^{D_1 t} + C_2 e^{D_2 t}$$

حيث C_1 و C_2 هي ثوابت اختيارية والتي يمكن إيجادها بتطبيق الشروط الحدودية للمسألة.

D_1 و D_2 هي جذور معادلة المؤثر التفاضلي D حيث $\left(D^2 = \frac{d^2}{dt^2} \;\; , \; D = \frac{d}{dt}\right)$ عندها يمكن استعمال التعويض عن المشتقة الزمنية الأولى والثانية للإزاحة الآنية بالصيغة: $(\ddot{x} = D^2 x \;\; , \;\; \dot{x} = Dx)$

سبق ان وجدنا الصيغة العامة لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة والتي كانت بالصيغة:

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

بالتعويض عن $(\dot{x} \, , \ddot{x})$ بدلالة المؤثر التفاضلي في معادلة الحركة نحصل على:

$$D^2 x + 2rDx + \omega_o^2 x = 0$$

المعادلة الأخيرة تسمى معادلة المؤثر التفاضلي للحركة التوافقية المضمحلة، ولإيجاد الحل العام ينبغي لنا أولاً ان نجد جذور معادلة المؤثر التفاضلي والتي نحصل عليها بعد استخراج x عامل مشترك فنحصل على:

$$(D^2 + 2rD + \omega_o^2)x = 0$$

اما $(x = 0)$ (يهمل) وهذا غير ممكن

أو $(D^2 + 2rD + \omega_o^2) = 0$

المعادلة الأخيرة تمثل معادلة تربيعية ولإيجاد جذورها نستعمل قاعدة الدستور ومنها نجد الجذرين وكما يلي:

$$D = \frac{-2r \pm \sqrt{(2r)^2 - 4(1)(\omega_o^2)}}{2(1)}$$

$$D = \frac{-2r \pm 2\sqrt{r^2 - \omega_o^2}}{2}$$

$$D = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_o^2}$$

$$D_1 = -r + \sqrt{r^2 - \omega_o^2}$$

$$D_2 = -r - \sqrt{r^2 - \omega_o^2}$$

بالتعويض عن جذري المؤثر التفاضلي في معادلة الحل العام نحصل على:

$$x_{(t)} = C_1 e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_o^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_o^2}\right)t}$$

$$x_{(t)} = e^{-rt}\left[C_1 e^{\sqrt{r^2-\omega_o^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2-\omega_o^2}t}\right]$$

المعادلة الأخيرة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة حيث $x_{(t)}$ هي دالة الإزاحة الآنية للمهتز المضمحل (الإزاحة في اللحظة الزمنية t)، r ثابت الاضمحلال، ω_o التردد الزاوي الطبيعي، C_2 ،C_1 ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من خلال تطبيق الشروط الحدودية.

ان دالة الإزاحة الآنية تأخذ صيغاً مختلفة وذلك اعتماداً على قيمة ثابت الاضمحلال (r) وهذا ما سنناقشه في الفقرة التالية.

4.4 حالات الحركة التوافقية المضمحلة:

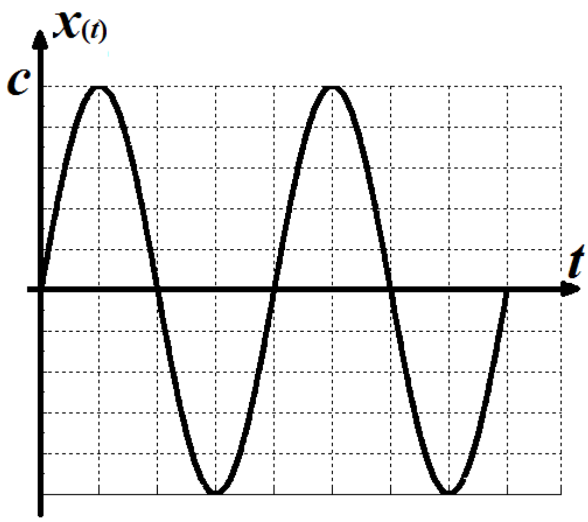
هناك اربع حالات للحركة التوافقية المضمحلة وذلك بحسب قيمة ثابت الاضمحلال (r) بالمقارنة مع قيمة التردد الزاوي الطبيعي (ω_o) وهي كالتالي:

الحالة الأولى: الحركة التوافقية غير المضمحلة $(r = 0)$ (*Undamped*)

