

(1-2) الشحنة الكهربائية : Electric charge

الشحنة هي خاصية اساسية مميزة للجسيمات الاولية التي تتكون منها المادة والحقيقة ان جميع المواد تتكون من بروتونات والكترونات ونيوترونات واثنين من هذه الجسيمات تحملان شحنة هي (البروتونات والالكترونات) والمقصود بالشحنة من وجهة النظر العينية هو صافي الشحنة او الشحنة الفائضة فعندما نقول ان الجسم مشحون فان ذلك يعني ان الجسم يمتلك شحنة فائضة ناتجة اما عن **فائض في عدد الالكترونات (سالب الشحنة)** او **فائض في عدد البروتونات (موجب الشحنة)** والحقيقة ان الشحنة محفوظة لا يمكن ان تفنى او تخلق.

(2-2) قانون كولوم : Coulomb Law

أن حصيلة القياسات التجريبية على القوى العاملة بين الشحنات الكهربائية هي:

1- هناك نوعان فقط من الشحنات الكهربائية هي **الشحنات الموجبة والشحنات السالبة**.

2- تؤثر شحنتان نقطيتان احدهما على الاخرى بقوة :

أ- تعمل على امتداد الخط الواصل بين الشحنتين .

ب- يتناسب مقدار هذه القوة طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين .

ج- يتناسب مقدارها عكسيا مع مربع المسافة بينهما .

3- القوة المؤثرة بين الشحنتين اما قوة تنافر اذا كانت الشحنتان متماثلتين او تجاذب اذا كانت الشحنتان مختلفتين.

يمثل النصف الاخير (نقطة 2,3) **نص قانون كولوم** : (القوة الكهربائية بين شحنتين تتناسب طرديا مع حاصل ضرب الشحنتين وعكسيا مع مربع المسافة بينهما).

ويمكن صياغة قانون كولوم بصيغة المتجهات على النحو الاتي:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{But } \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$$



وحداتها نيوتن N وان :

حيث ان : $\vec{r}_{12}$ المتجه من q_1 الى q_2 . وكذلك

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m} \text{ or } \frac{C^2}{J} \text{ or } \frac{C^2}{N.m^2}, \text{ and } K = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{coul^2}$$

يستخدم قانون كولوم على الشحنات النقطية ، ويقصد بالشحنة النقطية حسب المفهوم العيني ، بأنها تلك الشحنة التي تشغل حيزا ابعاده صغيرة جدا مقارنة مع اي طول.

ويطبق قانون كولوم على الشحنات المستقرة النقطية في الفراغ وفي العوازل والموصلات ويصح تطبيق قانون كولوم على الجسيمات الاولية المشحونة (البروتونات والالكترونات).

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^3} \hat{r}_{21}, \quad |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| \quad \text{but } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(3-2) قاعدة التراكب للقوى :-

في حالة وجود اكثر من شحنتين نقطيتين ، فيمكن تعيين القوى المتبادلة بين هذه الشحنات بتكرار استخدام معادلة (1) .
لو افترضنا وجود منظومة من (N) من الشحنات النقطية ، فالقوى المؤثرة على الشحنة q_i هي:

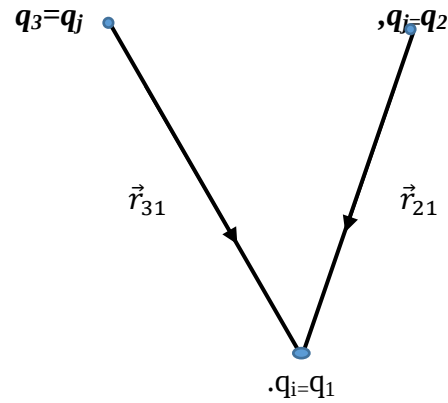
$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \sum_{j \neq i}^N q_j \frac{\vec{r}_{ji}}{|\vec{r}_{ji}|^3}$$

اذ تشير علامة الجمع ($\sum$) الى حقيقة ان الجمع الاتجاهي يشمل جميع الشحنات عدا الشحنة (i) وهذه هي قاعدة التراكب للقوى والتي تنص على ان :-

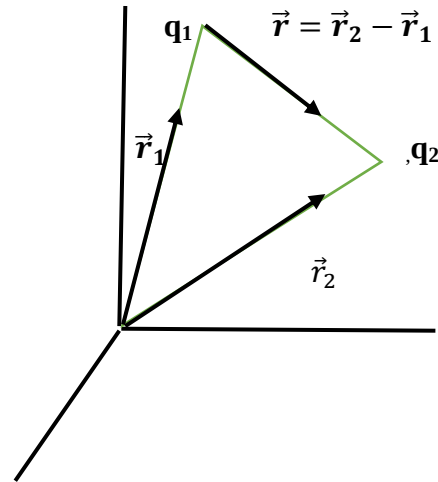
القوى الكلية المؤثرة على جسم تساوي المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة على الجسم كلا على انفراد.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \hat{r}_{21} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2} \hat{r}_{31} + \dots \quad \text{as } q_i = q_1, \text{ and } q_j = q_2, q_3, \dots$$

حيث q_1 تكون مرجع وليس نقطة اصل . $\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \hat{r}_{21} + K \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_{31}|^2} \hat{r}_{31}$ كما في الرسم التوضيحي التالي:-



اذا عبرنا عن مواقع الشحنات بوجود نقطة الاصل : $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{r}_2$.



$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\hat{i}(x_2 - x_1) + \hat{j}(y_2 - y_1) + \hat{k}(z_2 - z_1)]}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}$$

(2 - 4) كثافة الشحنة : Charge density

يمكن توسيع فكرة التأثير المتبادل بين N من الشحنات النقطية وجعلها تشمل التأثير المتبادل بين شحنة نقطية وتوزيع متصل (ممتد) من الشحنة .

معنى التوزيع المتصل للشحنة: ان الشحنة الكهربائية تتكون من مضاعفات لشحنة اساسية هي شحنة الالكترون (1.6×10^{-19} coul) وهو مقدار ضئيل جدا ، وهذا يعني ان قيمة اي شحنة كهربائية يجب ان تكون مساوية لشحنة الالكترون مضروبة في عدد صحيح . وهذا بدوره يعني ان اي عنصر صغير من الحجم مأخوذ من توزيع شحني يحتوي على عدد كبير جدا من الالكترونات وعندئذ يصبح بالامكان ان نصف اي توزيع شحني **بدلالة دالة كثافة الشحنة والتي تمثل :- غاية الشحنة لوحدة الحجم عندما يصبح حجم الشحنة متناهي الصغر ويمكن وصف التوزيع الشحني بدلالة الدوال النقطية الاتية:**

1- دالة كثافة الشحنة الحجمية ρ :- وتعرف كثافة الشحنة الحجمية بموجب العلاقة

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad \text{and } dq = \rho dV, \therefore q = \int \rho dV$$

2- كثافة الشحنة السطحية σ :- وتعرف الكثافة السطحية للشحنة بموجب العلاقة

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad \text{and } dq = \sigma dS \therefore q = \int \sigma dS$$

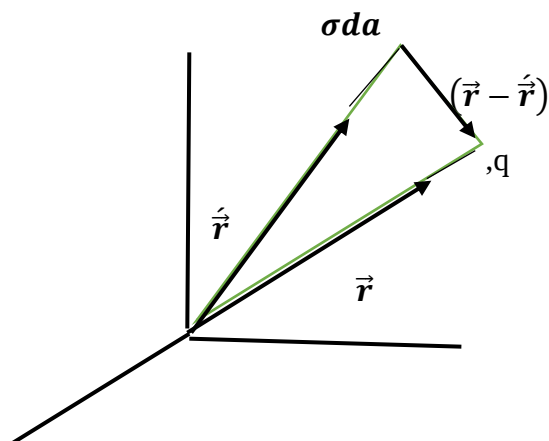
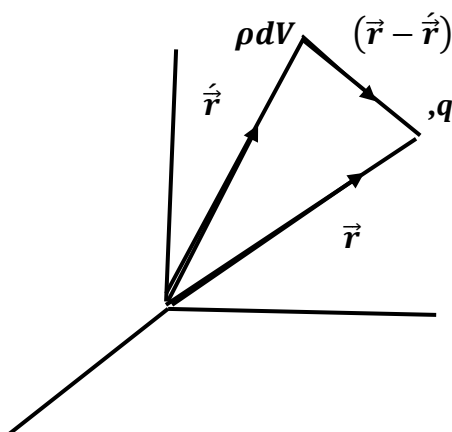
3- كثافة الشحنة الطولية λ :- وتعرف كثافة الشحنة الطولية بموجب العلاقة

$$\lambda = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell} \quad \text{and } dq = \lambda d\ell, \quad q = \int \lambda d\ell$$

ان ρ, σ, λ تمثل كثافة الشحنة الفائضة او كثافة صافي الشحنة .

