(1 -1) تعاريف :- Definition

ان استخدام تحليل المتجهات في موضوع الكهربائية والمغناطيسية يوضح الافكار الفيزيائية التي تتضمنها المعادلات الرياضية وللتعرف على عدد من المفاهيم الاساسية ، اليكم بعض التعاريف .

تقسم الكميات الفيزيائية الى نوعين :-

1- كميات متجهة vectors:- تعرف الكمية الاتجاهية على انها تلك الكمية التي تميز كليا بمقدارها واتجاهها مثل السرعة، والتعجيل، والقوة والمجال الكهربائي.

2- كميات لامتجهة (عددية) scalars:- وهي تلك الكمية التي تميز كليا بمقدارها فقط مثل درجة الحرارة،والكثافة ، والطول والحجم.

متجهات الوحدة المتعامدة : unit vectors

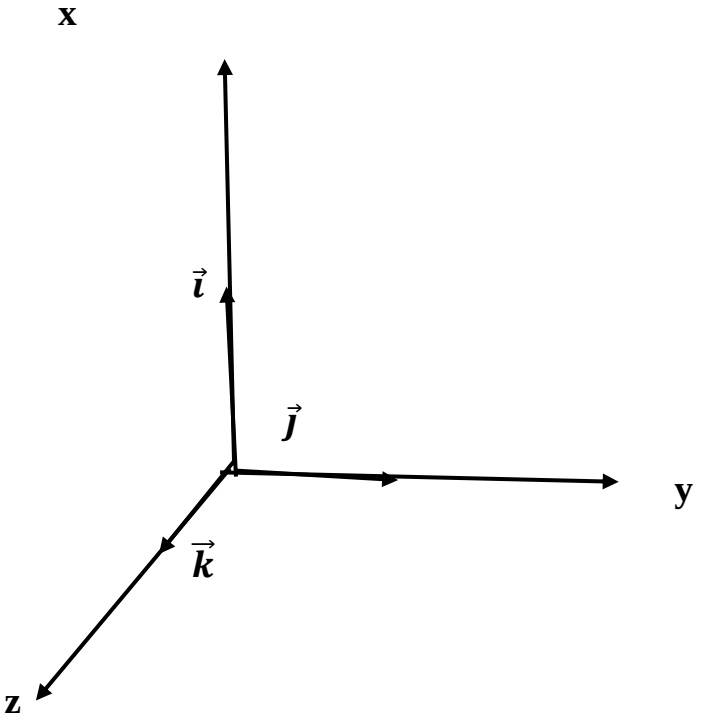
ومقدارها وحدة واحدة وتكتب ($\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}$) وهي باتجاه المحاور الديكارتية او الكارتيزية (x,y,z) على الترتيب .

المقدار scalar	الاتجاه vector	وحدة المتجه
$\|\vec{\imath}\|$	$\vec{\imath}$	$\hat{\imath}$
$\|\vec{j}\|$	$\vec{j}$	$\hat{j}$
$\|\vec{k}\|$	$\vec{k}$	$\hat{k}$

$$\hat{\imath} = [1,0,0]$$

$$\hat{j} = [0,1,0]$$

$$\hat{k} = [0,0,1]$$



مركبات المتجه :

حسب نظام الاحداثيات الديكارتية يحدد المتجه بثلاث مركبات باتجاه الاحداثيات (x , y , z) ، لو فرضنا انه لدينا المتجه $\vec{A}$ فيكون له ثلاث مركبات هي :-

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$or \quad \vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

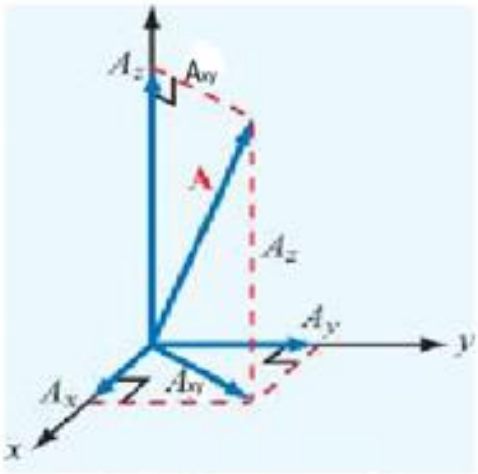
$$or \quad \vec{A} = \vec{\imath}|\vec{A}_x| + \vec{\jmath}|\vec{A}_y| + \vec{k}|\vec{A}_z|$$

حيث :-

$$A_x = |\vec{A}_x| \, , A_y = |\vec{A}_y|, A_z = |\vec{A}_z|$$

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

ومن الشكل التالي:-



$$\vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \, , \qquad \vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z \qquad \therefore \ \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

(2-1) جبر المتجهات :- *Vector algebra*

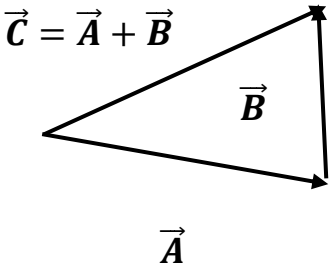
1- جمع وطرح المجهات :

يعرف حاصل جمع متجهين بأنه المتجه الذي تكون مركباته مساوية لمجموع المركبات المناظرة للمتجهين الاصليين .