في هذه الحالة فان الجسم المهتز يتحرك بتأثير قوة الاستعادة فقط ولا وجود لأي قوة مقاومة للحركة $(R = 0\ ,\ r = 0)$ وعندها تكون الحركة التوافقية غير مضمحلة وسبق ان ناقشنا هذه الحالة في الفصل الثاني، حيث كانت معادلة الحركة معرفة بالصيغة $(\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0)$ والحل العام لها كان بالصيغة:

$$x_{(t)} = C\, sin(\omega_o t + \theta_o)$$

حيث C تمثل سعة الاهتزاز، ω_o التردد الزاوي الطبيعي، θ_o زاوية الطور الابتدائي.



الشكل المجاور يوضح تغير الإزاحة مع الزمن لمهتز توافقي غير مضمحل.

* في حالة الجسم المعلق بنابض فأن التردد والزمن الدوري للاهتزاز الحر (غير المضمحل) تعطى بالعلاقات التالية:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- لا توجد تطبيقات عملية لهذه الحالة لكونها حالة مثالية.

الحالة الثانية: الحركة التوافقية ناقصة الاضمحلال $(r < \omega_o)$ (Under-damped)

في هذه الحالة يكون قيمة ثابت الاضمحلال اصغر من قيمة التردد الزاوي الطبيعي $(r < \omega_o)$ وهذا يؤدي إلى ان يكون الحد المميز $(r^2 - \omega_o^2)$ ذي قيمة سالبة $[(r^2 - \omega_o^2) < 0]$ وبالنتيجة يكون المقدار $\sqrt{r^2 - \omega_o^2}$ ذي قيمة خيالية ويمكن كتابتها بالصورة:

$$\sqrt{r^2 - \omega_o^2} = \sqrt{(-1)(\omega_o^2 - r^2)}$$

$$\sqrt{r^2 - \omega_o^2} = i\sqrt{\omega_o^2 - r^2} \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

في هذه الحالة فان معادلة الحركة تعطى بالصيغة: $\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$

والحل العام في هذه الحالة يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\left[C_1 e^{i\sqrt{\omega_o^2 - r^2}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega_o^2 - r^2}\,t}\right]$$

$$let \;\; \omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2}$$

حيث ω تمثل التردد الزاوي للمهتز التوافقي ناقص الاضمحلال، وبالتعويض في معادلة الحل العام نحصل على:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right]$$

بالاستفادة من صيغة اويلر (Euler Formula) لدينا: $e^{i\alpha} = cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha$

$$e^{i\omega t} = cos\,\omega t + i\,sin\,\omega t \quad , \quad e^{-i\omega t} = cos(-\omega t) + i\,sin(-\omega t)$$

وبالتعويض في معادلة الحل العام الأخيرة نحصل على:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\{C_1[cos(\omega t) + i\,sin(\omega t)] + C_2[cos(-\omega t) + i\,sin(-\omega t)]\}$$

وحيث ان دالة الجيب هي دالة فردية $[sin(-\omega t) = -\,sin(\omega t)]$ ودالة الجيب تمام دالة زوجية $[cos(-\omega t) = cos(\omega t)]$ وبالتعويض وترتيب الحدود نحصل على:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\{C_1\,cos\,\omega t + iC_1\,sin\,\omega t + C_2\,cos\,\omega t - iC_2\,sin\,\omega t\}$$

$$x_{(t)} = e^{-rt}\{(C_1 + C_2)\,cos\,\omega t + i(C_1 - C_2)\,sin\,\omega t\}$$

$$let \;\; (C_1 + C_2) = C\,sin\,\theta$$

$$i(C_1 - C_2) = C\,cos\,\theta$$

بالتعويض نحصل على:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\{Csin\theta\,cos\,\omega t + Ccos\theta\,sin\,\omega t\}$$