اذا توزعت الشحنة بحيث شغلت حجما قدره V بكثافة حجمية ρ واصبحت كثافتها السطحية σ على السطح S المحيط بالحجم V لا يمكن ايجاد قوة كولوم التي يؤثر بها هذا التوزيع الشحني على شحنة نقطية q محدد موضعها بالمتجه $\vec{r}$ وفق العلاقة التالية:-

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho dV + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma da$$



Electric Field : المجال الكهربائي (5-2)

يعرف المجال الكهربائي عند نقطة ما بأنه القوة المؤثرة على شحنة اختبارية موضوعة عند تلك النقطة الى قيمة الشحنة الاختبارية ويعطى بالعلاقة التالية :-

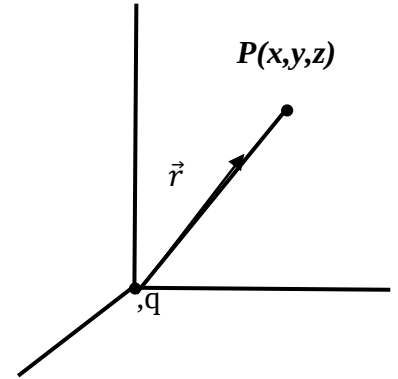
$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}}{q} \frac{\text{volt}}{m} \text{ or } \frac{N}{\text{coul}} , \text{ as } \frac{N}{\text{coul}} = \frac{J/m}{\text{coul}} \text{ but } \frac{J}{\text{coul}} = \text{volt} \Rightarrow \frac{\text{volt}}{m} = \frac{N}{\text{coul}}$$

ان الهدف من ادخال الغاية في تعريف المجال هو لجعل الشحنة الاختبارية غير مؤثرة على التوزيع الشحني المولد للمجال . (الشحنة الاختبارية تؤخذ عادة بقيمة واحد كولوم)

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

اذا كانت الشحنة المسببة للمجال الكهربائي (q) واقعة في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية واقعة عند النقطة (P) على مسافة r من الشحنة q فعندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية:

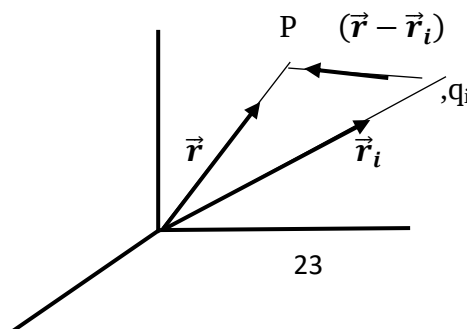
$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \text{or} \quad \vec{E} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$$



اما اذا كانت لدينا مجموعة من الشحنات النقطية مسببة للمجال الكهربائي (q_i) حيث (i = 1, 2, 3, ...) ولاتفق في نقطة الاصل ولكن تبعد بمسافة r_i عن نقطة الاصل اما الشحنة الاختبارية عند النقطة P على مسافة r من نقطة الاصل عندئذ يعطى المجال الكهربائي بالعلاقة التالية :

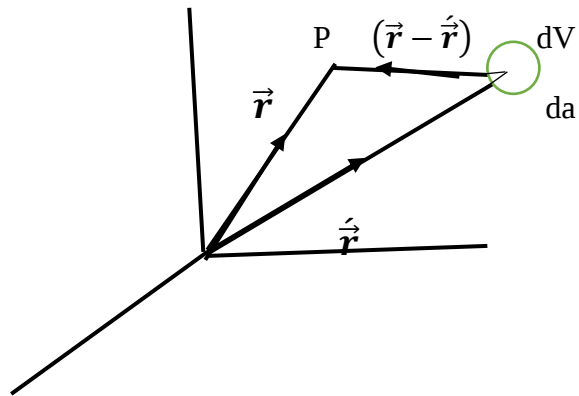
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} , \quad \text{as } \vec{r}_i + (\vec{r} - \vec{r}_i) = \vec{r}$$

ويكون المجال بنفس اتجاه القوة .



لنأخذ توزيع شحني مكون من N من الشحنات النقطية $q_1, q_2, \dots, q_N$ ونفرض انها موضوعة على النقاط $r_1, r_2, \dots, r_N$ على الترتيب ومن توزيع حجمي لشحنة تشغل حجما قدره V بكثافة حجمية $\rho(\vec{r})$, ومن توزيع سطحي لشحنة موزعة على سطح S مميز بكثافة سطحية $\sigma(\vec{r})$ فاذا وضعت شحنة اختبارية (q) عند النقطة P التي تبعد مسافة r عن نقطة الاصل اي ان لدينا توزيع حجمي وسطحي فالمجال الكهربائي في هذه الحالة يعطى بالعلاقة الاتية بحيث يغطي التوزيع الشحني بأكمله :-

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}_{\text{نقطي} \uparrow} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho dV}_{\text{حجمي} \uparrow} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dS}_{\text{سطحي} \uparrow}, \quad \text{as } \vec{r} + (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{r}$$



لأثبت ان المجال الكهربائي محافظ (Conserved) نتبع مايلي :-

اذا ازاحت شحنة مقدارها q في مجال كهربائي E بحيث لا يؤثر وجودها على شكل المجال او مقداره ، ازاحة تفاضلية ($d\ell$) من نقطة a الى نقطة b وبدون تغيير في طاقتها الميكانيكية فان الشغل المنجز عليها يكون :

$$W = -\oint_a^b \vec{E} \cdot Q \cdot d\ell \quad (\text{but } \vec{F} = Q\vec{E}) \quad (\text{الشغل} = \text{القوة} \times \text{الازاحة})$$

والاشارة السالبة تعني ان الشغل قد انجز ضد المجال الكهربائي $\vec{E}$ وكانت الشحنة على مسار مغلق ولسهولة الحل نتصور ان الجسم هو شحنة نقطية مقدارها Q فالشغل المنجز عندئذ هو:-

$$W = -\oint \vec{E} \cdot Q \cdot d\ell = -\frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \oint_a^b \frac{\vec{r} \cdot d\ell}{r^3}$$

الحد داخل التكامل يمثل $\frac{d\ell}{r^2} = \frac{-dr}{dr}$ وعليه:

$$W = -\frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \oint_a^b \frac{-dr}{r^2} = -\frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q\dot{Q}}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b$$

ان مجموع الزيادات في $1/r$ في مسار مغلق يساوي صفر لان قمة r ثابتة هي نفسها عند بداية ونهاية المسار وعليه فالتكامل الخطي يساوي صفر وعليه فالشغل المنجز لتحريك شحنة نقطية حول اي مسار مغلق في مجال شحنة نقطية اخرى يساوي صفر اي ان :-

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ومن نظرية ستوكس وعند كل نقاط الفراغ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

(2-6) الجهد الكهروستاتيكي :- The Electrostatic Potential

إذا تلاشى التفاف كمية متجهة لأمكن التعبير عن هذه الكمية المتجهة بمثابة انحدار لكمية لامتجهة وهذا الكلام ينطبق على المجال الكهربائي المعطى بالمعادلة (2) ولتحقيق ذلك تأخذ التفاف المجال الكهربائي .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \sigma dS$$

from the hypothesis $\vec{\nabla} \times \phi \vec{F} = \phi \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \phi \times \vec{F}$

$$\text{let } \phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3}, \text{ and } \vec{r} - \vec{r}_i = \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}) + \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}) \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{we proved that } \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|^3} = -3 \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^4} = -3 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = -3 \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^5} \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1)

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = 0 - \frac{3(\vec{r} - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}|^5} \times (\vec{r} - \vec{r}), \quad \text{but } (\vec{r} - \vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}) = 0, \quad \text{متوازيان}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

القوة محفوظة

تشير معادلة 4 الى وجود دالة لامتجهة ذات انحدار مساو للمجال الكهربائي وهذه الدالة هي الجهد الكهروستاتيكي u .
وعليه اذا كان التفاف كمية متجهة يساوي صفر فنعتبر عن هذه الكمية المتجهة بدلالة انحدار كمية لامتجهة اي ان :

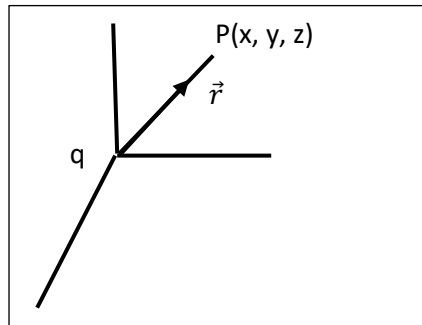
$$\vec{E} = - \nabla u \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad \text{also } \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \right) = -\nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = -\nabla u$$

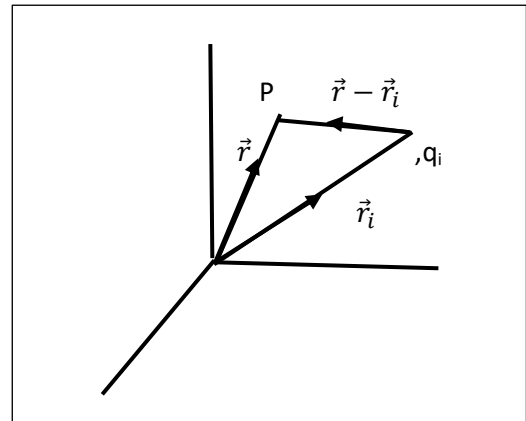
$$u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|} \dots \dots \dots (6)$$

حيث الشحنة q هي المسببة للجهد الكهروستاتيكي ونفرض انها تقع في نقطة الاصل والشحنة الاختبارية عند الموقع P على بعد r من نقطة الاصل .