مثال :- اذا كان المتجه $\vec{C}$ مساويا لمجموع المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ فان :

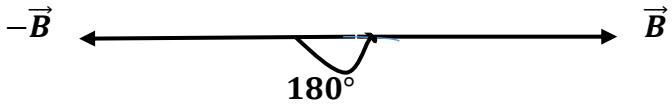
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B},$$

$$\vec{C}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x, \qquad \vec{C}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y, \qquad \vec{C}_z = \vec{A}_z + \vec{B}_z$$



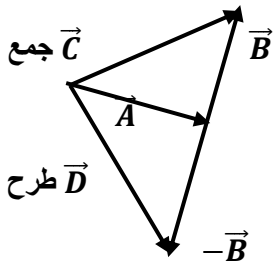
ويعرف طرح المتجهات بدلالة القيمة السالبة للمتجه .

المتجه السالب :- هو المتجه الذي تكون مركباته مساوية للمركبات المناظرة للمتجه الاصلي ولكن باشارة سالبة اي يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه والزاوية بينهما ($180°$) .



وعليه تعرف عملية طرح المتجهات على انها جمع المتجه السالب اي ان :

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



وبما ان جميع الاعداد الحقيقية تمتلك خاصية الترافق (*associative*) فان عمليات الجمع والطرح للمتجهات تمتلك خاصية الترافق ايضا وبناء عليه لاحاجة للاقواس عند جمع وطرح المتجهات اي ان :-

$$\vec{A} + (\vec{c} + \vec{B}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

اذا كان لدينا متجهين يلتقي راسيهما بنقطة واحدة فعند جمع او طرح المتجهين نلاحظ الزاوية بينهما :

أ- اذا كانت الزاوية بينهما حادة نستخدم قانون الجيب تمام لايجاد المحصلة بينهما

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2AB\cos\theta$$

ب- واذا كانت الزاوية منفرجة بصبح قانون جيب التمام كالاتي :

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 - 2AB\cos\theta$$

ج - واذا كانت $\theta = 90°$ نستخدم قانون فيثاغورس

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2 \qquad as\ \theta = 90°\ and\ cos90 = 0$$

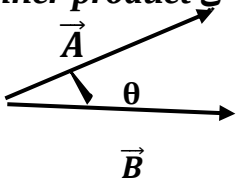
2- ضرب المتجهات :- Vector Product

أ- ضرب المتجه بمقدار عددي :- ويكون ناتج هذه العملية متجها , تمتاز كل مركبة من مركباته بانها تساوي حاصل ضرب الكمية العددية بالمركبة المناظرة للمتجه الاصلي اي ان :-

$$\vec{C} = A\vec{B} = A\vec{B}_x + A\vec{B}_y + A\vec{B}_z \quad as \quad \vec{C}_x = A\vec{B}_x, \quad \vec{C}_y = A\vec{B}_y, \quad \vec{C}_z = A\vec{B}_z$$

ب- ضرب متجهين :- ويكون على نوعين

اولا : الضرب العددي dot product : وله تسميات اخرى مثل الضرب العددي scalar product او الضرب الداخلي inner product ويكون الناتج النهائي لهذه العملية هو كمية عددية غير متجه .



$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

ويكون الناتج كمية غير متجهة حيث :

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z \quad and \quad \vec{B} = \vec{\imath}B_x + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad as \quad \vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1, \quad \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\jmath} = 0$$

لانه عندما $\cos\theta = 1$, $\theta = 0$ اي متوازيان . وعندما تكون متعامدتان اي $\cos\theta = 0$, $\theta = 90$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}, \quad \vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

ثانيا :- الضرب الاتجاهي vector product , او التتابع التقاطعي cross product او التتابع الخارجي outer product :-

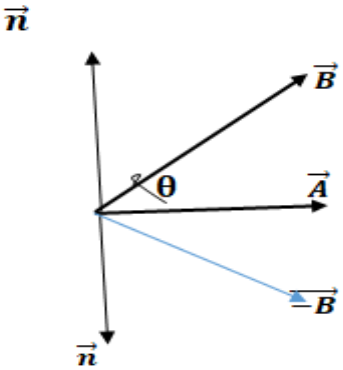
ويكون الناتج كمية متجهة ويكتب بالشكل : $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\vec{n}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\vec{n}, \quad as \quad \vec{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{AB\sin\theta}$$

اي ان الناتج هو حاصل ضرب مقدار كل من المتجهين بالاخر بجيب الزاوية المحصورة بين المتجهين الاصليين ، علما ان الاتجاه يؤخذ حسب قاعدة اليد اليمنى .

