# محاضرات

## مادة

# الفيزياء العامة

# General Physics

# الفصل الاول

# الكميات الفيزيائية وتحليل المتجهات

# Physical Quantities and Vector analysis

# المحتويات

## 1-1المقدمة (Introduction)

الفيزياء كلمة يونانية الأصل معناها معرفة الطبيعة، ولذلك فهي علم يسعى لدراسة الكون بما فيه من مادة matter وطاقة energy وتفاعلاتهما، وما ينتج عن ذلك من ظواهر متكررة. ويحتاج علم الفيزياء لفهم نظريات علم الرياضيات في مجالات التفاضل والتكامل والجبر والتحليل الرياضي .

ويعتمد علم الفيزياء في مسعاه على الملاحظة والتجربة والتفكير النظري بهدف صياغة نظريات تساعد في فهم مكونات هذا الكون وتفسير سلوك هذه المكونات ومحاولة التحكم من أصغر جزء في الكون مثل مكونات نواة الذرة الى الأجرام السماوية والمجرات.

وتعد الفيزياء من حيث الأهمية أحد أهم العلوم الأساسية، فالأفكار والمفاهيم التي تقدمها الفيزياء ضرورية لكافة تخصصات العلوم والهندسة والتكنولوجيا، فأساسيات هذه التخصصات تؤخذ من المبادئ الأولية الأساسية لعلم الفيزياء، ولذلك ترى مقرر أساسيات الفيزياء في الدراسة الجامعية في فرعي العلوم والهندسة أول مقرر يدرسه الطالب.

وتعد الفيزياء من حيث الأهمية أيضا أنها تقدم إجابات مقنعة للتساؤلات التي يبديها الإنسان العادي غير المتخصص في فهم الظواهر والأحداث التي يشاهدها في حياته اليومية أو الأطول من اليومية، أو فهم طبيعة عمل الأجهزة التي يستعملها في حياته، فهذا العلم وثيق الصلة بحياة الناس، فكل ظاهرة نشاهدها في الطبيعة يرتبط فهمها وتفسيرها بالفيزياء، وكل منتج تكنولوجي نستعمله في حياتنا وفي أعمالنا يرتبط وجوده بعلم الفيزياء أيضا .

فيعتبر علم الفيزياء هو القاعدة الاساسية لمختلف العلوم, فهو يقدم التفاصيل العميقة لفهم كل شيء بدءا بالجسيمات الاولية الى النواة والذرة والجزيئات والخلايا الحية والمواد الصلبة والسائلة والغازات والبلازما (الحالة الرابعة) والدماغ البشري والانظمة المعقدة والكمبيوترات السريعة والغلاف الجوي والكواكب والنجوم والمجرات والكون نفسه. أي ان الفيزيائيين يختصون بمعرفة اصغر عنصر لهذا الكون وهو الجسيمات الاولية الى الكون الفسيح مرورا بالتفاصيل التي ذكرناها.

## 2-1 مجالات عمل الفيزياء (Areas of work in physics)

ينقسم مجال عمل الفيزياء إلى مجالين هما:

- **الفيزياء الكلاسيكية**. الفيزياء الكلاسيكية تدرس المادة والطاقة وتفاعلاتهما على المستوى

الجهري(على النطاق الطبيعي للمراقبة)، وتدرس أيضا حركة الأجسام المادية بسرعات معتدلة أقل بكثير جدا من سرعة الضوء، وتشتمل على مواضيع مثل دراسة حركة الأجسام الصلبة، والسائلة، ودراسة طبيعة الصوت وسلوكه، وسلوك الضوء الظاهري، والكهرباء والمغناطيسية، والحرارة.

- **الفيزياء الحديثة**. الفيزياء الحديثة تتضمن نظريتين، هما نظرية فيزياء الكم، والنظرية النسبية. تدرس نظرية فيزياء الكم المادة والطاقة وتفاعلاتهما على المستوى المجهري مثل حركة الالكترونات، التركيب الذري، والجسيمات الأولية، والفيزياء النووية. بينما تدرس النظرية النسبية المادة والطاقة وتفاعلاتهما عندما يتعلق الأمر بحركة الأجسام بسرعات قريبة من سرعة الضوء.

## 3-1 الكميات الفيزيائية ( Physical Quantities )

إن أي شيء يمكن أن يقاس بإعطائه رقما ، أو رقما ووحدة نسميه كمية فيزيائية. فالمسافة والكتلة والزمن والحجم والسرعة والشحنة الكهربائية والقوة ومعامل الاحتكاك ومعامل الانكسار كلها كميات فيزيائية. الصفة الفيزيائية القابلة للقياس (اي التعبير عنها بالأرقام باستخدام اداة قياس معينة ) تسمى كمية فيزيائية , فقولنا مثلا (اللون) لا يعني كمية فيزيائية , اما قولنا (شدة اللون) او (طول موجة اللون) فهي كميات فيزيائية لأنها صفات يمكن ان نقيسها . وهناك نوعان من الكميات الفيزيائية هما:

**ا - الكميات الفيزيائية الاساسية (fundamental Physical Quantities)**

الكميات الفيزيائية الاساسية هي الكميات الفيزيائية التي نستطيع وصفها بصورة طبيعية، ونقيسها بمقارنتها بوحدات قياس نسميها وحدات قياس أساسية وتشكل عوامل مميزة للأجسام. كما تعرف ايضا بانها الكميات التي تعرف بذاتها ولا تعرف بدلالة الكميات الفيزيائية الاخرى ولذلك تسمى احيانا الكميات الفيزيائية غير المعرفة(Undefined) مثل الكتلة والمسافة والزمن وغيرها.

