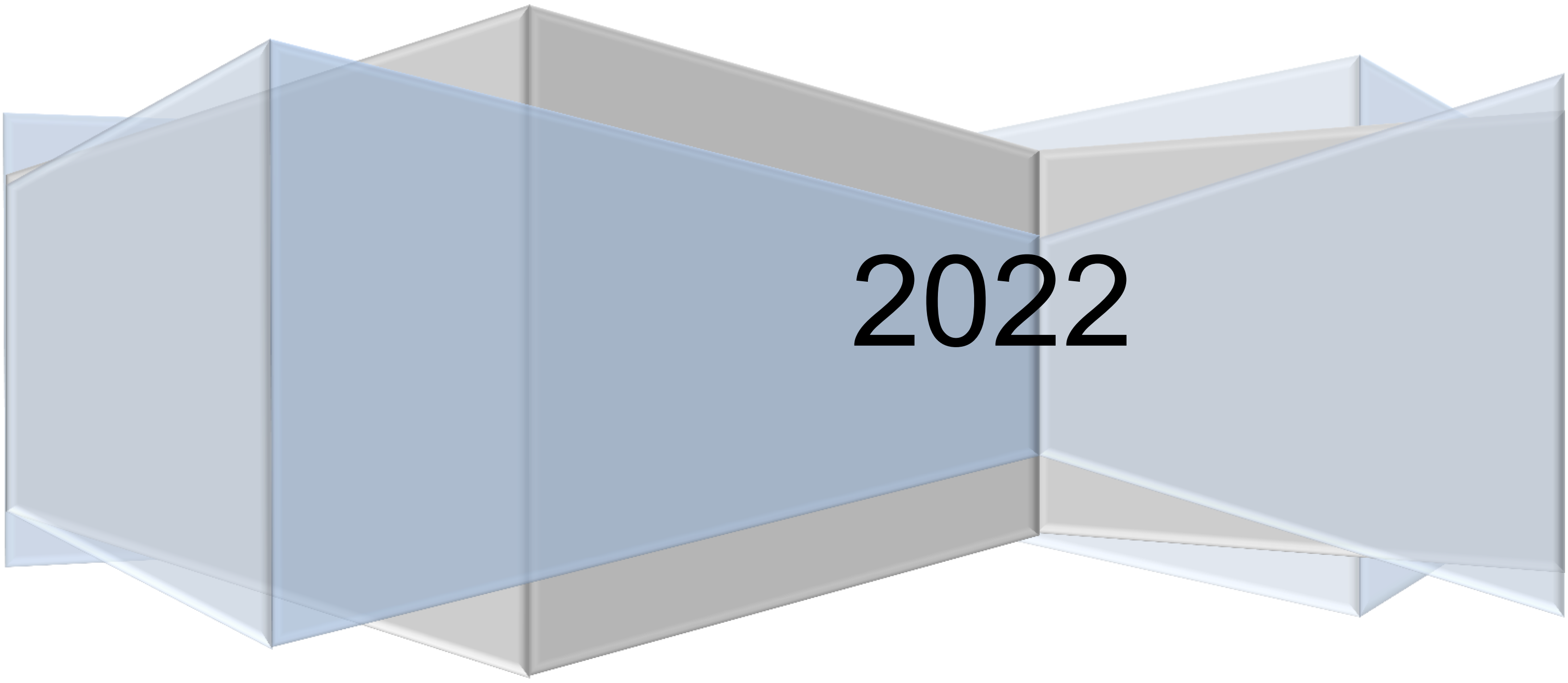
جامعة بغداد
كلية الادارة والاقتصاد

بحوث العمليات لدعم القرار

الاستاذ المساعد الدكتور وقاص سعد خلف



2022

الفصل الاول

لماذا بحوث العمليات؟ (Why Operations Research?)