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad \vec{B} \times \vec{A} = |\vec{B}||\vec{A}|\sin\theta\,\vec{n}$$

حيث ان اتجاه $\vec{n}$ في هذه الحالة باتجاه الاسفل حسب قاعدة اليد اليمنى.



$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\vec{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$where\quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

$$where\ \theta=0\ ,\sin\theta=0\ ,\qquad then\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$if\ \vec{A}\times\vec{B}=0\implies \vec{A}\parallel\vec{B}\qquad and\qquad if\ \vec{A}.\vec{B}=0\implies \vec{A}\perp\vec{B}$$

وهناك حالتان مرتبطتان بالضرب العددي والاتجاهي وهما :

1- الضرب الثلاثي العددي *Triple scalar product*

وهو كمية عددية وتحصل عملية الضرب بالصيغة التالية :

$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A}).\vec{B}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=-(\vec{C}\times\vec{B}).\vec{A}$$

ومن السهل التعبير عن حاصل الضرب الثلاثي للمتجهات بدلالة مركباتها المتعامدة بالشكل التالي:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$
$$=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)+A_z(B_xC_y-B_yC_x)$$

وتبعا للمحدد (المصفوفة) التالي:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=-\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})$$

ولاضرورة لوضع الاقواس هنا حيث ان ناتج الضرب لايتغير بالتبديل الدوري للمتجهات الثلاثة ولابتبديل موضع النقطة (.) او (×)

2- الضرب الاتجاهي الثلاثي : *Triple vector product*

وهي كمية متجهة وتأخذ الصيغة:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{i}B_x+\vec{j}B_y+\vec{k}B_z)(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)$$

$$-(\vec{i}C_x+\vec{j}C_y+\vec{k}C_z)(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)$$

ويطلق على هذه القاعدة اسم " *back cab rule* " ووضع الاقواس هنا ضروري حيث بدونه تكون عملية الضرب غير معرفة

(1- 3) تفاضل المتجهات :-

1- الانحدار (الميل) : *Gradient*

$$\vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: هي مشتقة اتجاهية يقصد بها تغير الدالة باتجاه معين .

اذا دخل متجه الانحدار على كمية عددية مثل الجهد $(\emptyset)$ اصبح الناتج كمية متجهة :

$$\vec{\nabla}\emptyset = \vec{\imath}\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial \emptyset}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \emptyset}{\partial z} = grad\ \emptyset$$

اي ان انحدار دالة غير متجهة (*scalar*) مثل الجهد تصبح كمية متجهة مقداره يساوي ذروة المشتقة الاتجاهية عند نقطة معينة واتجاهه يكون بنفس اتجاه ذروة المشتقة الاتجاهية عند تلك النقطة .

2- التباعد : *Divergence*

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج عدديا مثل

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = div\ \vec{A} = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ويمثل التباعدغاية التكامل السطحي لوحدة الحجم عندما يقترب الحجم من الصفر اي ان:

$$div\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{F}.\vec{n}da$$

3- الالتفاف او الدوران : Curl

ويدخل على الكمية المتجهة فيصبح الناتج متجها مثل

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = curl\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$curl\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{n}\times\vec{F}da$$

4- مؤثر لابلاس : *The Laplacian operator*

وتمثل عملية مزدوجة من تباعد وانحدار مثل:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = div\ grad = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

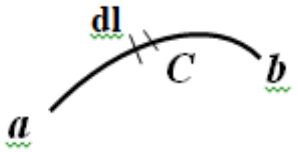
(4-1) تكامل المتجهات : Vectors integration

1- التكامل الخطي : line integration

وناتج التكامل كمية عددية . والتكامل هنا يعتمد على بداية ونهاية المنحني وكذلك على المنحني C.