قد تم اعتماد سبع كميات تشكل كميات أساسية في الفيزياء حسب النظام العالمي للوحدات أو النظام الدولي للوحدات SI units , وهذه الكميات:

- الطول(المسافة): وهي من الكميات الفيزيائية المعتمدة على المقدار , والغير مهتمة بالاتجاهات ووحداتها المتر واجزاءه مثل السنتيمتر ,المليمتر, الديسيمتر وهكذا , وايضا مضاعفاته مثل الكيلومتر , والهيكتومتر , والديكامتر وغير هذا.
- الكتلة : وهي تستخدم لقياس كمية احد المواد في حيز ما , ووحدتها الغرام واجزاءه وكذلك مضاعفاته

- الزمن : وهو الفترة التي يستغرقها حدوث شيء ما , ووحدته الساعة واجزائها من الدقائق والثواني , ومضاعفاتها مثل اليوم والشهر والعام وهكذا.
- درجة الحرارة : تقوم بتمثيل مؤشر حول مقدار الطاقة الحرارية التي تخزن في الجسم , ووحدتها الكلفن وغيرها.
- شدة التيار: يعرف التيار بانه عبارة عن معدل تدفق الشحنات الكهربائية في وحدة زمنية معينة, ووحدته هي الامبير ومضاعفاته واجزاءه.
- كمية المادة: وهي وحدة تستخدم في الكيمياء والفيزياء ويتم التعبير عنها بالمول.
- شدة الاضاءة: تساوي عدد الجسيمات الضوئية التي تسقط عموديا على وحدة المساحة من السطح خلال الثانية الواحدة او تعرف بانها مقياس لقدرة الضوء (او لطول موجة محدد) من نقطة في اتجاه معين وذلك اعتمادا على الدالة الضيائية وهي نموذج قياسي لحساسية عين الانسان, ووحدتها القنديلة (كانديلا) وهي وحدة دولية اساسية.

**ملاحظة :** الدالة الضيائية أو دالة التألق أو دالة الفعالية الضوئية في الرؤية والبصريات هي دالة تصف متوسط حساسية العين للطيف الضوئي ودرجة ضيائه. أي تصف قدر الضياء المرئي بالعين لشعاعين ضوئيين مختلفي اللون. ويختلف شعورنا بدرجة ضياء شعاعين ضوئيين بحسب طول موجة الضوء

**ب- الكميات الفيزيائية المشتقة( Quantities Derived Physical )**

وهي الكميات التي يتم اشتقاقها من الكميات الاساسية وتعرف بدلالتها , ولذلك تسمى احيانا بالكميات المعرفة وتعرف ايضا بانها الكميات الفيزيائية التي لا نستطيع وصفها وقياسها إلا بواسطة أكثر من وحدة قياس أساسية، وسميت بالكميات الفيزيائية المشتقة، ووحداتها بالوحدات المشتقة اعتمادا على أن تلك الكميات صيغت بقوانين فيزيائية على شكل علاقات رياضية تربط ما بين كميات فيزيائية أساسية لتفسير سلوك الظواهر الطبيعية.مثل السرعة والقوة والشغل وغيرها .

## 4-1 المفاهيم الاساسية للكميات الفيزيائية (Basic concepts of physical quantities)

**الفيزياء :** العلم الاساسي لبحث ظواهر الطبيعة وصفا وفهما وتحليلا من خلال المشاهدة والتجربة والقياس و يحتاج علم الفيزياء لفهم نظريات علم الرياضيات في مجالات :التفاضل والتكامل والجبر والتحليل الرياضي.

**النماذج الفيزيائية:** تستند لأسس رياضية تتكامل مع قانون أو علاقة فيزيائية.

**العلاقة الفيزيائية:** تتكون من معادلة رياضية تتضمن كميات فيزيائية ثابتة أو متغيرة.

**علم القياس والتقييس:** هو علم كسائر العلوم الأخرى تطور بدءا من نظام المتر--كيلوجرام--ثانية(msk) ونظام السنتيمتر--جرام--ثانية (cgs) والنظام البريطاني وغيرها. وانتهى الأمر بتوحيد أنظمة القياس تحت مسمى النظام الدولي للوحدات (SI) وقد اتفق عليه في المؤتمر الحادي عشر للأوزان والمقاييس في باريس عام 1960 ويعرف (MKSA) وهو نظام المتر. كغم. ثانية. امبير بدلا من الكولوم لسهولة اعتماد التيار كمقياس اكثر من الشحنة.

## 5-1 الوحدات والمقاييس (Units and metrics)

الكميات الفيزيائية يجب أن تكون قابلة للقياس ومتجانسة الأبعاد ومن هنا تظهر الحاجة لوحدات القياس تكتب قوانين الفيزياء بدلالة كميات اساسية تتطلب تعريفا منضبطا. الجدول (1-1) يوضح الكميات الأساسية في علم الفيزياء ووحدات قياسها في النظام الدولي للوحدات:

**جدول (1-1)الكميات الأساسية في علم الفيزياء ووحدات قياسها في النظام الدولي للوحدات**

| ت | الكميات الفيزيائية الاساسية | رمز الوحدة | وحدة القياس (النظام الدولي) عربي | English |
|---|---|---|---|---|
| 1 | الطول | L | متر | m |
| 2 | الكتلة | m | كغم | kg |
| 3 | الزمن | t | ثانية | s |
| 4 | درجة الحرارة | K | كلفن | K |
| 5 | التيار الكهربائي | I | امبير | A |
| 6 | كمية المادة | mol | مول | mol |
| 7 | شدة الاضاءة | cd | الشمعة القياسية | cd |

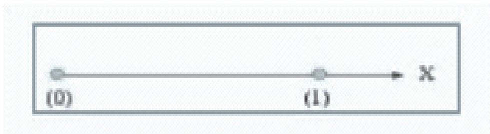
نلاحظ من الجدول ان التيار الكهربائي من ضمن الكميات الاساسية مع اننا نعرف ان التيار الكهربائي يساوي المعدل الزمني لتغير الشجنة الكهربائية, والمفروض ان تكون الشجنة الكهربائية من ضمن القائمة بدلا عن التيار الكهربائي. ولكن خبراء النظام العالمي اعتمدوا التيار الكهربائي نظرا لأهمية استعماله وسهولة قياسه.