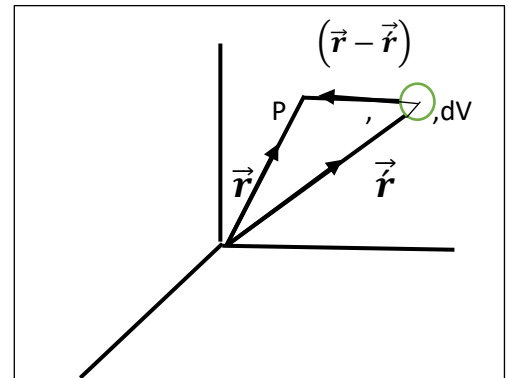
ويعطى الجهد الكهروستاتيكي الناشئ عن مجموعة من الشحنات النقطية (q_i) والتي لا تقع في نقطة الاصل بل على بعد r_i من نقطة الاصل والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل بالعلاقة :-

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \dots \dots \dots (7)$$



وإذا كان لدينا توزيع شحني بشكل (نقطي و حتمي و سطحي) والشحنة الاختبارية في الموقع P على بعد r من نقطة الاصل فالجهد الكهروستاتيكي عندئذ يعطى بالعلاقة ادناه:-

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r)dV}{|\vec{r} - \vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r)da}{|\vec{r} - \vec{r}|}$$



كما يمكننا الحصول على الجهد الكهروستاتيكي بصورة مباشرة وذلك بوجود المجال الكهربائي كما في المعادلة التالية

$$E(r) = -\nabla u$$

$$\int_{ref}^r E(r).dr = - \int_{ref}^r \nabla u.dr \quad \text{وبأخذ التكامل للطرفين :}$$

حيث ref نقطة المرجع واختيرت عند نقطة يكون عندها الجهد يساوي صفر ومن تعريف الانحدار نجد ان :-

$$\nabla u(r) = \frac{du(r)}{dr} \Rightarrow \nabla u(r).dr = du(r) \quad \text{but} \quad \int_r du(r) = u(r)$$

$$\int_{ref}^r E(r).dr = - \int_{ref}^r du(r) = -u(r)$$

$$u(r) = - \int E(r)dr \dots \dots \dots (8)$$

Potential Energy :- الطاقة الكامنة (2 - 7)

ان هناك علاقة بين الجهد الكهروستاتيكي والطاقة الكامنة المصاحبة للقوة المحافضة الكهروستاتيكية وبصورة عامة يمكن التعبير عن الطاقة الكامنة المصاحبة لقوة محافظة بالشغل المبذول لتحريك الشحنة (q) من موقع الى اخر داخل المجال E والذي يعطى بالعلاقة :-

$$w(r) = - \int_{ref}^r F(r) \cdot dr$$

حيث $w(r)$ تمثل الطاقة الكامنة عند الموقع r نسبة الى نقطة المرجع (ref) تكون عندها الطاقة الكامنة (اي الشغل والجهد) تساوي صفر وظهرت الاشارة السالبة لأن الشغل غير ناتج عن قوة المجال وانما من قوة مقاومة او الجهة المعاكسة للقوة.

$$F = qE, \quad w = - \int_{ref}^r F \cdot dr, \quad \therefore w = -q \int_{ref}^r E \cdot dr, \quad \text{but } E = -\nabla u$$

$$\therefore w = q \int_{ref}^r \nabla u \cdot dr, \quad \text{but } \nabla u = \frac{du}{dr}, \Rightarrow \nabla u \cdot dr = du$$

$$\therefore w = q \int_{ref}^r du = qu(r) \Big|_{ref}^r$$

$$w = q(u(r) - u(ref)) = qu$$

$$u = \frac{w}{q} \quad \frac{\text{Joul}}{\text{coul}} = \text{volt}$$

اي ان فرق الجهد يمثل مقدار الشغل المنجز لوحد الشحنة

Gauss Law :- قانون كاوس (2 - 8)

اوجد كاوس العلاقة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يضمها السطح بما ان المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة نقطية (q) واقعة في نقطة الاصل عند نقطة محددة بالمتجه $\vec{r}$ يساوي :

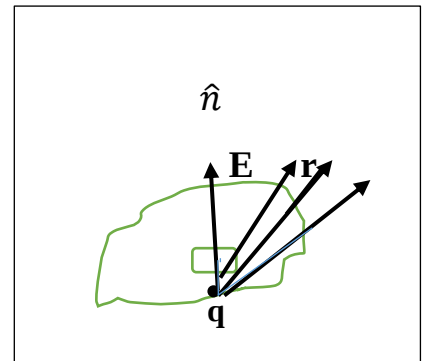
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

بأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق والذي يحيط

بالشحنة (q) سنحصل على:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}|^3} da$$

$$\text{but } \oint_S \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{|\vec{r}|^3} da = 4\pi$$



$$\therefore \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

الصيغة التكاملية لقانون كاوس

تشير المعادلة اعلاه الى ان التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على اي سطح مغلق (الفيض) يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح المغلق مقسوما على سماحيته.

اما اذا كان لدينا شحنتين يصبح القانون :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

وبصورة عامة يعطى القانون بالصيغة :-

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

ولأيجاد الصيغة التفاضلية لقانون كاوس نستخدم نظرية التباعد .

$$\oint \vec{F} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad \text{but} \quad \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{but } dq = \rho dV \Rightarrow q = \int \rho dV$$

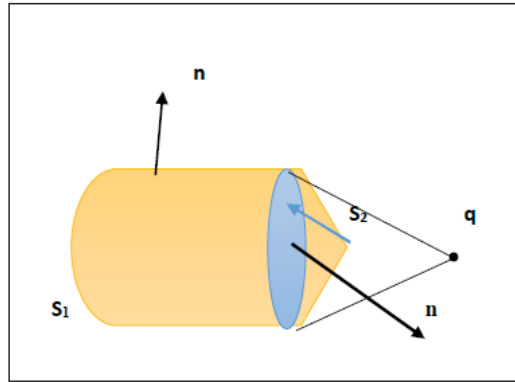
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

الصيغة التفاضلية لقانون كاوس

اذا وقعت الشحنة خارج السطح، يمكن تقسيم السطح الى قسمين مساحتهما S_1 و S_2 وهما في مواجهة الزاوية المجسمة نفسها المتكونة عند الشحنة (q) وتكون مساهمة كل من السطحين للتكامل السطحي متساوية بالمقدار ومتعاكسة في الاشارة مما يؤدي الى تلاشي التكامل الكلي للسطح المغلق اي يصبح التكامل السطحي لشحنة واقعة

خارج السطح المغلق يساوي صفر وبذلك يمكننا ان نستنتج أنه اذا احاط السطح المغلق بالشحنة النقطية لأصبح التكامل السطحي للمركبة العمودية للمجال الكهربائي مساويا الى $\frac{q}{\epsilon_0}$ اما اذا وقعت الشحنة خارج السطح المغلق اصبح التكامل السطحي مساويا للصفر.

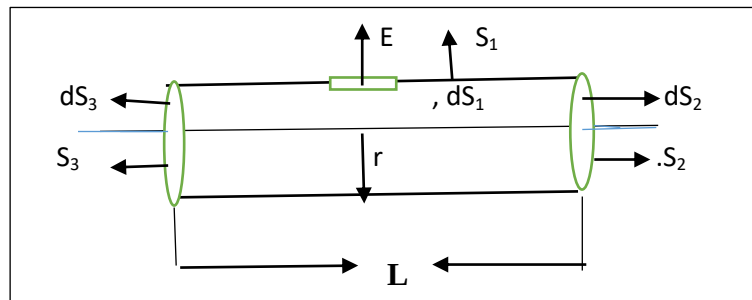


(2 - 9) تطبيقات قانون كاوس : Application of Gauss's law

لقانون كاوس فوائد عملية تتجلى في توفير اسلوب سهل لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدر كاف من التماثل , وعليه يجب اختيار سطح مغلق (سطح كاوس) بحيث يكون للمجال مركبة عمودية عليه ذات قيمة ثابتة لجميع نقاط السطح او ان تكون قيمة المركبة صفرا ، وعلى سبيل المثال :

لأيجاد المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة خطية طويلة جدا ذات كثافة شحنية قدرها λ لوحدة الطول .