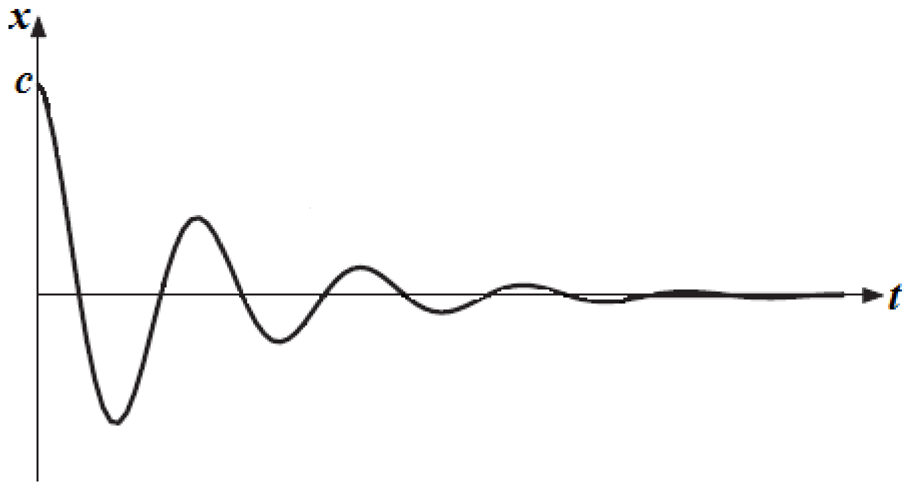
$$x_{(t)} = Ce^{-rt}\{sin\theta\,cos\,\omega t + cos\theta\,sin\,\omega t\}$$

بالاستفادة من المتطابقة المثلثية $[sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta]$ العلاقة الاخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$x_{(t)} = Ce^{-rt}\sin(\omega t + \theta)$$

العلاقة الأخيرة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية ناقصة الاضمحلال، حيث C , θ هي ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من الشروط الابتدائية للحركة ويلاحظ منها ان سعة الاهتزاز تتناقص أسياً مع الزمن.

الشكل التالي يوضح التمثيل البياني تغير الإزاحة الآنية للحركة التوافقية ناقصة الاضمحلال، حيث يلاحظ ان سعة الاهتزاز تتناقص أسياً مع مرور الزمن.



ان التردد والزمن الدوري للاهتزاز ناقص الاضمحلال فيعطى بالصيغة:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2} \quad , \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad , \qquad r = \frac{R}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}} \qquad , \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}} \qquad , \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2}}}$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان الزمن الدوري للاهتزاز ناقص الاضمحلال هو اكبر من الزمن الدوري للاهتزاز غير المضمحل.

تعتبر الحركة التوافقية ناقصة الاضمحلال اكثر أنواع الاضمحلال شيوعاً في الطبيعة، ومن أمثلة الحركة التوافقية ناقصة الاضمحلال حركة الجسم المعلق بنابض يحيط به مائع (الهواء مثلا) ، وحركة البندول في الهواء.

الحالة الثالثة: الحركة التوافقية زائدة الاضمحلال $(r > \omega_o)$ (Over-damped)

في هذه الحالة يعاني المهتز مقاومة كبيرة لحركته حيث تكون قيمة ثابت الاضمحلال (r) كبيرة بالمقارنة مع قيمة التردد الزاوي الطبيعي للمهتز (ω_o) أي ان $(r > \omega_o)$ ، ومعادلة الحركة تكون بالصورة:

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

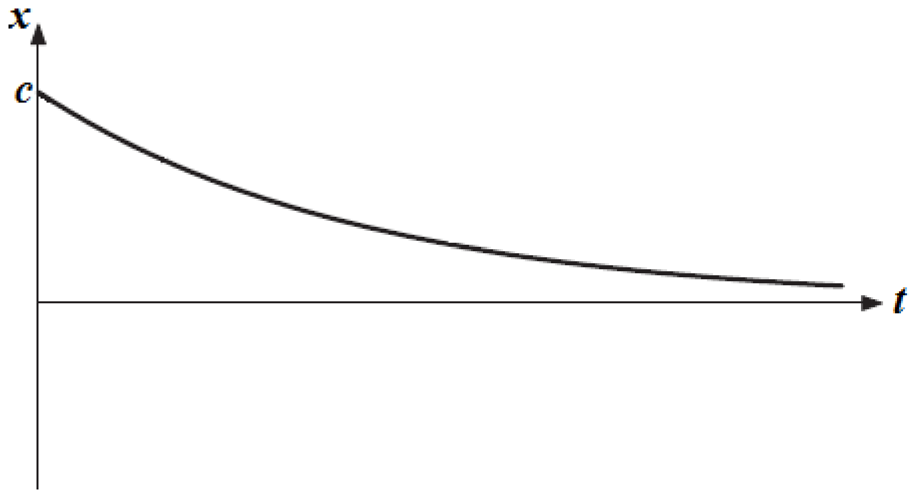
وجذور معادلة المؤثر التفاضلي ستكون عبارة عن جذرين حقيقيين وذلك لكون $[(r^2 - \omega^2) > 0]$

والحل العام يكون بالصيغة:

$$x_{(t)} = e^{-rt}\left[C_1 e^{\sqrt{r^2-\omega_o^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2-\omega_o^2}\,t}\right]$$

حيث C_1 و C_2 هي ثوابت اختيارية يمكن ايجادها بتطبيق الشروط الابتدائية للحركة.