## 6-1 محاور الاسناد ... الاحداثيات (Reference axes… coordinates)

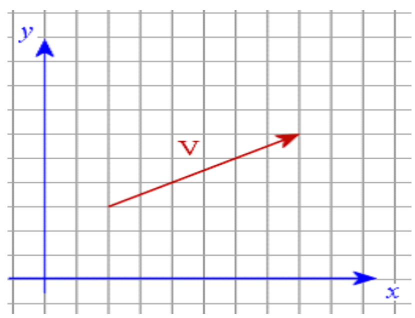
محاور الاسناد المرجعية هي الأساس في دراسة الظواهر الفيزيائية في نظام ما بالنسبة لنظام آخر ساكن أو متحرك. كما أن محاور الاسناد تيسر وصف حركة الأجسام و تسهل التعامل مع حركة الكواكب في علم الفلك

**طبيعة الحركة**

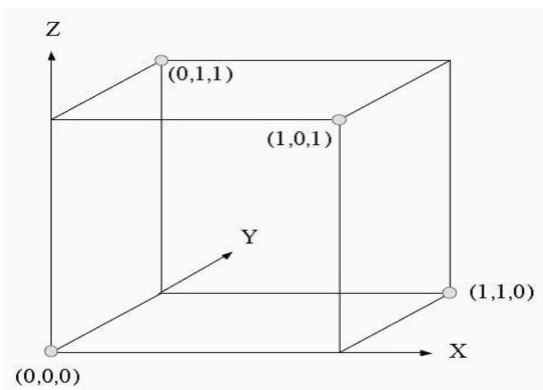
- حركة خطية في بعد واحد على محور X مثلا




- حركة مستوية : في بعدين في المستوي XY




- حركة فراغية : في ثلاثة ابعاد في الفراغ XYZ



## 7-1 تحليل المتجهات( Vector analysis)

**تصنيف الكميات الفيزيائية**

بصورة عامة تصنف الكميات المقاسة في الفيزياء الى صنفين رئيسيين هما:-

1- الكميات القياسية(العددية) : هي الكميات التي تتحدد بالمقدار فقط وغير مرتبطة بالاتجاه (ليس لها اتجاه في الفراغ) كالطول , الكتلة , الكثافة , درجة الحرارة , الزمن , الشحنة , الحجم فكل منها له مقدار فقط وليس اتجاه.

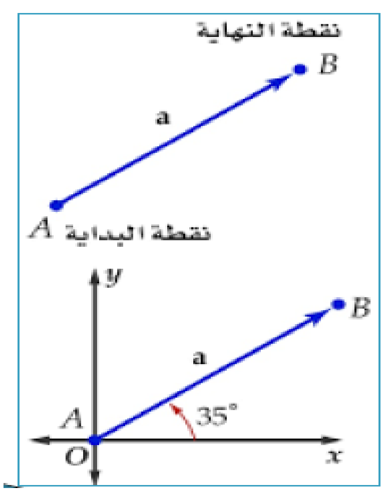
ويمكن أن تخضع لعمليات الجبر الإعتيادية عند الجمع والطرح .

2- الكميات المتجهة : هي الكميات التي تتحدد بالمقدار والاتجاه على محاور الاسناد. مثل : السرعة , التسارع (التعجيل), القوة , الازاحة .

وهذه الكميات لا تخضع للعمليات الجبرية البسيطة بل تخضع للجبر الإتجاهي عند جمعها وطرحها وضربها.

**المتجهات**

تستخدم المتجهات لتمثيل الكميات التي تمتلك مقدارا" و اتجاها". ويمثل المتجه بالرمز $A$ , $\vec{A}$ , $\hat{A}$ , $\bar{A}$ . يمتاز المتجه بان له طول محدد ومسار واتجاه ونقطة تأثير وزاوية ميل. وله قيمة موجبة او سالبة حسب اتجاهه , اما قيمته المطلقة فتمثل مقداره فقط ويمثل بالرمز $|A|$ .



## 8-1 خصائص المتجهات( Vector properties)

- **تساوي المتجهات**

يتساوى متجهان اذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه , اما اذا كانا متعاكسين , فانه يعبر عن العلاقة الرياضية كالتالي :

$$\mathbf{A= -B} \qquad\qquad \mathbf{(1\text{-}1)}$$

$$\mathbf{A+(-B) = 0}$$

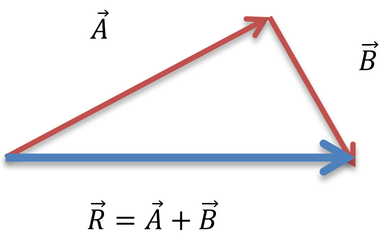
- **جمع المتجهات**

اذا كان للمتجهين نفس الاتجاه اي يعملان على خط واحد فنجمعهما جمعا جبريا , واذا كانت متضادة ولها نفس خط العمل فيتم طرحها طرحا جبريا.

اذا لم يكن خط تأثير المتجهات واحد فأننا نجد المحصلة بالطرق التالية :

