

(5 - 1) مقدمة :-

تقسم طاقة منظومة من الشحنات بصورة عامة الى طاقة حركية وطاقة كامنة ولكن الطاقة الكلية لمنظومة شحنية واقعة تحت ظروف ستاتيكية تعد طاقة كامنة والتي تكون ناشئة من التأثيرات الكهربائية المتبادلة للشحنات والتي تدعى الطاقة الكهروستاتيكية .

ان الشغل المنجز على شحنة نقطية (q) لنقلها من الموضع A الى الموضع B هو .

$$W = - \int_A^B F \cdot d\ell \quad \text{or} \quad W = - \int_A^B F \cdot dr = -q \int_A^B E \cdot dr \quad (F = qE)$$

$$\because E = -\nabla U, \quad \rightarrow W = q \int_A^B \nabla U \cdot dr \quad \text{but} \quad \nabla u = \frac{du}{dr}, \Rightarrow \nabla u \cdot dr = du$$

وعليه فالطاقة الكامنة لشحنة نقطية واحدة تعطى بالعلاقة :-

$$W = q(U_B - U_A)$$

والتي تمثل التغير الحاصل في الطاقة الكهروستاتيكية للشحنة نتيجة انتقالها $A \rightarrow B$.

ملاحظة :- تكون الإشارة سالبة في المعادلة اعلاه لأن القوى المقاومة معاكسة للشغل , اي يجب ان يكون المجال عكس القوى لأنجاز الشغل .

(5 - 2) الطاقة الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية :-

Potential Energy of a group of point charges

الطاقة الكامنة لمنظومة مكونة من (m) من الشحنات النقطية يمكن الحصول عليها من حساب الشغل اللازم لتجميع هذه الشحنات وجلبها واحدة تلو الأخرى من المالا نهاية .

ان جلب الشحنة الأولى ووضعها في مكانها لا يتطلب بذل شغل , اي ان $W_1=0$, بينما جلب الشحنة الثانية يتطلب شغل ووضعها في مكانها وهو W_2 حيث :-

$$W_2 = q_2 U_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}}, \quad \text{where} \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

وبالنسبة الى جلب الشحنة الثالثة q_3 فان الشغل المنجز :

$$W_3 = q_3 U_{31} + q_3 U_{32} = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{23}} \right)$$

وبنفس الطريقة يتم جلب الشحنات q_4 و q_5 من اللانهاية , اي الشغل المنجز :

$$W_4 = q_4 U_{41} + q_4 U_{42} + q_4 U_{43}, \quad W_5 = q_5 U_{51} + q_5 U_{52} + q_5 U_{53} + q_5 U_{54}$$

وعليه فالطاقة الكهروستاتيكية الكلية تكون مساوية لمجموع الشغل المنجز لكل الشحنات (الشغل المنجز يمثل الطاقة الكامنة).

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + \dots$$

$$W_E = q_2 U_{21} + q_3 U_{31} + q_3 U_{32} + q_4 U_{41} + q_4 U_{42} + q_4 U_{43} + q_5 U_{51} + q_5 U_{52} + q_5 U_{53} + q_5 U_{54} + \dots \dots \dots (1)$$

as: $q_3 U_{31} = q_3 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} = q_3 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{31}} = q_1 \frac{q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{31}}$, because $r_{13} = r_{31}$

اي يحصل مجموع مزدوج حيث يحسب كل زوج مرتين حيث يسهم الزوج المتكون من شحنتين q_3 و q_4 مرة W_{34} ومرة W_{43}

عند الجمع : $W_{34} + W_{43} = 2W_{34}$

$$\therefore W = W_{21} + W_{12} + W_{31} + W_{13} + W_{32} + W_{23} + \dots$$

وبناء على ذلك تصبح معادلة (1) بالشكل :

$$W_E = q_1 U_{12} + q_1 U_{13} + q_2 U_{23} + q_1 U_{14} + q_2 U_{24} + q_3 U_{34} + \dots \dots \dots (2)$$

بجمع معادلة (1) و (2) نحصل على :-

$$2W_E = q_1(U_{12} + U_{13} + U_{14} + \dots) + q_2(U_{21} + U_{23} + U_{24} + \dots) + q_3(U_{31} + U_{32} + U_{34} + \dots) + \dots$$

$$U_1 = U_{12} + U_{13} + U_{14} + \dots$$

$$U_2 = U_{21} + U_{23} + U_{24} + \dots$$

$$U_3 = U_{31} + U_{32} + U_{34} + \dots$$

$$2W_E = q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 + q_4 U_4 + \dots$$