الشكل التالي يوضح التمثيل البياني لتغير الإزاحة الآنية للحركة زائدة الاضمحلال، حيث يلاحظ ان الإزاحة الآنية تتناقص ببطء مع مرور الزمن.



من التطبيقات العملية للحركة زائدة الاضمحلال أنظمة اغلاق الباب (Door–closer) الأوتوماتيكية، والتي تنصب عادة في البنايات العامة لغرض اغلاق الأبواب تلقائيا. وتتكون من أجزاء ميكانيكية مرتبطة بنابض ومنظومة إعاقة مكونة من أسطوانة ومكبس، عند فتح الباب ينضغط النابض، وعند ترك الباب يعمل النابض على إرجاع الباب إلى وضعية الأغلاق عندها يعمل المكبس على إبطاء عملية الأغلاق.

الحالة الرابعة: الحركة التوافقية حرجة الاضمحلال $(r = \omega_o)$ (*Critical-damped*)

وهي حالة خاصة تمثل الحد الفاصل بين الحركة ناقصة الاضمحلال والحركة زائدة الاضمحلال حيث تكون قيمة ثابت الاضمحلال تساوي (أو قريبة من) قيمة التردد الزاوي الطبيعي للمهتز $(r = \omega_o)$، معادلة الحركة في الحالة الحرجة تعطى بالصيغة:

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

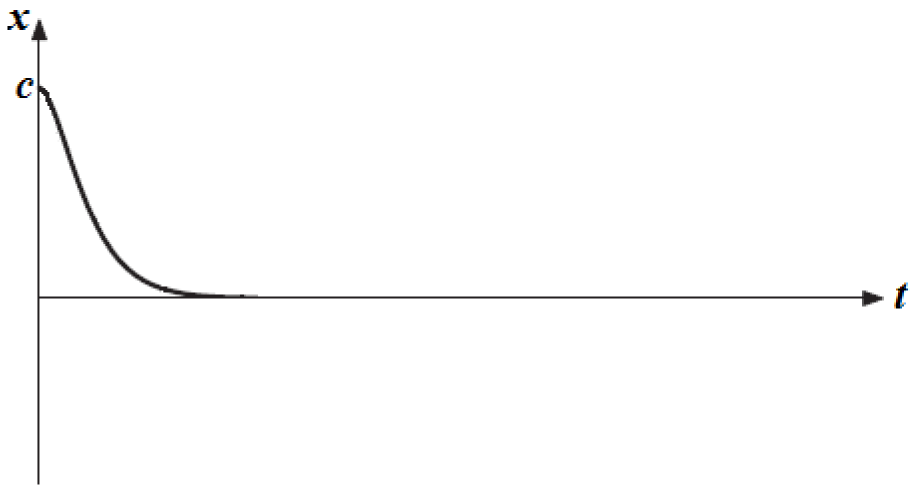
في حالة الحركة التوافقية حرجة الاضمحلال يكون $(r = \omega_o)$ أي ان $[(r^2 - \omega_o^2) = 0]$ وبالنتيجة تكون جذور معادلة المؤثر التفاضلي $D = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_o^2}$ عبارة عن جذر حقيقي مكرر $(D_1 = D_2 = -r)$ وعندها فان الحل العام لمعادلة للحركة حرجة الاضمحلال يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = C_1 e^{Dt} + C_2 t e^{Dt}$$

بالتعويض وترتيب الحدود نحصل على:

$$x_{(t)} = (C_1 + C_2 t)e^{-rt}$$

المعادلة الأخيرة تمثل دالة الإزاحة الآنية للحركة الحرجة المضمحلة، حيث C_1، C_2 هي ثوابت اختيارية. الشكل التالي يوضح التمثيل البياني للإزاحة الآنية مع الزمن للحركة حرجة الاضمحلال.