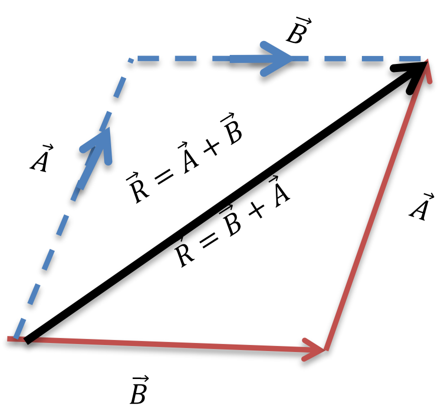
1- الطريقة المثلثية

المحصلة هي الخط الواصل بين بداية المتجه A وراسه ينتهي عند نهاية المتجه B



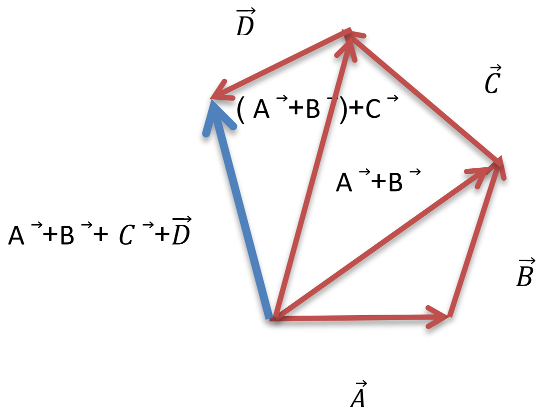

2- طريقة متوازي اضلاع

نكمل رسم متوازي الاضلاع وتكون المحصلة قطر متوازي الاضلاع



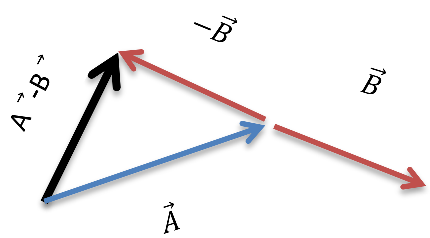
3- طريقة المضلع الهندسي

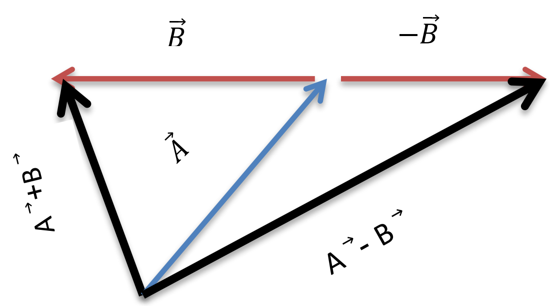
المحصلة هي الخط الواصل بين بداية اول متجه وراسه ينتهي عند نهاية اخر متجه



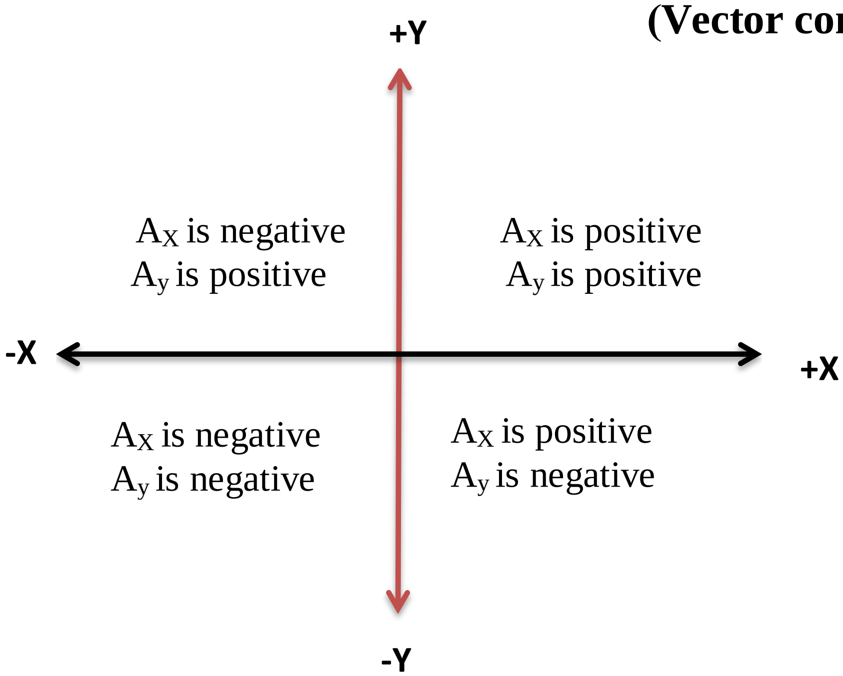

- **طرح المتجهات**

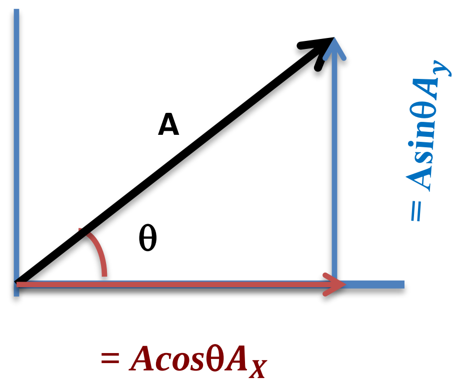
تتم عملية طرح المتجهات بصورة مشابهة للجمع مع مراعاة رسم المتجه B في الاتجاه المعاكس باعتبار ان B- هو المتجه الذي يساوي B في المقدار ويعاكسه في الاتجاه.



## 9-1 مركبات المتجه ( Vector compounds)




| | | |
|---|---|---|
| (1-2) | $A_X = A\cos\theta$ | المركبة السينية |
| (1-3) | $A_y = A\sin\theta$ | المركبة الصادية |
| (1-4) | $A^2 = A_x^2 + A_y^2$ | مقدار المتجه |
| (1-5) | $\lvert A\rvert = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ | |
| (1-6) | $\tan\theta = \frac{Ay}{AX}$ | زاوية الميل مع x |

## 10-1 متجهات الوحدة (Unit Vectors)

يساعد متجه الوحدة في وصف اتجاه الكميات المتجهة وتيسير تحليل المتجهات.

يُعرّف متجه الوحدة ( $\hat{u}_A$ ) في اتجاه المتجه ( $\vec{A}$ ) كالتالي :-

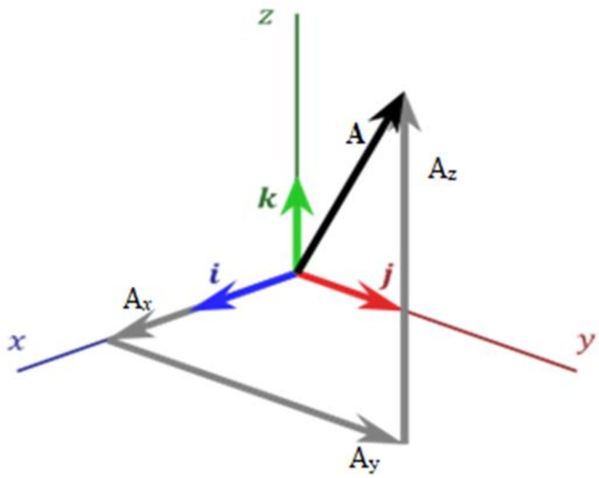
$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|A|} \qquad (1\text{-}7)$$

وله الخصائص التالية: 1- له اتجاه محدد، 2- مقداره واحد، 3- ليس له وحدة لأنه نسبة بين المتجه و مقداره.