فاذا كان المسار مفتوح اي المنحني مفتوح فيعبر عنه بالعلاقة:

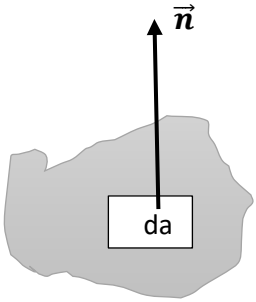
$$\int_a^b \vec{A}.d\vec{\ell} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} A.\Delta\ell$$



حيث a, b تمثل بداية ونهاية المنحني على التوالي ويشير c المنحني الذي ينجز عليه التكامل الخطي . اما اذا كان المسار مغلق (منحني مغلق) فيعبر عنه بالشكل الاتي : $\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}$

2- التكامل السطحي : Surface integration

$$\int_S \vec{A}.\vec{n}da = \int_S \vec{A}.d\vec{S}$$



سطح (S)

تمثل (da) مساحة صغيرة جداعلى السطح (S) الذي تنجز عليه عملية التكامل و $\vec{n}$ وحدة متجه عمودية على da واتجاهها يحدد بقاعدة اليد اليمنى right hand rule . اما اذا السطح مغلق فيكتب بالشكل : $\oint_S \vec{A}.\vec{n}da$

3- التكامل الحجمي : *Volume integral*

ويعبر عنه بالشكل التالي:

$$\int_V \vec{A}.d\vec{V} = \int \vec{A}dxdydz = \vec{A}\int dxdydz$$

(1- 5) النظريات الخاصة بالمتجهات

1- نظرية التباعد : Divergence theorem

ان تكامل تباعد متجه خلال حجم (V) يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية للمتجه على السطح الذي يضم الحجم (V) اي ان:

$$\int_V div\vec{F}dV = \int_V \vec{\nabla}.\vec{F}dV = \oint_S \vec{F}.\vec{n}da = \oint_S \vec{F}.d\vec{S}$$

وهي علاقة بين التكامل السطحي والحجمي

2- نظرية ستوك : *Stock's theorem*

وهي علاقة بين التكامل السطحي والخطي وتنص على ان :- التكامل الخطي لمتجه حول مسار مغلق يساوي تكامل المركبة العمودية لالتفاف المتجه على اي سطح محاط بالمسار، اي ان:

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{\ell} = \int_S curl\,\vec{F}.\vec{n}da = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}.\vec{n}da$$

حيث C يمثل المنحني المغلق المحيط بالسطح S

(1-6) الاحداثيات :- *Coordinates*

هناك ثلاثة احداثيات مستخدمة هي :

1- الاحداثيات الديكارتية (الكارتيزية) *Cartesian Coordinates*

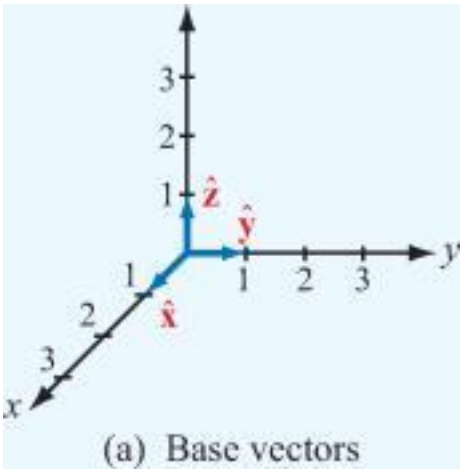
وتمثل الاحداثيات التي اوجدها العالم الفرنسي ديكارت

الاحداثيات = x,y,z ، المساحة $=da=dxdy$ ، الحجم $dV=dxdydz =$

$$grad\,\vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

مؤثر لابلاس هو:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

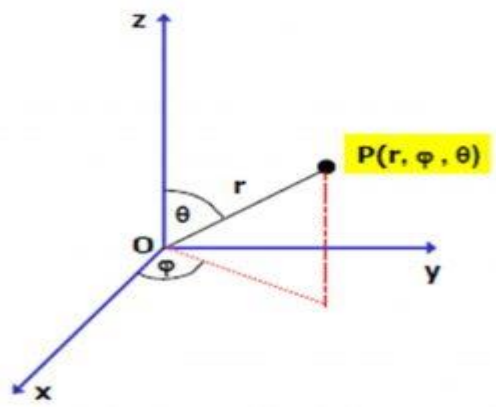


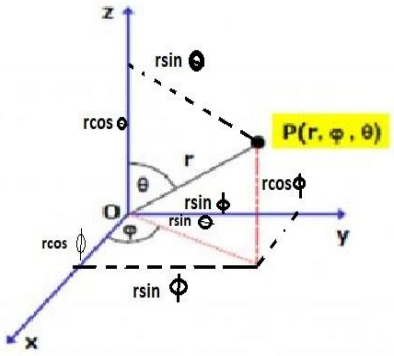
(a) Base vectors

2- الاحداثيات الكروية : Spherical coordinates

الاحداثيات = $r, \theta, \emptyset$ ، المساحة = da = $r^2 \sin\theta \, d\theta d\emptyset$ ، الحجم = dV = $r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\emptyset$

$$x = r\sin\theta\cos\emptyset, \quad y = r\sin\theta\sin\emptyset, \quad z = r\cos\theta$$