لحل هذا المثال نجد ان طبيعة التماثل في هذه الحالة تشير الى ان المجال الكهربائي المتولد يكون شعاعيا وغير معتمد على الموقع سواء من ناحية البعد على امتداد خط الشحنة او من ناحية الموضع الزاوي حول الشحنة الخطية كما في الشكل :



وهذا يعني ان التوزيع المنتظم للشحنة على طول الخط المستقيم اللانهائي يشير الى ان المجال الناشئ عن الخط يكون باتجاه شعاعي منبعث من الخط وان مقدار شدة المجال مساوي لجميع النقاط التي تبعد مسافة قدرها (r) وعليه نجد ان افضل سطح كاوس ملائم لهذا التناسق الشعاعي للمجال المحيط بالخط المشحون هو سطح اسطوانى دائري مغلق نصف قطره (r) وطوله (L) ومحوره منطبق على الخط المشحون كما في الشكل اعلاه.

$$\oint E \cdot n \, da = \oint E \cdot dS = \oint E \cos \theta \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E \cos \theta dS = \oint_{S_1} E \cos \theta dS + \oint_{S_2} E \cos \theta dS + \oint_{S_3} E \cos \theta dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E \cos \theta dS = \oint_{S_1} E \cos(0) dS + \oint_{S_2} E \cos(90) dS + \oint_{S_3} E \cos(90) dS = ES_1 = E(2\pi rL) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{but } q = \int \lambda d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda L$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{مقداراً})$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{اتجاهها}$$

(10-2) الموصلات والعوازل Conductors and Insulators

بالامكان تصنيف المواد تبعا لسلوكها الكهربائي الى صنفين :- الموصلات والعوازل .

الموصلات : هي تلك المواد التي تحتوي على عدد كبير من ناقلات الشحنة الطليقة مثل الفلزات وتمتلك ناقلات الشحنة (وهي الالكترونات في معظم الحالات) حرية التجول في الوسط الموصل وتستجيب الى اضعف المجالات الكهربائية وهذه الناقلات هي المسؤولة عن تكوين التيار الكهربائي في الموصل طالما كان هناك مجال كهربائي مسلط على الموصل من مصدر خارجي للطاقة .

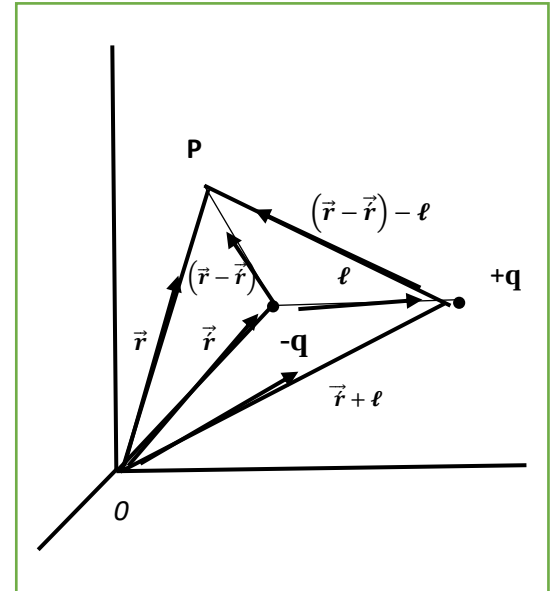
العوازل : هي تلك المواد التي تكون فيها الجسيمات المشحونة مشدودة بقوة ببقية مكونات جزيئات الوسط المادي وتنحصر استجابة الجسيمات المشحونة الى المجال الكهربائي في قدرتها على الانحراف قليلا عن مواضعها الاصلية ولكنها غير قادرة على تغيير مواضعها المحددة داخل الجزيئات وعليه يمكن ان نعرف **الغاز المثالي** على ذلك الوسط الذي لا يحدث فيه توصيل كهربائي عندما يسلب عليه مجال كهربائي خارجي ويمكننا القول ان العوازل تعد غير موصلة .

وهناك مواد معينة (انصاف الموصلات او اشباه الموصلات والالكترونيات) تمتلك خواصا كهربائية متوسطة بين الموصلات والعوازل وتسلك هذه المواد سلوك مشابه لسلوك الموصلات في المجال الكهربائي الساكن (الاستاتيكي) ولكن استجابتها نوعا ما ابطأ من الموصلات اي انها تستغرق وقتا اطول لكي تصل الى حالة الاتزان في مجال ساكن .

وبما ان الشحنة يمكنها ان تتحرك بحرية في الموصل حتى في حالة وقوعها تحت تأثير مجالات ضعيفة جدا فان ناقلات الشحنة (الالكترونات والايونات) تستمر في التحرك الى ان تصل الى مواضع تكون فيها محصلة القوة المؤثرة عليها صفرا وعند وصول الشحنات الطليقة الى حالة الاستقرار تصبح المنطقة الداخلية للموصل منطقة خالية من المجال الكهربائي وسبب ذلك يعود الى ان تعداد ناقلات الشحنة في المنطقة الداخلية للموصل يجب ان تنضب (تستنزف) وإلا استمرت بالحركة في حالة وجود المجال ولهذا يتلاشى المجال الكهربائي في الجسم الموصل تحت الظروف الاستاتيكية وبذلك يصبح الجهد متساويا لجميع نقاط المادة الموصلة لان $E=0$ داخل الجسم الموصل وبمعنى اخر فان كل موصل يمثل **منطقة متساوية الجهد** في الفضاء عندما يكون تحت ظروف ستاتيكية.

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين في الإشارة تفصل بينهما مسافة صغيرة (ℓ) , نفرض ان شحنة قدرها $(-q)$ تبعد مسافة $(\vec{r})$ عن نقطة الاصل وان شحنة قدرها $(+q)$ تبعد مسافة $(\vec{r} + \ell)$ عن نقطة الاصل وكما هو موضح بالشكل , عندئذ يمكن ايجاد المجال الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب عند النقطة P التي تبعد مسافة $(\vec{r})$ عن نقطة الاصل :

والاشارة السالبة ظهرت لان الشحنة الثانية هي سالبة الشحنة (- q) .


$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}^{\prime}-\vec{\ell}|^3}=|\left(\vec{r}-\vec{r}^{\prime}\right)-\vec{\ell}|^{-3}=\left[|\left(\vec{r}-\vec{r}^{\prime}\right)-\vec{\ell}|^2\right]^{-3/2}=\left[|\vec{r}-\vec{r}^{\prime}|^2-2\ell\left(\vec{r}-\vec{r}^{\prime}\right)+\ell^2\right]^{-3/2}$$
$$\frac{1}{\left|(\vec{r}-\vec{r}')-\vec{\ell}\right|^3}=\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{-3}\left[1-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}')\ell}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}+\frac{\ell^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\right]^{-\frac{3}{2}} \quad \text{but } \ell \ll \ll (\vec{r}-\vec{r}')$$
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^{n-1}}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-2}}{3!} + \dots$$

نفرض $x = \frac{-2(\vec{r}-\vec{r}')\ell}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$ و $n=-3/2$ ونستخدم مفكوك نظرية ذي الحدين :

$$\left| (\vec{r} - \vec{r}') - \vec{\ell} \right|^{-3} = \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^{-3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(-2\ell (\vec{r} - \vec{r}'))}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^2} - \frac{3}{2} * \frac{-5}{2} * \frac{1}{2} \left(\frac{-2\ell (\vec{r} - \vec{r}')^{-5/2}}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \right) \right]$$

وبما ان ℓ في البسط في الحد الثاني داخل القوس في الطرف الايمن صغيرة جدا اقل بكثير من $\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|$ لذا يهمل هذا الحد. فتصبح المعادلة :

$$\left| (\vec{r} - \vec{r}') - \vec{\ell} \right|^{-3} = \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^{-3} \left[1 + \frac{3\ell \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^2} \right]$$

نعوض هذه القيمة في معادلة المجال (E) :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(q(\vec{r} - \vec{r}') - q\ell) \left(\frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} + \frac{3\ell (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^5} \right) - \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} + \frac{q(\vec{r} - \vec{r}') \cdot 3\ell (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^5} - \frac{q\ell}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} - \frac{q\ell \cdot 3\ell (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^5} - \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \right] \end{aligned}$$

الحد الاول يختصر مع الحد الاخير ويهمل الحد الرابع لكونه صغير جدا لاحتوائه على ℓ^2 في البسط فتصبح النتيجة :-