**متجهات الوحدة الأساسية ( $\hat{i}$ , $\hat{j}$ , $\hat{k}$ ) ( Basic Unit Vectors )**

وهي متجهات مقدارها وحدة واحدة وتعمل في الاتجاهات الموجبة للمحاور $(x, y, z)$ على الترتيب كما في الشكل وعليه فإن هذه المتجهات الثلاثة تكون متعامدة .

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$




1- متجه الوحدة i , وهو يعمل في الاتجاه الموجب للمحور السيني.
2- متجه الوحدة j , وهو يعمل في الاتجاه الموجب للمحور الصادي.
3- متجه الوحدة k , وهو يعمل في الاتجاه الموجب للمحور العيني.

لنفرض المتجه A له ثلاث مركبات كما في الشكل اعلاه:

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z}$$

$$= A_x\ \hat{i} + A_y\ \hat{j} + A_z\ \hat{k}$$

مقدار المتجه:

$$|A| = \sqrt{A_z^2 + A_y^2 + A_x^2} \qquad \textbf{(1-8)}$$

**باستخدام متجهات الوحدة يمكن كتابة اي متجه بدلالة مركباته. فاذا كان المتجهين A,B في المستوى XY , فانه يمكن كتابتهما كالتالي :**

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}$$

ومحصلتهما

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = \vec{R}_x\,\hat{\imath} + \vec{R}_y\,\hat{\jmath}$$

$$\boldsymbol{\vec{R} = (A_x + B_x)\,\hat{\imath} + (A_y + B_y)\,\hat{\jmath}} \qquad \textbf{(1-9)}$$

بحيث ان مركبات المحصلة هي :

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

ومقدار المحصلة

$$\mathbf{R} = \sqrt{\boldsymbol{R_x^2 + R_y^2}} = \sqrt{\boldsymbol{(A_x + B_x)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2}} \qquad \textbf{(1-10)}$$

وزاوية ميلها على المحور X

$$\mathbf{tan\theta} = \frac{\boldsymbol{R_y}}{\boldsymbol{R_x}} = \frac{\boldsymbol{A_y + B_y}}{\mathbf{A}\,\boldsymbol{_x} + \mathbf{B}\boldsymbol{_x}} \qquad \textbf{(1-11)}$$

**مثال (1)**

لدينا متجه A له مركبات بطول ثلاث وحدات باتجاه السالب للمحور x والمركبة الثانية بطول وحدتين باتجاه الموجب للمحور y .

(1) عبر عن المتجه بدلالة وحدة المتجه .

(2) جد مقدار واتجاه المتجه؟

**الحل:**

$A_x = -3$ و $A_y = 2$

**(1)** $\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} = -3\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath}$

**(2)** $|A|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=3.61$

$\theta = \tan^{-1}(A_y/A_x) = \tan^{-1}(2/-3) = 33.7\,°$

**مثال (2)**

لدينا متجهان $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ **و** $\vec{B} = -\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ **.** اوجد ما يلي:

(1) $\vec{A}+\vec{B}$ **,** (2) $\vec{A}-\vec{B}$ **,** (3) $|\vec{A}+\vec{B}|$ **,** (4) $|\vec{A}-\vec{B}|$ **,** (5) اتجاه $\vec{A}-\vec{B}$ **.**

**الحل:**

**(1)** $\vec{A}+\vec{B}=(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath})+(-\hat{\imath}-4\hat{J})=(2\hat{\imath}-6\hat{\jmath})$

**(2)** $\vec{A}-\vec{B}=(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath})-(-\hat{\imath}-4\hat{J})=(4\hat{\imath}+2\hat{\jmath})$

**(3)** $|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{2^2+(-6)^2} = 6.32$

**(4)** $|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{4^2+2^2} = 4.47$

**(5)** For $\vec{A}-\vec{B}$ **,** $\tan\theta = \frac{\boldsymbol{Ay}}{\boldsymbol{AX}}$

$\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6°$

**مثال (3)**

متجه Aطوله (6cm) ويصنع زاوية مقدارها (30) مع الاتجاه الموجب لمحور (X) ومتجه (B) طوله (8cm) بالاتجاه السالب لمحور (X) جد قيمة المحصلة واتجاهها .

**الحل:**

نستخدم هنا طريقة تحليل المتجه الى مركباته

$A_x = A\cos\theta = 6\cos(30) = 6*\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$A_y = A\sin\boldsymbol{\theta} = 6\sin(30) = 6*1/2 = 3$

$R_x = 3\sqrt{3} - 8 = -2.8\ cm$ **,** $R_y = 3cm$

$R = \sqrt{(\boldsymbol{-2.8})^2 + (\boldsymbol{3})^2} = 4.1cm$

$\tan\theta = R_y/R_x = 3/-2.8$

$\theta = \tan^{-1}(3/-2.8) = -47\,°$

**مثال(4)**

$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ **و** $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ **. احسب ما يلي :**

(1) مقدار المتجه $\vec{A}$ وكذلك مقدار المتجه $\vec{B}$.

*(2)مجموع (محصلة) المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$, مقدارا واتجاها.*

(3) $\vec{B}$ - $\vec{A}$

**الحل:**

**(1)** $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

مجموع المتجهين

(2) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2\,\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) + (2\,\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) = 4\,\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$

$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$

مقدار المجموع

$= \sqrt{20} = 4.5$

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = -2/4 = -0.5$

اتجاه $\vec{R}$( اي الزاوية التي تصنعها مع المحور $x$)

$\theta = \tan^{-1}(-0.5) = -26.5°$

(3) $\vec{B} - \vec{A} = (2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) - (2\,\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = 0\,\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} = -6.0$

$|\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(0.0)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36} = 6.0$

## 11-1 ضرب المتجهات ( Multiplication of Vectors )

يخضع ضرب المتجهات لقواعد خاصة سنوجزها في نقطتين :

### 11-1 -1 ضرب متجه في كمية قياسية (Multiplying a vector by a scalar)

حاصل ضرب متجه A بكمية قياسية a , هو كمية متجهة aA ومقدارها يساوي:

$$\mathbf{a}\,|\vec{A}| \qquad \textbf{(1-12)}$$

## 2-11-1 ضرب متجه في متجه (Multiplying a vector by a vector)

يوجد نوعان من ضرب متجه في متجه اخر

**ا- الضرب القياسي : (نتيجته كمية قياسية)**

يعرف الضرب القياسي Scalar product بالضرب النقطي Dot product وتكون نتيجة الضرب القياسي لمتجهين كمية قياسية، وتكون هذه القيمة موجبة اذا كانت الزاوية محصورة بين المتجهين بين 0 و 90 درجة وتكون سالبة اذا كانت الزاوية محصورة بين المتجهين بين 90 و180 درجة وتساوي صفرا" اذا كانت الزاوية 90 درجة.