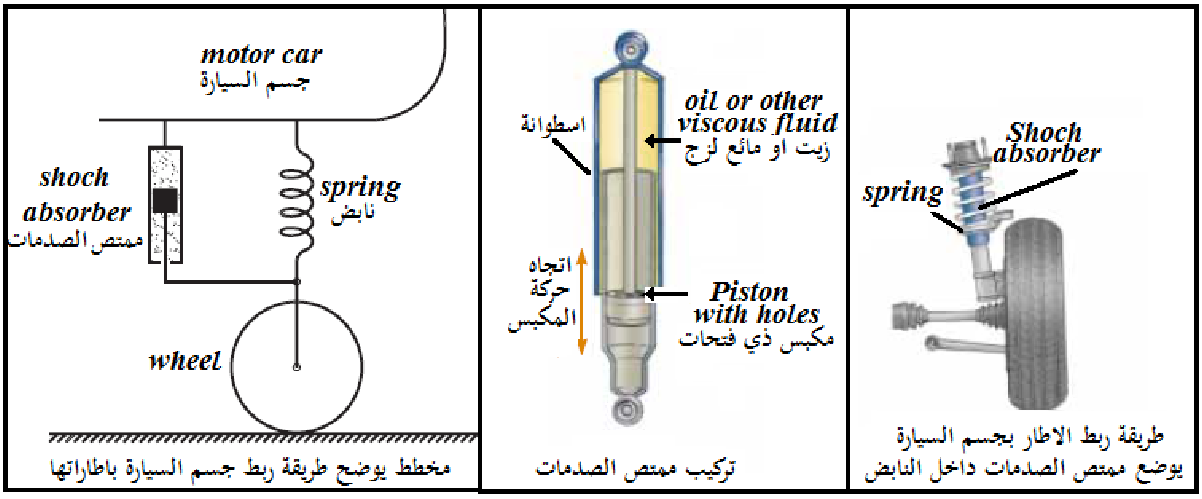


نلاحظ من الشكل ان الإزاحة الآنية للحركة حرجة الاضمحلال تتناقص بسرعة من اعظم قيمة لها الصفر (موضع الاتزان)، وبتعبير آخر فان اسرع إخماد للحركة يتم في الحالة الحرجة حيث يعود الجسم إلى موضع اتزانه بسرعة دون ان يتبع ذلك أي اهتزاز جديد.

للحالة حرجة الاضمحلال تطبيقات عديدة مهمة منها:

1- يتم تصميم أجهزة القياس التي تتضمن أجزاء متحركة كالمؤشرات في أجهزة القياس الكهربائية التناظرية مثل: الكلفانوميتر، الاميتر، الفولتميتر و الاوميتر للعمل ضمن الحالة الحرجة، وذلك لكي يعود المؤشر لموضع توازنه بسرعة دون ان يتذبذب مما يتيح اخذ قراءة صحيحة وسريعة حال ربط جهاز القياس بالدائرة الكهربائية.

2- يتم تصميم ممتص الصدمات (الدبلات) في السيارات للعمل ضمن الاضمحلال الحرج. يتكون ممتص الصدمات من مكبس يتحرك داخل أسطوانة بها زيت لزج وهناك فتحات بين المكبس والأسطوانة، يعمل ممتص الصدمات على إخماد الاهتزازات الناتجة عن النوابض عند عبور السيارة للمطبات، وللحصول على اسرع إخماد للاهتزازات يصمم ممتص الصدمات للعمل ضمن الحالة حرجة الاضمحلال، الشكل التالي يوضح فكرة عمل وتركيب ممتص الصدمات.



طريقة ربط الاطار بجسم السيارة يوضع ممتص الصدمات داخل النابض
تركيب ممتص الصدمات
مخطط يوضح طريقة ربط جسم السيارة باطاراتها

5.4 مقاييس الاضمحلال:

هناك ثلاث كميات يمكن من خلالها دراسة طبيعة أي اضمحلال وهي كالتالي:

1.5.4 التناقص اللوغارتمي (δ) (Logarithmic Decrement)

هو اللوغاريتم الطبيعي للنسبة بين أي سعتين متتاليتين من سعات الاهتزاز المضمحل ويرمز له بالرمز ($\boldsymbol{\delta}$)، ويعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\delta} = rT = \frac{2\pi R}{\sqrt{4mk - R^2}}$$

حيث R ثابت المقاومة، k ثابت القوة للنابض، m كتلة الجسم، r ثابت الاضمحلال، T الزمن الدوري.