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3q\ell \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{q\ell}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \right]$$

بما ان عزم ثنائي القطب dipole moment هو $P = q\ell$

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^5} (\vec{r} - \vec{r}') - \frac{\vec{P}}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} \right]$$

تحفظ هذه المعادلة

ولوكان ثنائي القطب موضوع في نقطة الاصل اي ان : $\vec{r}' = 0$ فتصبح المعادلة بالشكل :-

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{P} \cdot (\vec{r})}{\left| \vec{r} \right|^5} (\vec{r}) - \frac{\vec{P}}{\left| \vec{r} \right|^3} \right]$$

ويمكن حساب الجهد الناشئ عن ثنائي القطب مباشرة من المعادلة :

$$u(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{|(\vec{r} - \vec{r}') - \ell|} - \frac{q}{4\pi \epsilon_o} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi \epsilon_o} \left[\frac{1}{|(\vec{r} - \vec{r}') - \ell|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

بتبسيط المقام في الحد الاول بنفس الطريقة السابقة :-

$$|(\vec{r} - \vec{r}') - \ell|^{-1} = \left[|(\vec{r} - \vec{r}') - \ell|^2 \right]^{-1/2} = \left[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \ell + \ell^2 \right]^{-1/2}$$

$$|(\vec{r} - \vec{r}') - \ell|^{-1} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left[1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\ell^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]^{-1/2}$$

الحد الاخير يهمل لان $(\vec{r} - \vec{r}') \ll \ell$ وباستخدام مفكوك ذي الحدين وتعويض النتائج في معادلة الجهد نحصل على :-

$$u(r) = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \ell}{4\pi \epsilon_o |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \text{but } \vec{P} = q\ell$$

$$u(r) = \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \epsilon_o |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

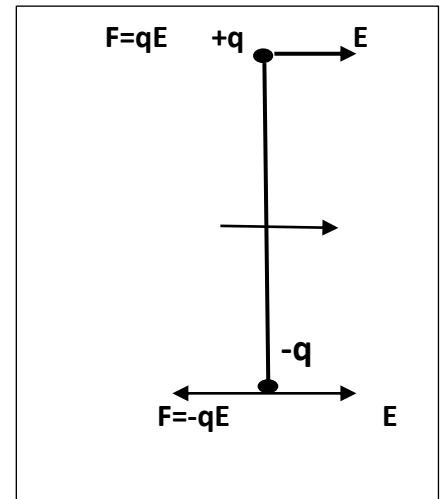
تحفظ هذه المعادلة

فاذا كانت $\vec{r}' = 0$

$$u(r) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_o |\vec{r}|^3}$$

(2 - 12) ثنائي القطب الكهربائي في مجال كهربائي غير منتظم :-

عندما يكون المجال منتظم تكون محصلة القوى مساوية للصفر اي ان $\vec{F} = 0$ كما في الشكل ادناه :

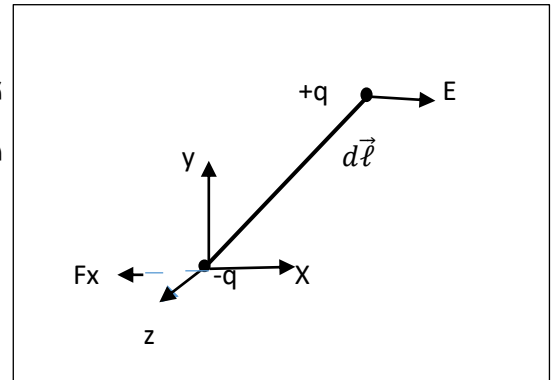


اما عند وضع ثنائي القطب في مجال غير منتظم فيمكن ايجاد القوة المؤثرة حيث نفرض ان نقطة الاصل لنظام الاحداثيات تنطبق على الشحنة السالبة (-q) لثنائي القطب .

$$F = F_{q^+} + F_{q^-} = qE$$

نحسب اولا القوة باتجاه المركبة x . فالقوة المؤثرة على الثنائي القطب الكهربائي في الاتجاه السيني الموجب هي:-

$$\vec{F}_x^+ = q^+(E_x + dE_x)$$



وفي الاتجاه السالب تكون القوة مساوية الى $-qE_x$

لان الشحنة السالبة (- q) تقع في نقطة الاصل توجد مركبة واحدة حيث البعد من نقطة الاصل $r=0$ وعليه تصبح محصلة القوة في اتجاه x تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F}_x = +qdE_x$$

$$\therefore d\vec{E}_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz$$

$$\therefore \vec{F}_x = q \left(dx \frac{\partial E_x}{\partial x} + dy \frac{\partial E_x}{\partial y} + dz \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = q \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) E_x$$

$$but \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad and \quad d\vec{\ell} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

$$\vec{F}_x = q(d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_x \quad but \quad \vec{P} = qd\vec{\ell}$$

$$\therefore \vec{F}_x = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_x$$

وبنفس الطريقة نوجد القوة باتجاه المركبات الاخرى y,z وعليه بصورة عامة فان القوة المؤثرة على ثنائي القطب الكهربائي تعطى بالعلاقة الاتية :-

$$\therefore \vec{F} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

يعطى عزم الازدواج Torque بالعلاقة الاتية :-

$$\vec{\tau} = d\vec{\ell} \times \vec{F} = d\vec{\ell} \times q\vec{E} = qd\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E}$$

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} = PE \sin \theta$$

$$if \vec{P} \parallel \vec{E} \Rightarrow \vec{\tau} = 0$$

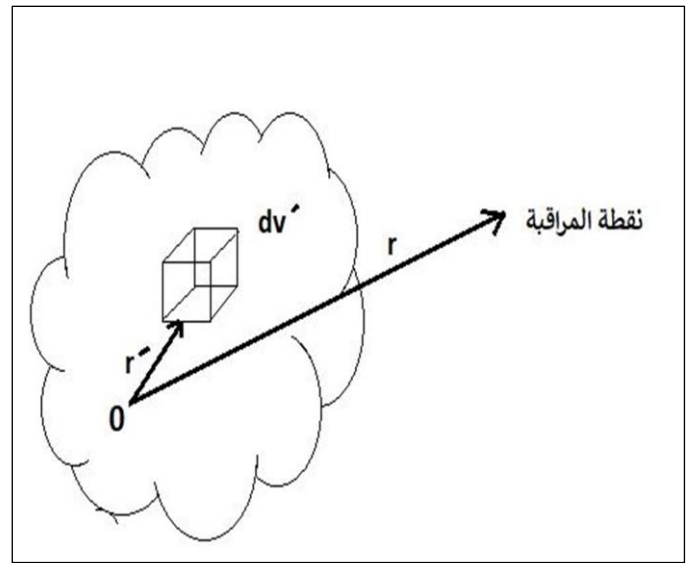
وعليه نستنتج انه لثنائي القطب اذا كان المجال منتظم فان محصلة القوة المؤثرة عليه تساوي صفر وعليه يصبح $\vec{\tau} = 0$ وذلك لأن $\vec{\tau} = d\vec{\ell} \times \vec{F}$.

(2-13) مفكوك متعدد الاقطاب للمجالات الكهربائية : Multipole expansion of electric fields

يظهر من تعريف عزم ثنائي القطب ان جوانبا معينة لتوزيع الجهد الناشئ عن توزيع محدد من الشحنة يمكن التعبير عنها بدلالة عزم ثنائي القطب الكهربائي . وبدلا من التعريف سناخذ مفكوك تعبير معين لجهد كهروستاتيكي ناشئ عن توزيع شحني اعتباطي ولتقليل عدد المحاور الموضعية سناخذ توزيع شحني في المنطقة المجاورة لنقطة الاصل ونفرض ان التوزيع الشحني برمته محصورا داخل كرة نصف قطرها (a) وان نصف القطر صغير مقارنة مع بعد نقطة المراقبة .