حيث θ تمثل الزاوية القطبية ، r يمثل مقدار متجه نصف القطر من نقطة الاصل .

$$grad\,\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\emptyset}\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial\emptyset}$$

ومؤثر لابلاس هو:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\emptyset^2}$$

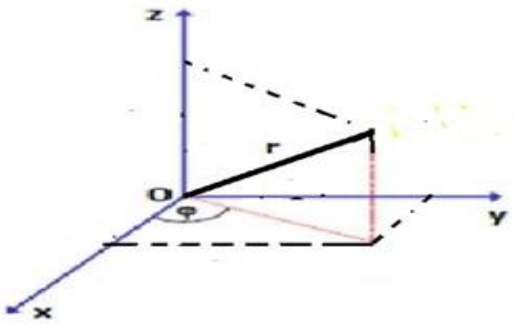
3- الاحداثيات الاسطوانية :- Cylindrical coordinates

الاحداثيات = $r, \emptyset, z$ ، المساحة = $da = rdrd\emptyset$ ، الحجم = dV = $rdrd\emptyset dz$

$$grad\,\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\emptyset}\frac{\partial}{\partial\emptyset} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\emptyset^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$x = rcos\emptyset, \quad y = rsin\emptyset, \quad r = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$



(1- 7) صيغ (متطابقات) مهمة من تحليل المتجهات :-

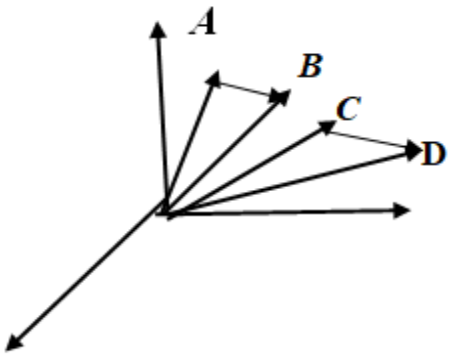
لو كان لدينا C, B, ψ, F دوال متجهة ولدينا ϕ, γ دوال عددية فان :-

$$1- \ \nabla(\psi+\gamma)=\nabla\psi+\nabla\gamma$$
$$2- \ \nabla(\psi\gamma)=\psi\nabla\gamma+\gamma\nabla\psi$$
$$3- \ \nabla.(B+C)=\nabla.B+\nabla.C$$
$$4- \ \nabla\times(B+C)=\nabla\times B+\nabla\times C$$
$$5- \ \nabla.(B.C)=(B.\nabla)C+(C.\nabla)B+Bx(\nabla xC)+Cx(\nabla xB)$$
$$6- \ (B.\nabla)C=\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)C$$
$$7- \ \nabla.(\gamma B)=\gamma\nabla.B+B\nabla.\gamma$$
$$8- \ \nabla\times(\gamma B)=\gamma\nabla\times B+\nabla\gamma\times B=\gamma\nabla\times B+B\times\nabla\gamma$$
$$9- \ \nabla\times\nabla\gamma=0, \qquad always\ curl\ grad\gamma=0$$

Problems مسائل

س1/ اذا علمت ان المتجهات $\vec{D}=\hat{k}-\hat{\jmath}$ ، $\vec{C}=3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-2\hat{k}$، $\vec{B}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ ، $\vec{A}=\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$ تشير الى النقاط A, B, C, D ابتداءا من نقطة الاصل، اثبت ان الخطين AB و CD متوازيان ثم جد النسبة بين طوليهما .

الجواب/ من الرسم ادناه



$$\vec{B}+\overrightarrow{AB}=\vec{A}$$
$$\overrightarrow{AB}=\vec{A}-\vec{B}=(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})-(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath})=-\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}$$
$$\overrightarrow{CD}=\vec{C}-\vec{D}=(3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-2\hat{k})-(\hat{k}-\hat{\jmath})=3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-3\hat{k}$$
$$if\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=0, \qquad then\ \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&-2&1\\3&6&-3\end{vmatrix}=\hat{\imath}(6-6)+\hat{\jmath}(3-3)+\hat{k}(-6+6)=0$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|sin\theta=0\ ,\ \ i.e\ sin\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=0\ ,\ \ \therefore\theta=0\implies\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$$
$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt[2]{1+4+1}}{\sqrt[2]{9+36+9}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$$

س2/ اثبت ان المتجهين $\vec{A} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}, \quad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ متعامدان.