بقسمة المعادلة على 2

$$W_E = \frac{1}{2} [q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 + q_4 U_4 + \dots]$$

اذن كثافة الطاقة بالنسبة لتوزيع نقطي يعطى بالعلاقة :-

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=N} q_m U_m$$

$$\text{but : } U_m = \sum_{K=1}^m \frac{q_K}{4\pi \epsilon_0 r_{Km}}$$

$$\therefore W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{q_m q_K}{4\pi \epsilon_0 r_{km}} \quad \text{or} \quad W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m \sum_{k=1}^N \frac{q_K}{4\pi \epsilon_0 r_{km}}$$

ملاحظة :- اذا وجد سطح عازل بدل الفراغ يستبدل ϵ_0 بـ ϵ .

(5 - 3) الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني :-

Electrostatic Energy of Charge Distribution

عند حساب الطاقة الكهروستاتيكية اذا كانت الشحنة موزعة توزيعا سطحيا او حجميا اي مستمرا وليس نقطيا نلجأ الى التكامل فيكون:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(r) U(r) dV, \text{ or } W = \frac{1}{2} \int \sigma(r) U(r) da, \text{ or } W = \frac{1}{2} \int \lambda(r) U(r) d\ell$$

↑ حتمي

↑ سطحي

↑ خطي

اذا كان لدينا توزيع شحني متصل (سطحي وحتمي) نستخدم المعادلة الاتية للعوازل للتعبير عن طاقة التوزيع الشحني:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) U(r) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(r) U(r) da, \dots \dots \dots (1)$$

وبما ان الموصل يعد بمثابة منطقة متساوية الجهد بالامكان انجاز التكامل للموصلات فيكون : (عندما Q_j شحنة الموصل)

$$\frac{1}{2} \int \sigma U da = \frac{1}{2} Q_j U_j$$

واذا وجدت عوازل وموصلات ، ستصبح معادلة (1) بالشكل :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) U(r) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(r) U(r) da + \frac{1}{2} \sum Q_j U_j \dots \dots \dots (2)$$

الحد الاخير من المعادلة يعبر عن مساهمة جميع الموصلات في طاقة المنظومة وبهذا يقتصر التكامل السطحي في الحد الثاني من المعادلة على السطوح غير الموصلة فقط.

في العديد من المسائل التي تتضمن شحنات طليقة (*free charges*) مستقرة على سطوح الموصلات لذلك فمعادلة (2) تؤول الى:

$$W = \frac{1}{2} \sum_j Q_j U_j$$

يمكن كتابة جهد الموصل (j) كمجموع حدين : $U_j = U_{j1} + U_{j2}$ حيث:

U_{j1} : يمثل الجهد الناشئ عن شحنة الموصل نفسه. U_{j2} الجهد الناشئ عن الشحنة التي تحملها الموصلات الاخرى.

$$W = \frac{1}{2} \sum_j Q_j U_{j1} + \frac{1}{2} \sum_j Q_j U_{j2}$$

الحد الاول يمثل طاقة ذاتية للموصل وتعتمد على الظروف المحيطة بالموصل (لأن توزيع الشحنة على كل موصل ترتب نفسها حسب الظروف المحيطة بها) والحد الثاني يمثل طاقة التأثير المتبادل بين الشحنات.

وبشكل عام تعطى قيمة الطاقة الكهروستاتيكية لتوزيع شحني متصل للموصلات بالعلاقة:

$$W = \frac{1}{2} Q \Delta U$$

ويمكن التعبير عن طاقة المتسعة المشحونة بالشكل الآتي:

$$as: Q = C\Delta U, \quad then \quad W = \frac{1}{2} Q\Delta U = \frac{1}{2} C(\Delta U)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

(4 – 5) كثافة الطاقة للمجال الكهروستاتيكي : Energy density for an Electrostatic Field

لو كان لدينا توزيع شحني حتمي وسطحي مميز بالكثافتين ρ, σ واللذان يرتبطان بالازاحة الكهربائية وفق العلاقتين :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot D = \rho \\ D \cdot n = \sigma \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

حيث المعادلة الاولى تستخدم للوساط العازلة والثانية على سطوح الموصلات.

$$as: W = \frac{1}{2} \int_V \rho U dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma U da \dots \dots \dots (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$as: W = \frac{1}{2} \int_V U(\nabla \cdot D) dV + \frac{1}{2} \int_S UD \cdot n da \dots \dots \dots (3)$$