1.1 التطور التاريخي لبحوث العمليات

ان بحوث العمليات يعتبر من العلوم التي ساهمت في انتصار القوات البرية والجوية البريطانية خلال الحرب العالمية الثانية، ولمحدودية الموارد العسكرية كلَّفت الحكومة البريطانية فريقاً من كبار العلماء لحل مشكلة توزيع مواردها العسكرية وما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري ولقد أطلق على دراسات هذا الفريق اسم بحوث العمليات ثم أخذت هذه التسمية تطلق على كافة الأبحاث والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التوزيع ومسائل اتخاذ القرار، وقد حثَّت النتائج المشجعة لفريق بحوث العمليات البريطاني الإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تكوين فريق مشابه للقيام بالدراسات اللازمة في هذا المجال، فقد وجدت هذه الفرق أن أساليب مسائل التفضيل التقليدية كطريقة مضروب لاغرانج مثلاً ليست ذات فائدة كبيرة في حل مسائل البرمجة الخطية، مما استوجب إيجاد أساليب أكثر فاعلية في عام 1947 م حين **طور جورج دانتزغ** [1] عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) لحل مسألة البرمجة الخطية لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956م ، وبعد نشر **الطريقة المبسطة** (السمبلكس) حدث تسارع كبير في استخدام وتطوير البرمجة الخطية ، ومن المشاركات التطويرية المهمة في ذلك المجال أعمال **Gal** التي قام بها وحده أو بمشاركة آخرين معه، إذ قاموا بصياغة المسألة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية ، وحاليا تستخدم البرمجة الخطية في مختلف المجالات الصناعية والاقتصادية والخدمية والعسكرية وحيثما توجد عدة موارد محدودة الكمية مشتركة في تشكيل أو إنتاج سلعة أو تقديم خدمة معينة [2].

ونظرا للنجاح الذي تحقق فيه واصل القادة العسكريون اهتمامهم بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات والتي تحولت فيما بعد إلى مؤسسة بحوث العمليات وهذا ما شجع على استخدام هذا العلم في العديد من الدول الأخرى وعلى رأسها كندا التي شكلت فريقا مهمته إنتاج المعدات العسكرية من خلال الاستخدام الأمثل للموارد المتوفرة.

وبعد الحرب العالمية الثانية تشجع رجال الأعمال الذين كانوا يبحثون عن حلول لمشاكلهم على إدخال هذا العلم في إدارة المشاريع الاقتصادية ، ففي بريطانيا قام فريق من المهتمين بتكوين نادي بحوث العمليات والذي اطلق عليه فيما بعد تسمية **جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة** والتي أشرفت على إصدار مجلة علمية ربع سنوية ، ابتداء من سنة 1950 والتي تعتبر الأولى من نوعها ، بينما في الولايات المتحدة الامريكية تم تكوين **جمعية بحوث العمليات الأمريكية ومعهد الإدارة العلمية** في سنة 1950 وقد أصدرت بدورها مجلة بحوث العمليات سنة 1952[3] .

وقد تطور استعمال هذا العلم تطور ملحوظا خاصة في ظل تزامنه مع التطور العلمي الكبير الذي تم إحرازه في مجال الحسابات الآلية فقد أخذت التنظيمات المختلفة تولي وبالتدريج اهتماماً أكبر لهذا الفرع من فروع العلم . فمع التعاظم السريع للصناعة الذي أعقب الحرب العالمية الثانية ومع المشكلات التي نشأت وازدادت تعقيداً نتيجة لهذا التعاظم السريع ومع ظهور التخصصات المختلفة في مختلف التنظيمات فقد كانت الحاجة مُلحَّة لزيادة عدد المشتغلين بتطبيق بحوث العمليات لحل مختلف المشكلات. وكانت البداية أن قام عدد من الذين اشتغلوا ببحوث العمليات العسكرية في الحرب العالمية الثانية في الدول المشار إليها أعلاه أن قاموا بتقديم استشارات وحلول للكثير من المشكلات الصناعية والأعمال والإدارات المختلفة بطرق علمية مناسبة في حينها حيث أخذت الشركات النفطية بتطبيق أسلوب البرمجة الخطية في تخطيط الإنتاج وبأوسع المستويات، كما استفادت من تطبيقات بحوث العمليات مصانع البتروكيماويات إضافة إلى المجالات التي تتطلب اتخاذ قرارات تسند إلى أسس علمية ، وتَبِعَ ذلك قيام الكثير من الجامعات والمعاهد العلمية ومراكز الأبحاث في الدول المتقدمة بتدريس بحوث العمليات فيها

بل وتشكلت في هذه الدول جمعيات ومجلات علمية لبحوث العمليات وعُقدت الكثير من الندوات لتعني بهذا الحقل من حقول المعرفة وكان لذلك الأثر الكبير في تطوير واستحداث الكثير من الأساليب والوسائل والطرق العلمية في بحوث العمليات والتي لم تكن معروفة من قبل مما أسهم في تحقيق المزيد من التطور والتقدم في هذا الفرع من فروع العلم [4] .