و يعرف الضرب القياسي كالتالي :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A||B|\ \cos\theta \qquad (1\text{-}13)$$

حيث $\theta$ هي الزاوية الصغرى المحصورة بين A و B

**خصائص الضرب القياسي**

1- الضرب القياسي يخضع لخاصية التبادل

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

2- يحقق خاصية التوزيع لعملية الضرب ، اي

$$\vec{A}.(\vec{B} \cdot \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

3- اذا كان المتجهين متعامدين $\vec{A}\perp\vec{B}$ ، ويعني $\theta = 90°$

$$\vec{A}.\vec{B} = A\ B \cos\theta = 0$$

4- اذا كان المتجهين متوازيان $\vec{A}||\vec{B}$ ويعني $\theta = 0$ او $\theta = 180°$

$$\vec{A}.\vec{B} = A\ B \quad if\ \theta = 0°, \qquad \vec{A}.\vec{B} = -A\ B \quad if\ \theta = 180°$$

5- ناتج الضرب العددي تكون سالبة عندما

$$90° < \theta \leq 180°$$

6 - الضرب العددي لمتجهين متساويان

$$\vec{A}.\vec{A}=A^2$$

لإيجاد قيمة حاصل الضرب نستعين بالحقيقة المتمثلة في ان الزاوية بين المتجهات $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$ هي $90^{\circ}$ وبين $\hat{\imath}, \hat{\imath}$ وبين $\hat{\jmath}, \hat{\jmath}$ وبين $\hat{k}, \hat{k}$ هي صفر.

$\hat{\imath}\cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot \hat{\jmath} = \hat{k}\cdot \hat{k} = 1$ (cos 0= 1)

$\hat{\imath}\cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot \hat{k} = \hat{\jmath}\cdot \hat{k} = 0$ (cos 90= 0)

يعبر عن المتجهات بدلالة وحدات المتجه وكما يلي

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}\,A_z\,, \qquad \vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}\,B_z$$

ضرب مركبات المتجه A في مركبات المتجه B ينتج التالي:

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\,\hat{\imath}.\,B_x\,\hat{\imath} + A_x\,\hat{\imath}.\,B_y\hat{\jmath} + A_x\,\hat{\imath}.\,B_z\,\hat{k}$$
$$+ A_y\hat{\jmath}.\,B_x\,\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}.\,B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath}.\,B_z\,\hat{k}$$
$$+ A_z\,\hat{k}.\,B_x\,\hat{\imath} + A_z\,\hat{k}.\,B_y\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}.\,B_z\,\hat{k})$$

لذلك

$$= \boldsymbol{A_x\,B_x + A_yB_y + A_z\,B_z}\boldsymbol{\vec{A}.\vec{B}} \qquad \textbf{(1-14)}$$

الزاوية بين المتجهين

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{\mathbf{A_x\,B_x + A_yB_y\ + A_z\,B_z}}{|A||B|} \qquad \textbf{(1-15)}$$

**مثال(5)**

للمتجهين $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ , احسب ما يلي :

$\vec{A}.\vec{B}$**(1)**

$\vec{A}.\vec{A}$ **(2)**

**(3)** مقدار كل من المتجهين $|\vec{A}|$و$|\vec{B}|$

**(4)** الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

**الحل:**

**(1)** $\vec{A}.\vec{B}=(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\,.\,(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$

$= -2\hat{\imath}.\hat{\imath}+4\hat{\imath}\,.\hat{\jmath}\ -3\hat{\jmath}.\ \hat{\imath}\ +6\ \hat{\jmath}.\hat{\jmath}$

$=-2+6=4$

**(2)** $\vec{A}.\vec{A}=(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath})\ .(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$

$= 4\hat{\imath}.\hat{\imath}+9\ \hat{\jmath}.\hat{\jmath}$

$=4+9=13$

**(3)** $|A|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$

$|B|=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=\sqrt{(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}$

**(4)** $\vec{A}.\vec{B}\ =|A||B|\ \cos\theta$

$\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|}=\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60.3\ °$

**ب- الضرب الاتجاهي**

يعرف الضرب الاتجاهي Vector product ب Cross product وتكون نتيجة الضرب الاتجاهي لمتجهين كمية متجهة .

ويعرف الضرب الاتجاهي بالمعادلة التالية :

$$\vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \qquad \textbf{(1-16)}$$

لإيجاد الضرب الاتجاهي $\vec{A}x\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نعوض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

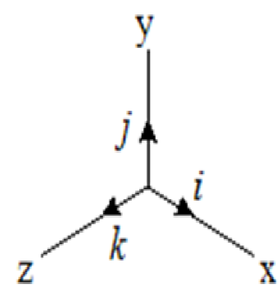
$$\vec{A}x\vec{B} = (A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k})x(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k})$$

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{cases} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{cases}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = A_xB_x\hat{\imath}x\hat{\imath}+A_xB_y\hat{\imath}x\hat{\jmath}+A_xB_z\hat{\imath}x\hat{k}+A_yB_x\hat{\jmath}x\hat{\imath}+A_yB_y\hat{\jmath}x\hat{\jmath}+A_yB_z\hat{\jmath}x\hat{k}$$
$$+A_zB_x\hat{k}x\hat{\imath}+A_zB_y\hat{k}x\hat{\jmath}+A_zB_z\hat{k}x\hat{k}$$