ويمكن تحويل التكامل الاول باستخدام المتطابقة :

$$\nabla \cdot (FA) = F\nabla \cdot A + A \cdot \nabla F, \quad let F = U, A = D$$

$$\nabla \cdot (UD) = U\nabla \cdot D + D \cdot \nabla U, \quad also: \quad U\nabla \cdot D = \nabla \cdot (UD) - D \cdot \nabla U \quad and \quad E = -\nabla U$$

$$\therefore U\nabla \cdot D = \nabla \cdot (UD) + D \cdot E \dots \dots \dots (4)$$

نعوض معادلة (4) في معادلة (3) فنحصل على:

$$as: W = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (UD) dV + \frac{1}{2} \int_V D \cdot E dV + \frac{1}{2} \int_S UD \cdot n da$$

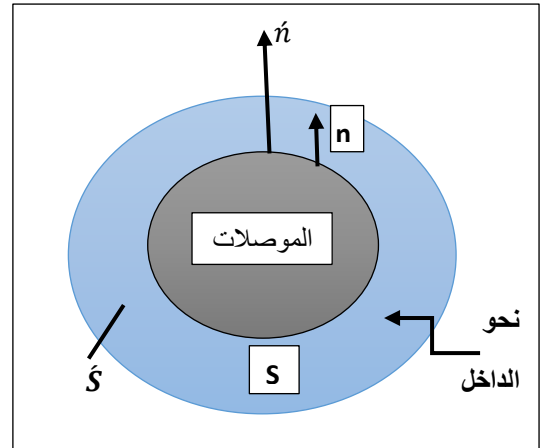
وباستخدام نظرية التباعد على الحد الاول من المعادلة:

$$as: W = \frac{1}{2} \int_{S+\hat{S}} UD \cdot \hat{n} da + \frac{1}{2} \int_V D \cdot E dV + \frac{1}{2} \int_S UD \cdot n da$$

السطح $(S + \hat{S})$ يمثل السطح الكلي الذي يحيط بالحجم V وهذا السطح يتكون من جزئين الاول (S) يمثل سطوح جميع الموصلات في المنظومة ، بينما يمثل $(\hat{S})$ السطح الذي يحيط بالمنظومة من الخارج ، والذي يمكن اختيار موضعه في المالا نهائية.

وكذلك $\hat{n}$: هو العمود الذي يشير الى خارج الحجم

n : العمود الذي يشير الى خارج سطح الموصل S نحو الحجم V ولهذا السبب يلغى التكامل السطحي الاول على السطح (S) والتكامل الاخير على السطح S ويبقى التكامل السطحي على $(\hat{S})$. وبما ان $(\hat{S})$ تم اختياره في المالا نهائية فعليه نجد ان التكامل للسطح $(\hat{S})$:



$$U = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}, \rightarrow U \propto \frac{1}{r}, \text{ and } D = \frac{q}{4\pi r^2}, \rightarrow D \propto \frac{1}{r^2}, \quad \text{also } A = 4\pi r^2, \rightarrow da \propto r^2$$

$$\dot{S} \propto \frac{1}{r^2} \times \frac{1}{r} \times r^2 \rightarrow \dot{S} \propto \frac{1}{r} = \frac{1}{\infty} = 0$$

اذن التكامل السطحي الاول يلغى ايضا وبذلك :

$$W = \frac{1}{2} \int E \cdot D dV = \frac{1}{2} E \cdot DV$$

$$\text{but: } D = \epsilon E, \text{ then } W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$$

ان كثافة الطاقة الكهروستاتيكية لوحدة الحجم للاوساط المادية هي:-

$$W = \frac{d\omega}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E, \quad \text{or } W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV$$

وعليه نجد ان كثافة الطاقة اما ان تعطى بدلالة الجهد الكهربائي :

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U dV$$

او بدلالة المجال الكهربائي:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV$$

اسئلة الفصل الخامس

س1/ كرة موصلة نصف قطرها R موجودة في الفراغ تحتل شحنة مقدارها Q اثبت ان الطاقة الكلية المخزونة في الوسط الذي يحيط بالكرة تساوي : $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

الجواب/

$$W = \frac{1}{2} QU \dots \dots \dots (1)$$

ومن الصيغة التكاملية لقانون كاس:-

$$\oint_S E \cdot n da = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$but : U = - \int_{\infty}^R E \cdot dr \dots \dots \dots (3)$$

نعوض (2) في (3) نحصل على :

$$U = - \int_{\infty}^R \frac{Q dr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \right]_{\infty}^R$$

$$\therefore U = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \dots \dots \dots (3)$$

نعوضها في معادلة (1) الطاقة اعلاه :

$$W = \frac{1}{2} Q \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \right) = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

س2/ احسب الطاقة الكامنة الكهربائية لشحنة مقدارها Q موزعة بصورة متجانسة في حيز كروي نصف قطره R باستخدام شدة المجال الكهربائي.