لنأخذ نقطة بصورة كيفية داخل التوزيع الشحني ونحدد موقعها بالمتجه $\vec{r}$ ونفرض ان كثافة الشحنة عند هذه النقطة هي $\rho(\vec{r})$ ونقطة المراقبة محددة بالمتجه $\vec{r}$ كما مبين في الشكل ادناه :-

نلاحظ ان الشحنة تشغل الحجم V بكثافة شحنية قدرها $\rho(\vec{r})$ والمطلوب حساب المجال الكهربائي عند نقطة تبعد مسافة r وتعطى بالعلاقة



$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' \dots \dots \dots (1)$$

علما ان dV تمثل عنصر من الحجم داخل توزيع شحني، $\vec{r}'$ يمثل الحجم الذي تشغله الشحنة باجمعها وعلى فرض ان نقطة المراقبة بعيدة عن نقطة الاصل يصبح بالامكان فك الكمية $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ على شكل متوالية ذات اس تصاعدي لـ $\frac{\vec{r}'}{r}$ وبهذا نحصل على :-

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{3}{2} ()^2 + \dots \dots \dots \right\} \dots \dots \dots (2)$$

يمكن اهمال $\left(\frac{\vec{r}'}{r}\right)^2$ مقارنة مع $\left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right)$ من المجموعة الاولى من الكميات المحصورة بين الاقواس وباستعمال معادلة (2) بعد حذف الحدود التي تحتوي على $\vec{r}'^3$ فما فوق تصبح معادلة (1) بالشكل :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\dot{v}} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{r \cdot \dot{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(r \cdot \dot{r})^2}{r^5} - \frac{\dot{r}^2}{r^3} \right] + \dots \right\} \rho(\dot{r}) d\dot{v} \dots \dots \dots (3)$$

وبما ان r مقدار ثابت لايعتمد على $\dot{r}$ يمكن اخراجه خارج علامة التكامل وبهذا تصبح المعادلة :

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{\dot{v}} \rho(\dot{r}) d\dot{v} + \frac{r}{r^3} \int_{\dot{v}} \dot{r} \rho(\dot{r}) d\dot{v} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{X_i X_j}{r^5} \int_{\dot{v}} (3\dot{X}_i \dot{X}_j - \delta_{ij} \dot{r}^2) \rho(\dot{r}) d\dot{v} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

تمثل X_i و X_j المركبات الافقية والشاقولية للمتجه r و $\dot{X}_i, \dot{X}_j$ تمثل المركبات الافقية والشاقولية للمتجه $\dot{r}$.

اما δ_{ij} فهو (Kronecker delta) كرونكر دلتا ويعرف كالتالي :

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ 1 & i = j \end{pmatrix}$$

من المعادلة (4) نلاحظ ان:

التكامل الاول يمثل الشحنة الكلية والحد الاول يمثل الجهد الذي يمكن ان ينشأ فيما لو كانت الشحنة باجمعها مركزة عند نقطة الاصل .

اما التكامل الثاني فإنه يشبه عزم ثنائي القطب الكهربائي ولهذا يدعى ثنائي قطب التوزيع الشحني والحد الثاني من معادلة (4) هو الجهد الذي يمكن ان ينشأ فيما لو كان ثنائي القطب النقطي الذي يساوي عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني واقعا عند نقطة الاصل , ومن المثير ان نلاحظ ان عزم ثنائي قطب التوزيع الشحني مستقل عن نقطة اصل الاحداثيات فيما اذا كانت الشحنة الكلية صفر. ولتحقيق ذلك نأخذ نظاما جديدا للاحداثيات بحيث تقع نقطة الاصل لهذا النظام عند الموضع R في النظام القديم واذا رمزنا لنقطة في النظام القديم بالمتجه $\dot{r}$ وللنقطة نفسها حسب النظام الجديد بالمتجه $\dot{r}'$ لينتج لدينا :

$$\dot{r} = \dot{r}' + R \dots \dots \dots (5)$$

ولهذا يأخذ عزم ثنائي القطب حسب النظام القديم الصيغة التالية:

$$P = \int_{\dot{v}} \dot{r} \rho(\dot{r}) d\dot{v} = \int_{\dot{v}} (r'' + R) \rho(\dot{r}) d\dot{v} = \int_{\dot{v}} r'' d\dot{v} + RQ \dots \dots \dots (6)$$

وهذا مايبثب صحة النص المذكور في اعلاه .

والحد الثالث من المعادلة (4) يمكن كتابته كالآتي :-

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{X_i X_j}{r^5} Q_{ij} \dots \dots \dots (7)$$

حيث ان :

$$Q_{ij} = \int_V (3\hat{x}_i\hat{x}_j - \delta_{ij}\hat{r}^2)\rho(\hat{r}) dv \dots \dots \dots (8)$$

هناك تسع مركبات للكمية Q_{ij} مصاحبة لقيم i و j التي تساوي 1, 2, 3 ومن هذه المركبات التسع يوجد ثلاث مركبات متساوية على شكل أزواج وبهذا يبقى ست مركبات متميزة , هذه المجموعة من الكميات تشكل ما يدعى ممتد (tensor) عزم رباعي القطب (quadrupole moment tensor) وتمثل امتدادا لمفهوم عزم ثنائي القطب وبطبيعة الحال هناك عزم ذات رتب اعلى ناشئة عن الحفاظ على الحدود ذات الرتب العالية عند فك المعادلة (4).

ان متعددة الاقطاب ذات الرتب العالية مهمة في الفيزياء النووية وتستعمل متعددة الاقطاب الكهربائية حسبما تشير معادلة (4) لتقريب المجال الكهربائي الناشئ عن توزيع شحني وهناك استعمالات اخرى ولكنها جميعا تقع في نطاق تقريب توزيع شحني حقيقي متصل الى شحنات نقطية وثنائيات اقطاب نقطية وهذا ما يجعل حل المسائل المعقدة جدا ممكنا .

اسئلة الفصل الثاني

س1/ كرة نصف قطرها R ملئت بالشحنة بأسلوب ما , فاذا كان المجال لهذه المنطقة $\vec{E} = \frac{E_0}{R} |\vec{r}| \vec{r}$ حيث E_0 ثابت و R متجه من مركز هذه الكرة اوجد تعبيراً للكثافة الحجمية ؟

الجواب / باستخدام الصيغة التفاضلية لقانون كاوس :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

بتعويض معادلة المجال المعطاة بالسؤال نحصل على:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{E_0}{R} |\vec{r}| \vec{r} \right] = \frac{\epsilon_0}{R} E_0 \vec{\nabla} \cdot |\vec{r}| \vec{r}$$

بأستخدام المتطابقة :- $\vec{\nabla} \cdot \phi \vec{A} = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi$, let $\phi = |\vec{r}|$, and $\vec{A} = \vec{r}$

$$\vec{\nabla} \cdot |\vec{r}| \vec{r} = |\vec{r}| \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r}|, \text{ but } \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad \text{and } \vec{\nabla} |\vec{r}| = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot |\vec{r}| \vec{r} = 3|\vec{r}| + \vec{r} \cdot \hat{r} = 3|\vec{r}| + \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = 3|\vec{r}| + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|} = 4|\vec{r}|$$

$$\therefore \rho = \frac{4\epsilon_0 E_0}{R} |\vec{r}|$$

س2/ اذا كان الجهد لتوزيع كروي للشحنة معطى بالعلاقة $u(r) = K \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ حيث α, K ثوابت جد المجال الكهربائي .

الجواب / من العلاقة:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}u(r) = -\frac{du(r)}{dr} = -K \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) = -K \left(\frac{r e^{-\alpha r} (-\alpha) - e^{-\alpha r}}{r^2} \right) \\ &= K \left(\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r} + \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} \right) = K e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = K e^{-\alpha r} \left(\frac{r\alpha + 1}{r^2} \right) \\ \therefore \vec{E} &= K e^{-\alpha r} \left(\frac{1 + \alpha r}{r^2} \right)\end{aligned}$$

س3/ تتوزع الشحنة على كرة (نصف قطرها R) بكثافة شحنة حجمية متجانسة , جد المجال والجهد الكهربائي للحالات الاتية: 1- نقطة خارج الكرة على بعد r من المركز $r > R$ 2- نقطة داخل الكرة حيث $r < R$

الجواب/

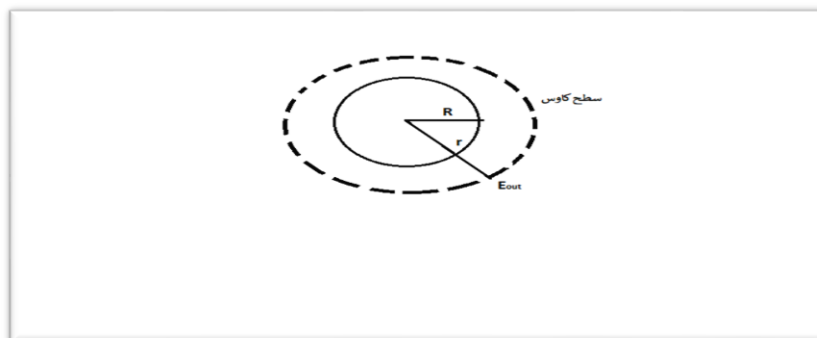
1-) $r > R$ من قانون كاوس :-
 $\oint \vec{E}_{out} \cdot \vec{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}, \Rightarrow E_{out} \oint da = \frac{q}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$

$$but: q = \int \rho dV$$

والحجم بالاحداثيات الكروية يعطى بالعلاقة التالية : $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$$\therefore q = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \rho \left[\frac{R^3}{3} - 0 \right] [-\cos\theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi}$$

$$q = \rho \left[\frac{R^3}{3} \right] [-(-1) + 1] (2\pi) = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \dots \dots \dots (2)$$