في الضرب الاتجاهي ، من الضروري مراعاة القاعدة التالية في ضرب وحدات المتجه الثلاثة

$$
\begin{array}{lll}
i\times i=0 & i\times j=k & i\times k=-j \\
j\times j=0 & j\times k=i & j\times i=-k \\
k\times k=0 & k\times i=j & k\times j=-i
\end{array}
$$




$$\vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = (\mathbf{A_yB_z} - \mathbf{A_zB_y})\hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{A_zB_x} - \mathbf{A_xB_z})\hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{A_xB_y} - \mathbf{A_yB_x})\hat{\mathbf{k}} \quad \textbf{(1-17)}$$

بالإمكان التعبير عن الضرب الاتجاهي لمتجهين بدلالة المصفوفة

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{matrix}$$

$$= \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{A}}\mathbf{x}\vec{\mathbf{B}} = \left(\boldsymbol{A_yB_z} - \boldsymbol{A_zB_y}\right)\hat{\mathbf{i}} - (\boldsymbol{A_xB_z} - \boldsymbol{A_zB_x})\hat{\mathbf{j}} + (\boldsymbol{A_xB_y} - \boldsymbol{A_yB_x})\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(1-18)}$$

**خصائص الضرب الاتجاهي**

1- يمتلك الضرب الاتجاهي خاصية التبادل ، اي

$$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$$

2- اذا كان المتجهين متعامدين $\vec{A}\perp\vec{B}$ ، ويعني $\theta = 90°$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = AB$$

3- اذا كان المتجهين متوازيان $\vec{A}||\vec{B}$ ويعني $\theta = 0$ او $\theta = 180°$ وعليه

$\vec{A}x\vec{B} = 0$ و $\vec{A}x\vec{A} = 0$

4- تتحقق خاصية التوزيع للضرب بالضرب الاتجاهي

$$\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C}) = \vec{A}x\vec{B} + \vec{A}x\vec{C}$$

**مثال(6)**

**اوجد** $\vec{A}x\vec{B}$ اذا علمت ان $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ , واثبت ان $\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$

**الحل:**

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= ((0)(5)-(4)(-1))\,\hat{\imath} - ((2)(5)-(-3)(-1))\,\hat{\jmath} + ((2)(4)-(-3)(0))\,\hat{k}$$

$$=4\hat{\imath} -7\,\hat{\jmath}+8\hat{k}$$

$$\vec{B}x\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= ((4)(-1)-(0)(5))\,\hat{\imath} - ((-3)(-1)-(2)(5))\,\hat{\jmath} + ((-3)(0)-(2)(4))\,\hat{k}$$

$$= -4\hat{\imath} +7\,\hat{\jmath}-8\hat{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$$

# اسئلة محلولة

# وواجبات

**س1/ اذا كان طول المتجه $\left|\vec{A}\right| = 5units$ ويضع زاوية قياسها 37° مع الاتجاه الموجب لمحور (X) وطول المتجه $\left|\vec{B}\right| = 6units$ باتجاه محور (X) السالب اوجد طول (مقدار) واتجاه محصلة جمع المتجهين ؟**

**الحل :**

$A_x = A\cos\theta = 5\cos 37° = 5 \times 0.8 = 4 \rightarrow \therefore A_x = 4units$

$A_y = A\sin\theta = 5\sin 37° = 5 \times 0.6 = 3 \rightarrow \therefore A_y = 3units$

$\therefore \vec{A} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

$B_x = B\cos\theta = 6\cos 180° = 6 \times (-1) = -6 \rightarrow \therefore B_x = -6units$

$B_y = B\sin\theta = 6\sin 180° = 6 \times (0) = 0 \rightarrow \therefore B_y = 0$

$\therefore \vec{B} = -6\hat{\imath}$

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$

$\vec{R} = [4 + (-6)]\hat{\imath} + [3 + 0]\hat{\jmath} \rightarrow \therefore \vec{R} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ المحصلة

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\therefore R \simeq 3.6\ units$ طول (مقدار) محصلة جمع المتجهين

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) = tan^{-1}(-1.5)$

$\therefore \theta \simeq -56°$ اتجاه محصلة جمع المتجهين

**س2/ اذا كان المتجه $\vec{A} = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ والمتجه $\vec{B} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ اوجد طول (مقدار) واتجاه محصلة جمع المتجهين ؟**

**الحل :**

$\vec{A} = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}\ and\ \vec{B} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \rightarrow \vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$

$\vec{R} = [6 + (-2)]\hat{\imath} + [(-2) + 5]\hat{\jmath}$

$\vec{R} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ المحصلة

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$

$R = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

$\therefore R = 5\ units$ طول (مقدار) محصلة جمع المتجهين

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\theta = tan^{-1}(0.75) \rightarrow \therefore \theta \simeq 37°$ اتجاه محصلة جمع المتجهين

**واجب :**

**H.W1/ اوجد متجه الوحدة للمتجه $\vec{A}$ في السؤال الثاني واثبت ان مقداره يساوي واحد ؟**

**H.W2/ لنفس معطيات السؤال الثاني اوجد طول واتجاه محصلة $2\vec{A} + 3\vec{B}$؟**

**س3/ اذا كان المتجه $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ والمتجه $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ اوجد طول او مقدار واتجاه محصلة طرح المتجهين ؟**

**الحل :**

$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}\ and\ \vec{B} = 6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} \rightarrow \vec{R} = (A_x - B_x)\hat{\imath} + (A_y - B_y)\hat{\jmath}$

$\vec{R} = [2 - 6]\hat{\imath} + [5 - 2]\hat{\jmath}$

$\vec{R} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

$R = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

$\therefore R = 5units$ طول (مقدار) محصلة طرح المتجهين

$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{-4}\right)$

$\theta = tan^{-1}(-0.75) \rightarrow \therefore \theta \simeq -37°$ اتجاه محصلة طرح المتجهين

**واجب :**

**H.W1/ اوجد متجه الوحدة للمتجه $\vec{A}$ في السؤال الثالث واثبت ان مقداره يساوي واحد ؟**

**H.W2/ لنفس معطيات السؤال الثالث اوجد طول واتجاه محصلة $3\vec{A}-2\vec{B}$ ؟**

**H.W3/ المتجه $\vec{A}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ والمتجه $\vec{B}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$ احسب قيمة الضرب العددي للمتجهين وزاوية الاتجاه ما بين المتجهين ؟**