الجواب/

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

نحسب شدة المجال الكهربائي داخل وخارج الكرة . نفرض E الشدة داخل الكرة عندما $r < R$ وان الشحنة داخل الكرة q .

$$\dot{q} = \int_0^r \rho dV = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

نرسم سطح كاوس داخل الكرة:-

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} da = \frac{\dot{q}}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pi \rho r^3}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

ونفرض E شدة المجال خارج الكرة عندما $r > R$ والشحنة خارج الكرة $= q$.

$$q = \int_0^R \rho dV \rightarrow q = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

نرسم سطح كاوس خارج الكرة

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}, \rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \pi \rho R^3}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

الطاقة الكامنة الكهربائية ستكون مجموعها داخل وخارج الكرة. (سنأخذ $dV = A dr$ حيث $A =$ مساحة المقطع العرضي)

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0}\right)^2 A dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}\right)^2 A dr$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3 \epsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{4\pi \rho^2}{9 \epsilon_0^2} \int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{4\pi \rho^2}{9 \epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{R^6}{r^4} r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi \rho^2}{9 \epsilon_0} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \frac{2\pi \rho^2 R^6}{9 \epsilon_0} \left[\frac{-1}{r}\right]_R^\infty = \frac{2\pi \rho^2 R^5}{9 \epsilon_0} \left[\frac{1}{5} + 1\right] = \frac{2\pi \rho^2 R^5}{9 \epsilon_0} \left[\frac{6}{5}\right]$$

$$= \frac{12\pi \rho^2 R^5}{45 \epsilon_0} \dots \dots \dots (1)$$

ويمكن تبسيط الناتج كالآتي:

$$\text{as: } q = \int \rho dV = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \rightarrow q^2 = \frac{16}{9} \pi^2 \rho^2 R^6$$

نضرب معادلة (1) بـ $\frac{8\pi R}{8\pi R}$ فيصبح :

$$W_E = \left(\frac{16\pi^2 \rho^2 R^6}{9} \right) \frac{1}{8 \epsilon_0 \pi R} \left(\frac{6}{5} \right) = \left(\frac{16\pi^2 \rho^2 R^6}{9} \right) \frac{1}{4 \epsilon_0 \pi R} \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{3q^2}{20 \epsilon_0 \pi R}$$

س3/ نفس السؤال السابق ، احسب الطاقة الكامنة باستخدام الجهد الكهروستاتيكي.

الجواب/ نحسب الطاقة الكامنة داخل وخارج الكرة باستخدام الجهد الكهروستاتيكي.

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U dV, \quad r \leftarrow R \leftarrow \infty \leftarrow U_{in}$$

$$\text{as: } E = -\nabla U \text{ then } E = -\frac{dU}{dr}, \rightarrow dU = -E dr$$

$$\begin{aligned} U_{in} &= - \int E dr = - \int_{\infty}^R E_{out} dr - \int_R^r E_{in} dr = - \int_{\infty}^R \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho}{3 \epsilon_0} r dr \\ &= - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \int_R^r r dr = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^R - \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^r \\ &= \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 R} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} \\ &= \frac{2\rho R^2}{6 \epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} = \frac{\rho}{6 \epsilon_0} [3R^2 - r^2] \end{aligned}$$

$$U_{out} = - \int_{\infty}^r E_{out} \cdot dr = - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right]$$

$$\therefore U_{out} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r}$$

والطاقة الكامنة الكلية تكون بجمع الجهد الداخلي والخارجي:

$$W = \frac{1}{2} \rho \int_0^R U_{in} dV + \frac{1}{2} \rho \int_R^\infty U_{out} dV, \quad \text{but } dV = A dr = 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \rho \int_0^R \frac{\rho}{6 \epsilon_o} [3R^2 - r^2] \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \rho \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_o r} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi \rho^2}{12 \epsilon_o} \left[3R^2 \int_0^R r^2 dr - \int_0^R r^4 dr \right] + \frac{4\pi \rho^2 R^3}{6 \epsilon_o} \int_R^\infty r dr \\ &= \frac{\pi \rho^2}{3 \epsilon_o} \left[3R^2 \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5} \right] + \frac{2\pi \rho^2 R^3}{3 \epsilon_o} \left(-\frac{R^2}{2} \right) \\ &= \frac{\pi \rho^2 R^5}{3 \epsilon_o} \left[1 - \frac{1}{5} - 1 \right] = \frac{-\pi \rho^2 R^5}{15 \epsilon_o} \end{aligned}$$