المساحة السطحية للكرة (سطح كاوس) هو (a) حيث : $a = \oint da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$

بتعويض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :- المجال خارج الكرة

$$\vec{E}_{out} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi \rho R^3}{\epsilon_0}, \Rightarrow E_{out} = |\vec{E}_{out}| = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

من المعادلة الاخيرة نلاحظ ان : $E_{out} \propto \frac{1}{r^2}$

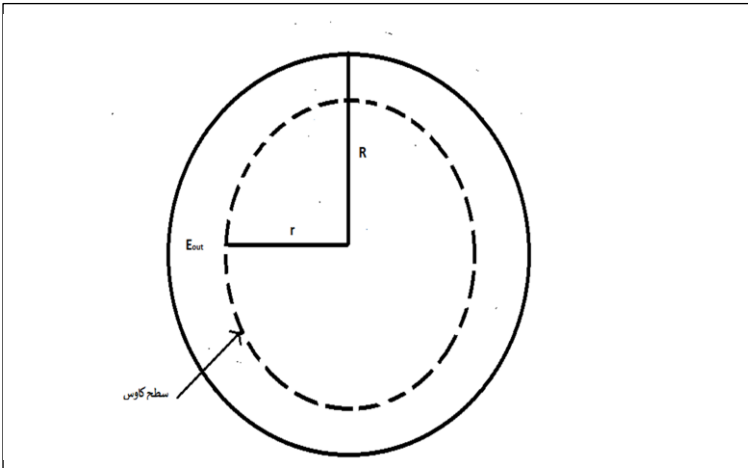
اما الجهد الكهربائي اللازم لتقريب شحنة نقطية من المالا نهاية الى سطح كاوس يساوي u_{out} ويحسب كالاتي:

$$u_{out} = - \int_{\infty}^r |\vec{E}_{out}| dr = - \int_{\infty}^r \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) dr = \frac{-\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right]$$

اذن الجهد الكهربائي لنقطة خارج الكرة هي:

$$u_{out} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \quad u_{out} \propto \frac{1}{r}$$

2) $r < R$



بتطبيق قانون كاوس :-

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot n da = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{q}{\epsilon_0} \dots\dots(1)$$

حيث q هي جزء من الشحنة الكلية للكرة وهي ذلك الجزء الموجود ضمن الحجم المحدد بسطح كاوس (داخل سطح كاوس فقط) ويساوي :

$$q = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 \dots\dots\dots(2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots\dots\dots(3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}| 4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi \rho r^3\right)}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}_{in}| = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}, \quad E_{in} \propto r$$

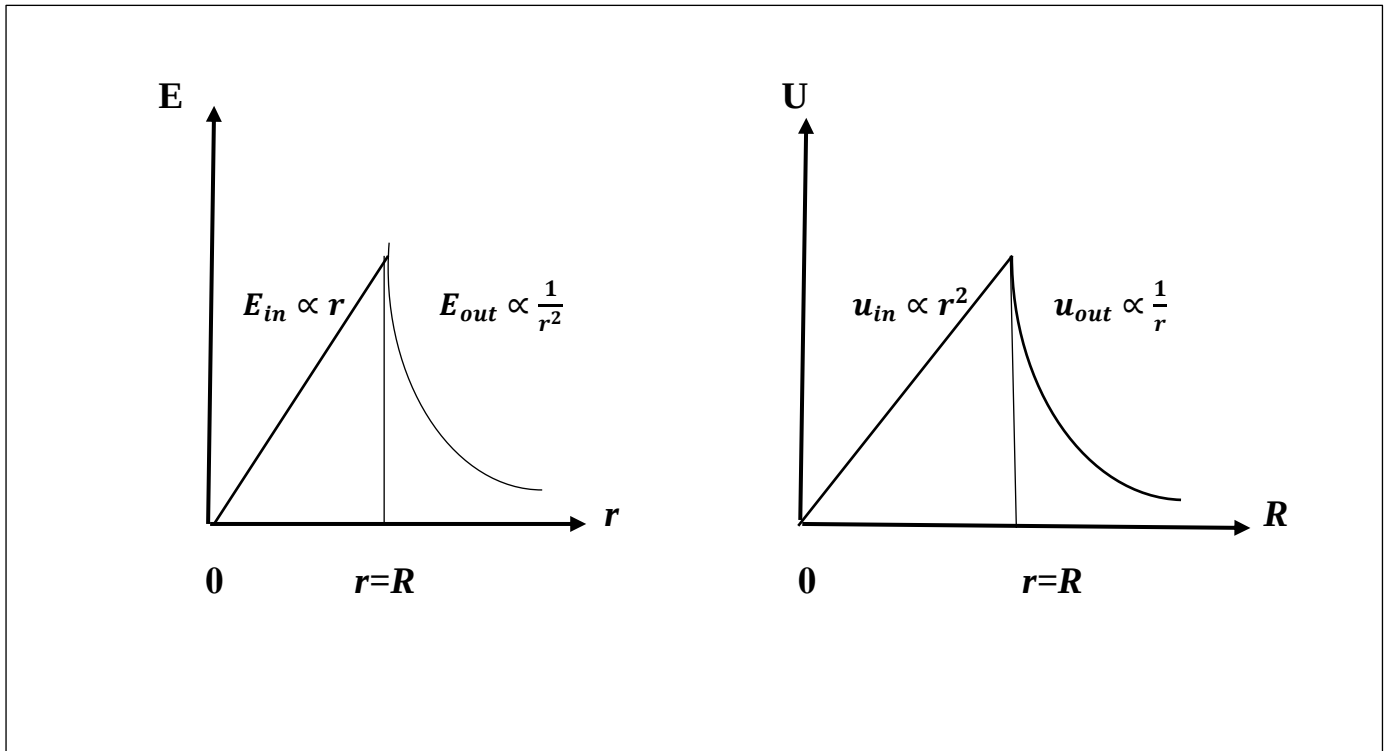
ولايجاد الجهد الكهربائي داخل الكرة فإنه يساوي الجهد اللازم لنقل شحنة اختبارية من المالا نهاية الى R والجهد اللازم لنقلها من R الى r وعليه:

$$u_{in} = - \int_{\infty}^R |E_{out}| dr - \int_R^r |E_{in}| dr$$

$$\begin{aligned} u_{in} &= - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \int_R^r r dr = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \left[-\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right] - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right] = \frac{\rho R^2}{3 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} \\ &= \frac{2\rho R^2 - \rho r^2 + \rho R^2}{6 \epsilon_0} = \frac{3\rho R^2 - \rho r^2}{6 \epsilon_0} = \frac{\rho}{6 \epsilon_0} [3R^2 - r^2] \end{aligned}$$

$$\text{or: } u_{in} = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \left[R^2 - \frac{r^2}{3} \right] \quad U_{in} \propto r^2$$

يمكن توضيح العلاقة بين E و u مع r بالمخططات الآتية:



س4/ توزيع شحني كروي يمتلك كثافة شحنية كدالة الى r فقط حيث $\rho = \frac{A}{r}$ جد المجال الكهربائي والجهد :

1- خارج الكرة حيث $r > R$.

2- داخل الكرة حيث $r < R$.

الجواب/ نفس الرسوم في السؤال السابق .

$$1) \oint \vec{E} \cdot \vec{n} da = \vec{E}_{out} \oint da = \frac{q}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

$$but: q = \int_0^R \rho dV, \text{ and } \rho = \frac{A}{r}, \quad dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$\therefore q = \int_0^R \frac{A}{r} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = A \left[\frac{R^2}{2} - 0 \right] [-\cos\pi + \cos 0] [2\pi - 0]$$

$$\therefore q = 2\pi AR^2 \dots \dots \dots (2)$$

ولسطح كاوس نحسب المساحة السطحية له:

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في (1)

$$|\vec{E}_{out}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi AR^2}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}_{out}| = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2}$$

$$u(r)_{out} = - \int \vec{E}_{out} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r E_{out} dr = - \int_{\infty}^r \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^r$$

$$u(r)_{out} = \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right] = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r}$$

2) $r < R$

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot \vec{n} da = \frac{\dot{q}}{\epsilon_0} = |\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{\dot{q}}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \int_0^r \frac{A}{r} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = A \frac{r^2}{2} \Big|_0^r [-\cos\pi + \cos 0] (2\pi) \\ &= \frac{Ar^2}{2} (-(-1) + 1)(2\pi) = 2\pi Ar^2 \end{aligned}$$

$$\dot{q} = 2\pi Ar^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$a = \oint da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|\vec{E}_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi Ar^2}{\epsilon_o}$$