2.5.4 زمن الاسترخاء (τ) (Relaxation Time)

هو الزمن اللازم لهبوط قيمة السعة إلى $\left(\frac{1}{e}\right)$ من قيمتها الاصلية ، حيث e هي اساس اللوغاريتم الطبيعي $(e^1 = 2.718)$. وتعطى الصيغة النهائية لزمن الاسترخاء بالعلاقة التالية:

$$\tau = \frac{1}{r} = \frac{2m}{R}$$

من العلاقة الأخيرة نجد ان زمن الاسترخاء يعتمد على كتلة الجسم m وثابت المقاومة R حيث يتناسب طردياً مع كتلة الجسم وعكسياً مع ثابت المقاومة.

3.5.4 عامل النوعية (Q) (Quality Factor)

يعرف عامل النوعية لأي مهتز مضمحل بانه حاصل ضرب 2π في النسبة بين متوسط الطاقة المخزونة في المهتز الى متوسط الطاقة المفقودة منه خلال دورة واحدة من دورات الاهتزاز ويرمز له بالرمز Q ويعطى بالعلاقة:

$$Q = 2\pi\left(\frac{\text{متوسط الطاقة المخزونة خلال دورة واحدة}}{\text{متوسط الطاقة المفقودة خلال نفس الدورة}}\right)$$

تعطى العلاقة النهائية لعامل النوعية للمهتز المضمحل بالعلاقة:

$$Q = \frac{\omega m}{R}$$

من العلاقة الأخيرة نجد ان عامل النوعية يتناسب عكسياً مع ثابت المقاومة R وذلك لانه كلما تزداد مقاومة الوسط للحركة يزداد مقدار الطاقة المفقودة خلال الحركة.

مثال: مهتز يتألف من جسيم ونابض حلزوني ، يعاني أثناء اهتزازه على امتداد المحور السيني قوتين، القوة الأولى هي قوة استعادة ومقدارها يتناسب مع الإزاحة الآنية (x) والقوة الثانية هي قوة اخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية $(\dot{x})$ فاذا كانت قوة الاستعادة تساوي عددياً $(200x\,dyn)$ وقوة الاخماد تساوي $(160\,dyn)$ في اللحظة التي تكون فيها سرعته الآنية $\left(4\frac{cm}{sec}\right)$ واذا فرض ان كتلة الجسيم (10g) وانه قد بدأ حركته من السكون عند نقطة تبعد $(15cm)$ عن موضع الاتزان اوجد ما يلي:
أ- المعادلة التفاضلية لحركة المهتز. ب- الموضع الآني للجسيم في أية لحظة زمنية. جـ- السعة والتردد والزمن الدوري للذبذبات المضمحلة. د- التناقص اللوغاريتمي و زمن الاسترخاء وعامل النوعية.

الحل:

قوة الاستعادة $F_s \propto x$ ، قوة الاخماد $F_R \propto \dot{x}$

قوة الاستعادة $F_s = -200x\,dyn$

قوة الاخماد $F_R = 160\,dyn \quad when \quad \dot{x} = 4\frac{cm}{sec}$

أ- المعادلة التفاضلية لحركة المهتز:

$$F_s = -200x\ \ dyn$$

$$F_R = -R\dot{x}$$

$$-160 = -R(4)$$

$$R = \frac{160\,dyn}{4\frac{cm}{sec}} = 40\frac{dyn\,sec}{cm}$$

$$F_R = -40\dot{x}\ \ dyn$$

$$\sum F = F_R + F_s$$

$$\sum F = -40\dot{x} - 200x$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل على:

$$m\ddot{x} = -40\dot{x} - 200x$$

بالتعويض عن قيمة الكتلة $(m = 10)$ وترتيب الحدود نحصل على:

$$10\ddot{x} = -40\dot{x} - 200x$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = 0$$

ب- الموضع الآني للجسيم في أي لحظة:

بالمقارنة مع الصيغة العامة لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة $\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$ نجد:

$$2r = 4 \ \rightarrow \ r = 2\ sec^{-1}$$

$$\omega_o^2 = 20 \ \rightarrow \omega_o = \sqrt{20} = 4.47\ \frac{rad}{sec}$$

لمعرفة الحل العام يجب تحديد نوع حالة الاضمحلال التي تخضع لها الحركة.