الجواب/

$$if\ \vec{A}.\vec{B} = 0, \implies \vec{A} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}).(4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}) = 4 + 8 - 12 = 0$$

$$\vec{A}.\vec{B} = AB cos\theta \implies cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{zero}{AB} = 0, \quad \therefore \theta = 90 \implies \vec{A} \perp \vec{B}$$

س3/ اثبت ان: $Prove \quad \vec{\nabla}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$

الجواب/

$$\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z \quad and \quad |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = (\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.2x\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.2y\right] + \hat{k}\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.2z\right]$$

$$= \frac{\hat{\imath}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\hat{\jmath}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{(\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$$

س4/ اثبت ان : $Prove\ that\ \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$

الجواب/

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = (\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \hat{\imath}\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}.2x\right] + \hat{\jmath}\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}.2y\right]$$
$$+ \hat{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}.2z\right]$$

$$= \frac{-\hat{\imath}x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{\jmath}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{k}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2.|\vec{r}|} \quad but \quad unit\ vector \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad then \quad \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

وبنفس الطريقة نستطيع ان نثبت المسائل التالية

$$1- \ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2} = \frac{-2}{|\vec{r}|^3}\hat{r} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$2- \ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3} = \frac{-3}{|\vec{r}|^4}\hat{r} = -\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

H.W:-

اذا كانت $\emptyset$ دالة مجال غير متجهة اي دالة عددية scalar وان $\vec{F}$ متجه اثبت ان :-

$1- Curl\ \ grad\ \emptyset = \nabla \times \nabla\emptyset = 0$ التفاف انحدار اي مجال لامتجه =صفر

$2- div\ \ curl\ \vec{F} = \nabla.\nabla \times \vec{F} = 0$ تباعد اي التفاف =صفر

$3- \ \ curl\ curl\ \vec{F} = grad\ div\ \vec{F} - \nabla^2\vec{F} = \nabla(\nabla.\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$ اخذ الالتفاف لالتفاف مجال متجه

س5/ $prove\ that\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2} = \frac{-2}{|\vec{r}|^3}\hat{r} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$

الجواب/

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2} = (\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2+y^2+z^2)^{-1}$$

$$= \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1}$$

$$= \hat{\imath}\left[-1(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2x\right] + \hat{\jmath}\left[-1(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2y\right] + \hat{k}\left[-1(x^2+y^2+z^2)^{-2}.2z\right]$$

$$= \frac{-2\hat{\imath}x}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2\hat{\jmath}y}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2\hat{k}z}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^4} = -\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$= -\frac{2}{|\vec{r}|^3}\hat{r}$$

س6/ $prove\ that\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}=\frac{-3}{|\vec{r}|^4}\hat{r}=-\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$

الجواب/

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}=(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$=\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\hat{\imath}\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2x\right]+\hat{\jmath}\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2y\right]$$

$$+\hat{k}\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2z\right]$$

$$=\frac{-3\hat{\imath}x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\hat{\jmath}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\hat{k}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{-3(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^5}=-\frac{3\vec{r}}{|\vec{r}|^5}$$

$$=-\frac{3}{|\vec{r}|^4}\hat{r}$$

س7/ اذا علمت ان $\vec{r}$ يمثل متجه مرسوم من نقطة الاصل الى النقطة (x,y,z) , برهن صحة الصيغ الاتية:

1-div r=3 2- curl r=0 3- (u.grad)r=u , u is any vector

حيث u يمثل اي متجه .

الجواب/

$$1-\ \vec{\nabla}.\vec{r}=\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3$$

$$2-\ \vec{\nabla}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\hat{\imath}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)+\hat{\jmath}\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)=0$$

$$3-\ (\vec{u}.grad)\vec{r}=\vec{u} \qquad let\ \vec{u}=\hat{\imath}u_x+\hat{\jmath}u_y+\hat{k}u_z$$

$$=\left[(\hat{\imath}u_x+\hat{\jmath}u_y+\hat{k}u_z).(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})\right](\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)$$

$$= \left[u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}+u_z\frac{\partial}{\partial z}\right](\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)$$

$$= u_x\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)+u_y\frac{\partial}{\partial y}(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)+u_z\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)$$

$$= \hat{\imath}u_x+\hat{\jmath}u_y+\hat{k}u_z=\vec{u} \quad \therefore (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{r}=\vec{u}$$

س8/ اذا كان A اي متجه ثابت بين ان : -

$$grad(\vec{A}.\vec{r})=\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{r})=\vec{A}$$

الجواب/

$$\vec{A}=\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z, \qquad \vec{r}=\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z,$$

$$\vec{A}.\vec{r}=(\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z).(\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z)=xA_x+yA_y+zA_z$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{r})=\hat{\imath}\frac{\partial x}{\partial x}A_x+\hat{\jmath}\frac{\partial y}{\partial y}A_y+\hat{k}\frac{\partial z}{\partial z}A_z=\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z=\vec{A}$$