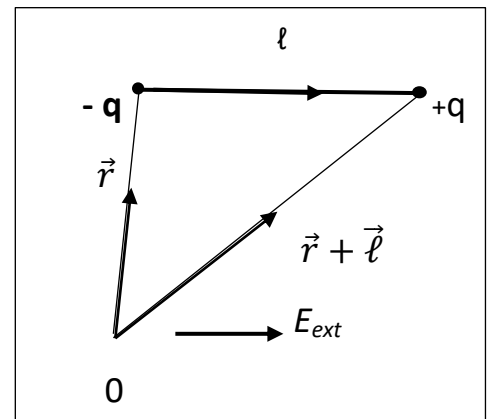
$$\therefore |\vec{E}_{in}| = \frac{A}{2\epsilon_o}$$

$$\begin{aligned} u_{in} &= - \int_{\infty}^R |\vec{E}_{out}| dr - \int_R^r |\vec{E}_{in}| dr = - \int_{\infty}^R \left(\frac{AR^2}{2\epsilon_o r^2} \right) dr - \int_R^r \frac{A}{2\epsilon_o} dr \\ &= - \frac{AR^2}{2\epsilon_o} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} - \frac{A}{2\epsilon_o} \int_R^r dr = - \frac{AR^2}{2\epsilon_o} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R - \frac{A}{2\epsilon_o} [r]_R^r \\ &= \frac{AR^2}{2\epsilon_o} \frac{1}{R} - \frac{A}{2\epsilon_o} (r - R) = \frac{AR}{2\epsilon_o} - \frac{Ar}{2\epsilon_o} + \frac{AR}{2\epsilon_o} = \frac{2AR}{2\epsilon_o} - \frac{Ar}{2\epsilon_o} \\ &= \frac{A}{2\epsilon_o} (2R - r) \Rightarrow u_{in} = \frac{A}{2\epsilon_o} (2R - r) \end{aligned}$$

س5/ جد الطاقة الكامنة لثنائي القطب الكهربائي عندما يوضع في مجال كهربائي منتظم (E_{ext}).

$$\therefore u = \frac{\omega}{q}$$

الجواب/



$$\omega = -qu_{ext}(r) + qu_{ext}(r + \ell) \dots \dots \dots (1)$$

حيث ω هي الطاقة الكامنة potential energy , اذا كانت $\vec{r} \ll \vec{\ell}$ نستخدم قانون متسلسلة القوى power series كالاتي:

$$u_{ext}(\vec{r} + \vec{\ell}) = u_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}) \dots \dots \dots (2) \quad \text{حفظ}$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) :-

$$\therefore \omega = -q u_{ext}(\vec{r}) + q u_{ext}(\vec{r}) + q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}) = q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}), \quad \text{but: } \vec{P} = q \vec{\ell}$$

$$\omega(\vec{r}) = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} u_{ext}(\vec{r}), \quad \text{but: } \vec{E} = -\nabla u, \quad E_{ext}(\vec{r}) = -\nabla u_{ext}(\vec{r})$$

$$\therefore \omega(\vec{r}) = -\vec{P} \cdot \vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

حيث المجال الخارجي $E_{ext}(\vec{r})$ ناشئ عن شحنات غير الشحنتين المكونتين لثنائي القطب .

س 6 / بين ان القوة المؤثرة على ثنائي القطب في مجال كهربائي خارجي $E_{ext}(\vec{r})$ تعطى بالعلاقة :-

$$\vec{F} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}$$

الجواب / نفس الرسم في السؤال السابق

$$\vec{F} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q}, \quad \text{and } \vec{F} = q \vec{E}$$

$$\vec{F} = +q \vec{E}_{ext}(\vec{r} + \vec{\ell}) - q \vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots \dots \dots (1), \quad \text{but, } \vec{\ell} \ll \vec{r}$$

حسب قانون متسلسلة القوى:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r} + \vec{\ell}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r}) \dots \dots \dots (2)$$

نعوض معادلة (2) في معادلة (1) نحصل على:-

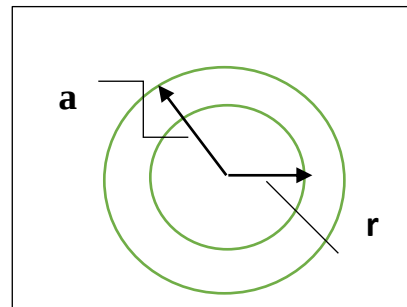
$$\vec{F} = q \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r}) - q \vec{E}_{ext}(\vec{r}) = q \vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

$$\text{as: } \vec{P} = q \vec{\ell}, \quad \therefore \vec{F} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

س 7 / شحنة كروية نصف قطرها (a) كثافة شحنتها تتغير وفق العلاقتين :-

$$1- \rho_1 = \rho_o \left(\frac{a}{r} \right) \quad 2- \rho_2 = \rho_o \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \text{اوجد المجال الكهربائي الداخلي لكلا الحالتين .}$$

الجواب /



$$\oint \vec{E}_{in} \cdot \vec{n} da = \frac{q_1}{\epsilon_o}$$

$$|\vec{E}_{in}| \oint da = \frac{q_1}{\epsilon_o} \dots \dots \dots (1)$$

$$q_1 = \int \rho_1 dV = \int_0^r \rho_o \left(\frac{a}{r} \right) r^2 dr + \int_0^\pi \sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{a\rho_o r^2}{2} (4\pi)$$

$$q_1 = 2\pi a \rho_o r^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\oint da = a = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض معادلة (2) و (3) في معادلة (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{2\pi \rho_o a r^2}{\epsilon_o} \Rightarrow E_{in} = \frac{\rho_o a}{2 \epsilon_o}$$

$$|E_{in}| \oint da = \frac{q_2}{\epsilon_o} \dots \dots \dots (1) \quad \text{وللحالة الثانية :}$$

$$q_2 = \int \rho_2 dV = \int_0^r \rho_o \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) r^2 dr + \int_0^\pi \sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\int_0^r \rho_o r^2 dr - \int_0^r \rho_o a^2 dr \right] (4\pi)$$

$$q_2 = \left[\frac{\rho_o r^3}{3} - \rho_o a^2 r \right] (4\pi) = 4\pi \rho_o \left[\frac{r^3}{3} - a^2 r \right] = 4\pi r^2 \rho_o \left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r} \right] \dots \dots \dots (2)$$

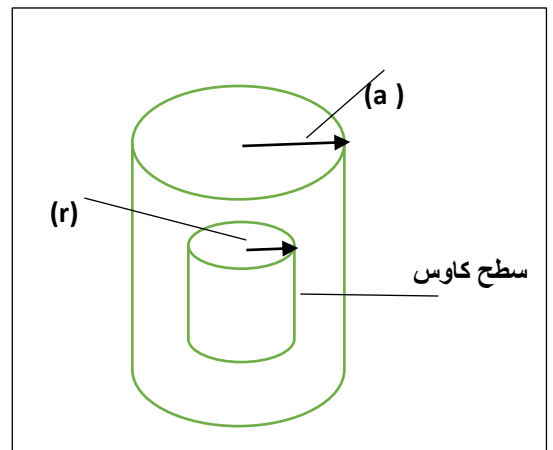
$$\oint da = 4\pi r^2 \dots \dots \dots (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}|(4\pi r^2) = \frac{4\pi r^2 \rho_o \left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r} \right]}{\epsilon_o}, \Rightarrow |E_{in}| = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left[\frac{r}{3} - \frac{a^2}{r} \right]$$

س 8 / توزيع شحني لاسطوانة لانهاية الطول ذات نصف قطر a وكثافة شحنة $\sigma = \frac{3q(a-r)}{\pi a^3}$ والتي تكون على بعد $r < a$ احسب المجال الكهربائي.

الجواب / بما ان $r < a$ اذن المطلوب حساب المجال الكهربائي الداخلي .



$$\oint E_{in} \cdot dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0}$$

$$|E_{in}| \oint dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0} \dots \dots \dots (1) \quad , \quad q_{tot} = \int_0^r \sigma da$$

المساحة بالاحداثيات الاسطوانية : $da = r dr d\phi$

$$\begin{aligned} \therefore q_{tot} &= \int_0^r \sigma r dr \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^r \frac{3q(a-r)}{\pi a^3} r dr (2\pi) = \frac{6q}{a^3} \left[\int_0^r ar dr - \int_0^r r^2 dr \right] \\ &= \frac{6q}{a^3} \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{3qr^2}{a^2} - \frac{2qr^3}{a^3} = \frac{qr^2}{a^3} (3a - 2r) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\oint dS = S = 2\pi r a \dots \dots \dots (3)$$

تعويض (2) و (3) في (1) نحصل على :-

$$|E_{in}| (2\pi r a) = \frac{qr^2}{a^3 \epsilon_0} (3a - 2r) \Rightarrow |E_{in}| = \frac{qr(3a - 2r)}{2\pi a^4 \epsilon_0}$$