بالمقارنة بين قيمتي r و ω_o نجد ان $(r < \omega_o)$ اي ان الحركة من النوع ناقص الاضمحلال، وبالتالي فان الحل العام يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = Ce^{-rt}\sin(\omega t + \theta)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2}$$

$$\omega = \sqrt{20 - (2)^2} = \sqrt{16} \quad \rightarrow \ \omega = 4\frac{rad}{sec}$$

$$x_{(t)} = Ce^{-2t}\sin(4t + \theta)$$

لايجاد قيمة الثابتين الاختياريين $(C\ ,\ \theta)$ نطبق الشرطين الابتدائيين وكما يلي:

$$1 - when\ \ t = 0\ \ , x = 15\ cm$$

$$15 = Ce^{-2(0)}\sin[4(0) + \theta]$$

$$15 = C\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .(1)$$

$$2 - when\ \ t = 0\ ,\ \ \dot{x} = 0$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[Ce^{-2t}\sin(4t + \theta)]$$

$$\dot{x} = -2Ce^{-2t}\sin(4t + \theta) + 4Ce^{-2t}\cos(4t + \theta)$$

$$when\ \ t = 0\ ,\ \ \dot{x} = 0$$

$$0 = -2Ce^{-2t}\sin[4(0) + \theta] + 4Ce^{-2t}\cos[4(0) + \theta]$$

$$0 = -2\sin\theta + 4\cos\theta$$

$$2\sin\theta = 4\cos\theta$$

بقسمة الطرفين على $(\cos\theta)$ نحصل على:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \qquad \theta = \tan^{-1}(2\,)$$

$$\theta = 63.4^{o}$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض عن قيمة الزاوية θ في المعادلة (1) فنحصل على:

$$15 = C\sin 63.4^{0}$$

$$C = \frac{15}{\sin 63.4^{0}} = \frac{15}{0.894} \qquad \rightarrow \; C = 16.8\;cm$$

$$cm x_{(t)} = 16.8\, e^{-2t}\sin(4t + 63.4^{0})$$

جـ - السعة والتردد والزمن الدوري للذبذبات المضمحلة:

السعة $A = 16.8\, e^{-2(0)}\sin[4(0) + 63.4] = 16.8\sin 63.4$

$$A = 15cm$$

$$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \; f = \frac{4}{2\pi} = \frac{4}{2\pi}$$

$$f = \frac{2}{\pi}Hz$$

$$T = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \; T = \frac{\pi}{2}\;sec$$

د- التناقص اللوغاريتمي وزمن الاسترخاء ومعامل النوعية:

التناقص اللوغارتمي $\delta = rT \quad , r = 2sec^{-1}, \mathrm{T} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{sec}$

$$\boxed{\delta = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi}$$

زمن الاسترخاء $\tau = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}sec$

معامل النوعية $Q = \frac{\omega m}{R}$

$$Q = \frac{4 \times 10}{40} = 1$$

مثال (2): جسيم كتلته $(2kg)$ علق بطرف نابض حلزوني فادى الى استطالته بمقدار $(5cm)$ وكانت قوة المقاومة متناسبة خطيا مع سرعة الجسيم وحسب العلاقة $(F_R = -12\dot{x}\ N)$، فاذا سحب الجسيم مسافة $(10cm)$ عن موضع الاتزان ثم ترك ليتحرك من السكون اوجد :

أ- معادلة الحركة للجسيم.

ب- الموضع الآني للجسيم في أية لحظة زمنية.

الحل:

أ- معادلة الحركة للجسيم.

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{mg}{\Delta x}$$

$$k = \frac{2 \times 9.8}{5 \times 10^{-2}} = 392\frac{N}{m}$$

$$F_s = -392x \quad N$$

$$\sum F = -12\dot{x} - 392x$$

$$ma = \sum F$$

$$2\ddot{x} = -12\dot{x} - 392x$$

$$\ddot{x} = -6\dot{x} - 196x$$

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 196x = 0$$

ب- الموضع الآني للجسيم في أي لحظة:

الصيغة العامة لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة تعطى بالصيغة $\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$