س9/ اثبت ان: $prove\ that\ \ \vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=0$

الجواب /

$$if\ \vec{F}=\vec{r}, \qquad and\ \ \emptyset=\frac{1}{|\vec{r}|^3}, scaler$$

اذن حسب الفرضية :-

$$\vec{\nabla}.\emptyset\vec{F}=\emptyset\vec{\nabla}.\vec{F}+\vec{F}.\vec{\nabla}\emptyset=\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{\nabla}.\vec{r}+\vec{r}.\nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}$$

ومن الامثلة السابقة تم اثبات مايلي:

$$\vec{\nabla}.\vec{r}=3, \quad \nabla\frac{1}{|\vec{r}|}=-\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}, \qquad \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^3}=-3\frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^4}$$

اذن : -

$$\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=\frac{3}{|\vec{r}|^3}+\vec{r}.\left(\frac{-3}{|\vec{r}|^4}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)=\frac{3}{|\vec{r}|^3}-\frac{3\vec{r}.\vec{r}}{|\vec{r}|^5}=\frac{3}{|\vec{r}|^3}-\frac{3|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5}=\frac{3}{|\vec{r}|^3}-\frac{3}{|\vec{r}|^3}$$

$$= 0 \quad , \quad as\ \vec{r}.\vec{r}=r^2$$

س10/ $prove\ that\ \ \vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=0$

الجواب /

$let\ \ \vec{F}=\vec{r},\quad and\ \emptyset=\frac{1}{|\vec{r}|^3}$

وحسب الفرضية : $\nabla\times\emptyset\mathbf{F}=\emptyset\nabla\times\mathbf{F}+\nabla\emptyset\times\mathbf{F}$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{\nabla}\times\vec{r}+\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^3}\times\vec{r},\quad but\ \ \vec{\nabla}\times\vec{r}=0\ and\ \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^3}=-\frac{3\hat{r}}{|\vec{r}|^4}\ ,\qquad \hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=-\frac{3\hat{r}}{|\vec{r}|^4}\times\vec{r}=-\frac{3\vec{r}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^5}=0,\qquad as\ \vec{r}\times\vec{r}=0$$

س11/ $prove\ \ that\ \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|^2}$

الجواب /

$$let\ \vec{\psi}=\vec{r},\quad \gamma=\frac{1}{|\vec{r}|^2}\qquad and\ according\ to\ \ \vec{\nabla}.\gamma\vec{\psi}=\gamma\vec{\nabla}.\vec{\psi}+\vec{\psi}.\nabla\gamma$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|^2}\vec{\nabla}.\vec{r}+\vec{r}.\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^2}\ ,but\ \ \vec{\nabla}.\vec{r}=3\ and\ \nabla\frac{1}{|\vec{r}|^2}=-\frac{2\vec{r}}{|\vec{r}|^4}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}\right)=\frac{3}{|\vec{r}|^2}-\frac{2\vec{r}.\vec{r}}{|\vec{r}|^4}=\frac{3}{|\vec{r}|^2}-\frac{2|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^4}=\frac{3}{|\vec{r}|^2}-\frac{2}{|\vec{r}|^2}=\frac{1}{|\vec{r}|^2}$$

امثلة محلولة

مثال 1/ اوجد المتجه $\vec{A}$ الذي يتجه من $(2,-4,1)$ الى $(0,-2,0)$ بالاحداثيات الكارتيزية واوجد متجه الوحدة على طول A.

الجواب /

$$\vec{A}=(0-2)a_x+[-2-(-4)]a_y+(0-1)a_z$$

$$\vec{A}=-2a_x+2a_y-a_z,\qquad \left|\vec{A}\right|^2=(-2)^2+(2)^2+(-1)^2=9$$

$$a_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=-\frac{2}{3}a_x+\frac{2}{3}a_z-\frac{1}{3}a_z$$

مثال 2/ اثبت ان المتجهين $\vec{A}=4\vec{a}_x-2\vec{a}_y-\vec{a}_z$ و $\vec{B}=a_x+4a_y-4a_z$ متعامدين .

الجواب /

$$\vec{A}.\vec{B}=(4x1)+(-2x4)+(-1x-4)=0$$

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \quad , \qquad cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=0, \ then\ \theta=90\,, \qquad \therefore \vec{A}\perp\vec{B}$$

مثال 3/ اذا كان $\vec{A}=2a_x+4a_x$ و $\vec{B}=6a_y-4a_z$ متجهين , اوجد قيمة الزاوية الصغرى بينهما باستخدام :1- الضرب الاتجاهي 2- الضرب العددي .