**س4/ اوجد قياس الزاوية (θ) بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا علمت ان :**

$$\vec{A}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}\,,\vec{B}=-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$$

**الحل :**

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\theta=cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$ قانون قياس الزاوية

$$\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{B}=(2)(-1)+(3)(2)\rightarrow \vec{A}.\vec{B}=-2+6=4$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\,units$$

$$|\vec{B}|=\sqrt{(B_x)^2+\left(B_y\right)^2}=\sqrt{(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\,units$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{4}{\sqrt{13}.\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}\simeq\frac{4}{8}$$

$$\cos\theta=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\rightarrow\therefore\ \theta=cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \theta=60^\circ$$ قياس الزاوية (θ) بين المتجهين

**H.W: اوجد حاصل الضرب العددي $\vec{A}.\vec{B}$ عندما $\theta=45^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ لنفس احداثيات المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في السؤال الرابع ؟**

**س5/ اذا كان المتجه $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ يضع زاوية قياسها $37°$ مع الاتجاه الموجب لمحور (X) والمتجه $\vec{B} = 6\hat{\jmath}$ بالاتجاه الموجب لمحور (y) اوجد حاصل الضرب العددي $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ ؟**

**الحل :**

1- الطريقة الاولى :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (4)(0) + (3)(6) \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 18\,units$$

2- الطريقة الثانية :

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$\theta = 90° - 37° = 53°$ قياس الزاوية بين المتجهين

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5units$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(0)^2 + (6)^2} = \sqrt{36} = 6\,units$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = (5)(6)\cos 53°$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 30 \times 0.6 = 18\,units$$

**س6/ اذا كان طول المتجه $\left|\vec{A}\right| = 5\ units$ ويضع زاوية قياسها $53°$ مع الاتجاه الموجب لمحور (X) وطول المتجه $\left|\vec{B}\right| = 10\ units$ ويضع زاوية قياسها $135°$ مع الاتجاه الموجب لمحور (X) اثبت ان : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ ؟**

**الحل :**

$$A_x = A\cos\theta = 5\cos 53° = 5 \times 0.6 = 3units$$

$$A_y = A\sin\theta = 5\sin 53° = 5 \times 0.8 = 4units$$

$$\therefore \vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

$$B_x = B\cos\theta = 10\cos 135° = 10 \times (-0.7) = -7units$$

$$B_y = B\sin\theta = 10\sin 135° = 10 \times (0.7) = 7units$$

$$\therefore \vec{B} = -7\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (3)(-7) + (4)(7) = -21 + 28 = 7$$

$$\vec{B}.\vec{A} = B_xA_x + B_yA_y + B_zA_z$$

$$\vec{B}.\vec{A} = (-7)(3) + (7)(4) = -21 + 28 = 7$$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

**س7/ اذا كان المتجه $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{k}$ والمتجه $\vec{B} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ اوجد حاصل الضرب الاتجاهي $\vec{A} \times \vec{B}$ ؟**

**الحل :**

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

$\vec{A}\times\vec{B}=[(0)(5)-(-1)(4)]\hat{\imath}-[(2)(5)-(-1)(-3)]\hat{\jmath}+[(2)(4)-(0)(-3)]\hat{k}$

$\vec{A}\times\vec{B}=[0+4]\hat{\imath}-[10-3]\hat{\jmath}+[8-0]\hat{k}$

$\therefore\ \vec{A}\times\vec{B}=4\hat{\imath}-7\hat{\jmath}+8\hat{k}$ حاصل الضرب الاتجاهي

**H.W/ اوجد حاصل الضرب العددي $\vec{B}.\vec{B}$ وحاصل الضرب الاتجاهي $\vec{B}\times\vec{B}$ لنفس احداثيات المتجه $\vec{B}$ في السؤال السابع ؟**

**س8/ اذا كان المتجه $\vec{A}=3\hat{\imath}-4\hat{\jmath}+6\hat{k}$ والمتجه $\vec{B}=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}-3\hat{k}$ اثبت ان $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ ؟**

**الحل :**

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 3 & -4 & 6\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}$$

$\vec{A}\times\vec{B}=[(-4)(-3)-(6)(-1)]\hat{\imath}-[(3)(-3)-(6)(2)]\hat{\jmath}+[(3)(-1)-(-4)(2)]\hat{k}$

$\vec{A}\times\vec{B}=18\hat{\imath}+21\hat{\jmath}+5\hat{k}\ \dots\dots\dots(1)$

$$\vec{B}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & -4 & 6\end{vmatrix}$$

$\vec{B}\times\vec{A}=[(-1)(6)-(-3)(-4)]\hat{\imath}-[(2)(6)-(-3)(3)]\hat{\jmath}+[(2)(-4)-(-1)(3)]\hat{k}$

$\vec{B}\times\vec{A}=-18\hat{\imath}-21\hat{\jmath}-5\hat{k}\ \dots\dots\dots(2)$

بمقارنة المعادلة (1) مع المعادلة (2) نجد ان : $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

س9/ اذا كان طول المتجه $|\vec{A}| = 10\ units$ ويضع زاوية قياسها $37°$ مع الاتجاه الموجب لمحور (X) وطول المتجه $|\vec{B}| = 5\ units$ ويضع زاوية قياسها $143°$ مع الاتجاه الموجب لمحور (X) اوجد حاصل الضرب الاتجاهي $\vec{A} \times \vec{B}$ ؟

الحل :

$A_x = A\cos\theta = 10\cos 37° = 10 \times 0.8 = 8\ units$

$A_y = A\sin\theta = 10\sin 37° = 10 \times 0.6 = 6\ units$

$\therefore \vec{A} = 8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$

$B_x = B\cos\theta = 5\cos 143° = 5 \times (-0.8) = -4\ units$

$B_y = B\sin\theta = 5\sin 143° = 5 \times (0.6) = 3\ units$

$\therefore \vec{B} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{A} \times \vec{B} = [(6)(0) - (0)(3)]\hat{\imath} - [(8)(0) - (0)(-4)]\hat{\jmath} + [(8)(3) - (6)(-4)]\hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = [0]\hat{\imath} - [0]\hat{\jmath} + [48]\hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 48\hat{k}$