بالمقارنة بين الصيغة العامة لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة والصيغة العامة لمعادلة حركة المهتز نجد:

$$2r = 6 \;\rightarrow\; r = 3\ sec^{-1}$$

$$\omega_o^2 = 196 \;\rightarrow \omega_o = \sqrt{196} = 14\frac{rad}{sec}$$

بالمقارنة بين قيمتي r و ω_o نجد ان $(r < \omega_o)$ اي ان الحركة من النوع ناقص الاضمحلال، وبالتالي فان الحل العام يعطى بالصيغة:

$$x_{(t)} = Ce^{-rt}\sin(\omega t + \theta)$$

$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2}$

$\omega = \sqrt{196 - (3)^2} = \sqrt{187} \quad \rightarrow \omega = 13.67\frac{rad}{sec}$

$x_{(t)} = Ce^{-3t}\sin(13.67t + \theta)$

$1 - when\ \ t = 0\ \ , x = 10\ cm$

$10 = Ce^{-3(0)}\sin[13.67(0) + \theta]$

$10 = C\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$

$2 - when\ \ t = 0\ \ ,\ \ \dot{x} = 0$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[Ce^{-3t}\sin(13.68t + \theta)]$

$\dot{x} = -3Ce^{-3t}\sin(13.67t + \theta) + 13.67Ce^{-3t}\cos(13.67t + \theta)$

$when\ \ t = 0\ \ ,\ \ \dot{x} = 0$

$0 = -3Ce^{-3t}\sin[13.67(0) + \theta] + 13.67Ce^{-3t}\cos[13.67(0) + \theta]$

$0 = -3\sin\theta + 13.67\cos\theta$

$3\sin\theta = 13.67\cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{13.67}{3} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(4.557\ )$

$\theta = 77.6^0$

لايجاد قيمة الثابت C نعوض عن θ في المعادلة (1) فنحصل على:

$10 = C\sin 77.6$

$C = \frac{10}{\sin 77.6} = 10.24\ cm$

$x_{(t)} = 10.24\ e^{-3t}\sin(13.67t + 77.6^0)\ \ cm$

أسئلة الفصل الرابع

س1: عرف كل من: الاهتزاز المضمحل، التناقص اللوغاريتمي، زمن الاسترخاء، عامل النوعية.

س2: اشتق الصيغة العامة لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة، ثم أوجد مجموعة الحلول المناسبة لهذه المعادلة وأعط التفسير الفيزيائي لكل حل.

س3: قارن بين حالات الحركة التوافقية المضمحلة الأربعة من حيث:

أ- قيمة ثابت الاضمحلال. ب- دالة الإزاحة الآنية. جـ- الرسم البياني للحركة. د- التطبيقات ان وجدت.

س4: مهتز يتألف من جسيم ونابض حلزوني ، يعاني اثناء اهتزازه على امتداد المحور السيني قوتين، القوة الأولى هي قوة استعادة ومقدارها يتناسب مع الإزاحة الآنية (x) والقوة الثانية هي قوة إخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية $(\dot{x})$ فاذا كانت قوة الاستعادة تساوي عددياً $(250x\, dyn)$ وقوة الإخماد تساوي $(360\, dyn)$ في اللحظة التي تكون فيها سرعته الآنية $\left(6\frac{cm}{sec}\right)$ واذا فرض ان كتلة الجسيم (10g) وانه قد بدأ حركته من السكون عند نقطة تبعد $(20cm)$ عن موضع الاتزان أوجد ما يلي:

أ- المعادلة التفاضلية لحركة المهتز. ب- الموضع الآني للجسيم في أية لحظة زمنية.

جـ- السعة والتردد والزمن الدوري للذبذبات المضمحلة. د.- التناقص اللوغاريتمي وزمن الاسترخاء وعامل النوعية. هـ- المدى الذي تتراوح فيه قيم ثابت الاضمحلال بالنسبة للحركة: 1- ناقصة الاضمحلال 2- حرجة الاضمحلال 3- زائدة الاضمحلال.

س5: جسم كتلته $(2k\text{g})$ علق بطرف نابض حلزوني فادى إلى استطالته بمقدار $(5cm)$ فاذا سحب ذلك الجسم نحو الأسفل بإزاحة مقدارها $(18cm)$ عن موضع التوازن ثم تُرك، جد موقع الجسم في أي لحظة زمنية اذا كانت القوة المقاومة لحركة المهتز والناتجة من اللزوجة تساوي عددياً $(20\dot{x}\, N)$ حيث $\dot{x}$ هي السرعة الآنية.