الجواب / الفرع الاول من السؤال:

$$\vec{A}x\vec{B}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}=-16a_x+8a_y+12a_z$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{(2)^2+(4)^2+(0)^2}=4.47, \quad \vec{B}=\sqrt{0^2+6^2+(-4)^2}=7.21$$

$$|\vec{A}x\vec{B}|=\sqrt{(-16)^2+(8)^2+(12)^2}=21.54$$

$$|\vec{A}x\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|sin\theta\Longrightarrow sin\theta=\frac{21.54}{4.47x7.21}=0.668,\Longrightarrow\theta=41.9°$$

الفرع الثاني من السؤال:

$$\vec{A}.\vec{B}=(2x0)+(4x6)+(0x-4)=24$$

$$cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{24}{4.47x7.21}=0.745,\Longrightarrow\theta=61.9$$

مثال 4/ اذا كان $\vec{A}=a_x+a_Y$ و $\vec{B}=a_X+2a_z$ و $\vec{C}=2a_y+a_z$, اوجد $(\vec{A}x\vec{B})x\vec{C}$ و $\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C})$ وقارن بينهما

الجواب /

$$\vec{A}x\vec{B}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2a_x-2a_y-a_z$$

$$(\vec{A}x\vec{B})x\vec{C}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2a_x+4a_z$$

$$\vec{B}x\vec{C}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-4a_x-a_y+2a_z$$

$$\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2a_x-2a_y+3a_z$$

وعلى ذلك يتضح مدى اهمية وضع الاقواس في الضرب الاتجاهي الثلاثي .

مثال 5 / باستخدام المتجهات A,B,C في السؤال الرابع اوجد $\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C})$ وقارن النتيجة مع $(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C}$.

الجواب / من السؤال السابق نجد ان :

$$(\vec{B}x\vec{C}) = -4a_x - a_y + 2a_z$$

$$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = (1x-4) + (1x-1) + (0x2) = -5$$

وايضا من السؤال السابق نجد:

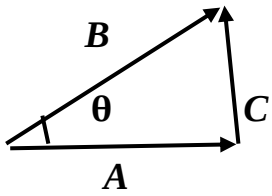
$$\vec{A}x\vec{B} = 2a_x - 2a_y - a_z$$

$$(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C} = (2x0) + (-2x2) + (-1x1) = -5$$

النتيجة نفسها مما يدل على وضع الاقواس في هذا النوع من الضرب الثلاثي غير ضرورية طالما ان المتجهات تظهر بنفس الترتيب الدوري فان النتيجة تكون واحدة اذ تتغير الاشارة عندما لاتكون بنفس الترتيب الدوري .

مثال 6/ بتربيع طرفي المعادلة $\vec{A} = \vec{B} - \vec{C}$ برهن قانون الجيب تمام .

الجواب/



$$\vec{A}+\vec{C}=\vec{B} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}-\vec{C} \Rightarrow \vec{A}.\vec{A}=A^2=(\vec{B}-\vec{C}).(\vec{B}-\vec{C})=\vec{B}.\vec{B}-\vec{B}.\vec{C}-\vec{B}.\vec{C}+\vec{C}.\vec{C}$$
$$= B^2 - 2\vec{B}.\vec{C} + C^2 = B^2 - 2BC\cos\theta + C^2$$
$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\theta$$

مثال 7 / جد تباعد والتفاف المتجه $\vec{A} = \hat{\imath}(x^2+y^2) + \hat{\jmath}(y^2+Zx) + \hat{k}(z^2+xy)$.

الجواب /

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left[\hat{\imath}(x^2+y^2) + \hat{\jmath}(y^2+zx) + \hat{k}(z^2+xy)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2+zx) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2+xy) = 2x+2y+2z$$
$$= 2(x+y+z)$$

$$curl\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2+y^2) & (y^2+zx) & (z^2+xy) \end{vmatrix}$$

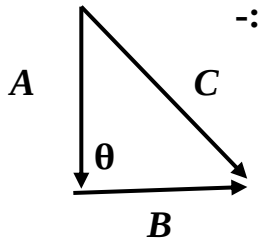
$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z^2+xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+zx)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2+xy)\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2+zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right] = \hat{\imath}(x-x) + \hat{\jmath}(0-y) + \hat{k}(z-2y)$$

$$= -\hat{\jmath}y + \hat{k}(z-2y)$$

مثال 8 / برهن على ان المتجهات الثلاثة : $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k},\ \vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k},\ \vec{C} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$
تمثل جوانب مثلث قائم الزاوية.

الجواب/ من الرسم :-



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}) + (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}) = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}) = 2 + 3 - 5 = 0,$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = 0 \Rightarrow \theta = 90 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$