Proof(2): $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$

$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\{(\cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_2)^2\} = 1}$

$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

Definition Principle Argument of Complex Number
الزاوية الرئيسة للعدد المركب

There is another angle for the Complex number which is Called the principle Argument and denoted by $Arg\,Z$. Since this angle is unique value or is one-valued and is represented by the interval $(-\pi, \pi]$

That is, $-\pi < Arg\,Z \leq \pi$

معنى الكلام اعلاه ...
ان العدد المركب يعرف بزاويه اكبر من الصفر والتي تسمى الزاوية الرئيسة. انها زاوية وحيده القيمه والتي تتواجد في الفترة نفس الفترة $(-\pi, \pi]$.

Properties of argument:

1. $\arg(1/Z) = -\arg Z$
2. $\arg(Z_1 \cdot Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$ (H.W)

Scanned by CamScanner

3. $\arg(Z_1/Z_2) = \arg Z_1 - \arg Z_2$ (H.w)

4. $\arg(\bar{Z}) = -\arg Z$ هذه هي خواص الزاوية الاعتيادية وقد تنطبق بعض من هذه الخواص على الزاوية الرئيسة والبعض منها قد لا ينطبق.

Euler's Formula صيغة اويلر

Since $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

IF we take $x = i\theta$, then we have $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Thus $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ (Euler's Formula).

Proof (1): $\arg(1/Z) = \arg\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right) = \arg\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = -\theta = -\arg Z$

Proof (4): $\arg(\bar{Z}) = -\arg Z$.

let $Z = re^{i\theta} \Longrightarrow \bar{Z} = re^{-i\theta}$

$\therefore \arg(\bar{Z}) = \arg(re^{-i\theta}) = -\theta = -\arg Z$.

Example

Write the Complex number $Z = -1 - i$ by the Polar Form and find Arg Z.

Solution: $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

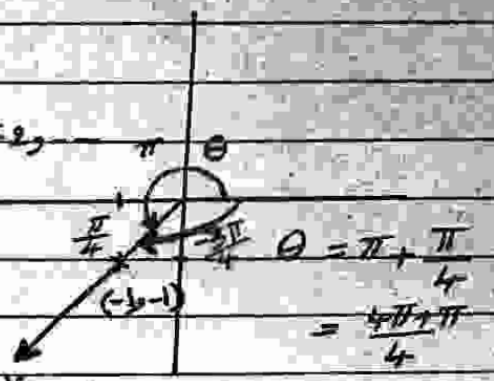
$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = \tan^{-1}1 = \frac{5\pi}{4}$

Scanned by CamScanner

$\therefore -1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$\therefore \arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\therefore \operatorname{Arg}(-1-i) = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{-3\pi}{4}$



$\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{4\pi+\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

لا حظ

$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$

$k=1$

$\operatorname{Arg} z = \arg z - 2\pi = \frac{5\pi}{4} - 2\pi$

$= \frac{-3\pi}{4}$

Problems (H.W)

prove or disprove the following :

1. $\operatorname{Arg} z_1 z_2 \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

2. $\operatorname{Arg} \bar{z} \neq -\operatorname{Arg} z \quad ; \quad z \neq 0$

Powers and Roots of Complex Numbers

القوى والجذور للأعداد العقدية

هذا الموضوع يعتبر مهم جداً في ايجاد القوى والجذور العقدية خصوصاً عندما تكون القوى كبيرة القيمة ويصعب ايجادها بالطرق الاعتيادي لذلك نلجأ الى حلها بالصيغة القطبية .

IF $z = re^{i\theta}$ is a non zero Complex number and n is any integer , then

Scanned by CamScanner

$Z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ which is proved by mathematical induction on n.

In Case $r=1$, then $Z^n = e^{in\theta}$ and by using Euler's formula, we get

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

This statement is called De Moivre's theorem

هذه العلاقة تسمى مرهنة دي موفر وهي تستخدم لايجاد الجذور للاعداد العقدية بصورة عامة اي لحساب جذور المعادلات التي من نوع $Z^n = 1$ والتي تكون لها n من الجذور

In general, the roots of the equation $Z^n = 1$ (where $Z \neq 0$ is a complex number and n is a positive integers) are called the nth-roots of unity)

ولايجاد هذه الجذور نبدأ بالصيغة القطبية لـ Z^n والعدد 1 اي ان

$$Z^n = 1 \Longrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \cdot e^{i0}$$

$$\Longrightarrow r^n = 1 \quad \text{and} \quad n\theta = 0 + 2k\pi$$

$$\therefore r = 1 \quad \text{and} \quad n\theta = 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\text{let } w = e^{\frac{2\pi}{n} i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

Then the roots are: $w^0, w^1, w^2, \ldots, w^n$

Scanned by CamScanner