والخلاصة فإن بحوث العمليات تدخل اليوم في إيجاد الحلول الفعَّالة لكثير من المشكلات في الكثير من التنظيمات نورد منها على سبيل المثال لا الحصر:

- شركات صناعة الطائرات ، صناعة الصواريخ ، صناعة السيارات ، صناعة الأطعمة والأدوية ، صناعة الورق ، صناعة البترول وغيرها من الصناعات المختلفة.
- شركات الاتصالات السلكية واللاسلكية ، النقل (الخطوط الجوية والبحرية والبرية) والكمبيوتر ، الشركات والمؤسسات المالية ، المؤسسات والوكالات الخاصة والحكومية ، المستشفيات والميدان العسكري.
- التخطيط بشتى أنواعه وغيرها كثير .

2.1 أهمية واستخدامات علم بحوث العمليات

تتلخص أهمية بحوث العمليات فيما يلي:

- وسيلة مساعدة في اتخاذ القرارات الكمية باستخدام الطرق العلمية الحديثة .
- يعتبر علم بحوث العمليات من الوسائل العلمية المساعدة في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة وبعيد عن العشوائية الناتجة عن التجربة والخطأ .
- تعتبر بحوث العمليات فن وعلم في آن واحد فهي تتعلق بالتخصيص الكفوء للموارد المتاحة وكذلك قابليتها الجديدة في عكس مفهوم الكفاءة والندرة في نماذج رياضية تطبيقية .
- يسعى هذا العلم إلى البحث عن القواعد والأسس الجديدة للعمل الإداري ، وذلك للوصول إلى أفضل المستويات من حيث الجودة الشاملة ، ومقاييس المواصفات العالمية (الايزو).

- أنها تساعد على تناول مشاكل معقدة بالتحليل والحل والتي يصعب تناولها في صورتها العادية.
- أنها تساعد على توفير تكلفة حل المشاكل المختلفة وذلك بتخفيض الوقت اللازم للحل.
- أنها تساعد على تركيز الاهتمام على الخصائص الهامة للمشكلة دون الخوض في تفاصيل الخصائص التي لا تؤثر على القرار، ويساعد هذا في تحديد العناصر الملائمة للقرار واستخدامها للوصول إلى الأفضل.

3.1 مفهوم وتعاريف بحوث العمليات

لقد اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات وخلط البعض بينها وبين بعض الاصطلاحات الأخرى مثل تحليل العمليات وتحليل النظم .

فما الذي تعنيه بحوث العمليات ؟ وبماذا تختلف عن تحليل العمليات والنظم ؟

لقد حاول بعض الكتاب تعريف بحوث العمليات – ونورد هنا أكثر هذه التعريفات شيوعاً وهو

تعريف **واجنر** حيث عرف بحوث العمليات على انها مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات ولا يعطى هذا التعريف مفهوماً واضحاً لبحوث العمليات فهو يقيدها بحل المشكلات ، كما يحدد نطاقها بالإدارة العليا للمشروعات وبحوث العمليات يتسع نطاقها عن هذا التعريف ، فهي تتعلق باتخاذ القرارات سواءً على نطاق الإدارة التنفيذية أو الإدارة العليا للمشروع .

تعريف مورس و كمبال: فقد عرفا بحوث العمليات بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات ، هذا التعريف يحدد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات وهي استخدام الطريقة العلمية وتوفير الأساس الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية ، إلا أن التعريف يمكن أن يكون تعريفاً مناسباً لأساليب الإدارة الأخرى التي ترتكز على الأساس الكمي مثل محاسبة التكاليف.

اما **جمعية بحوث العمليات البريطانية** فقد عرفت بحوث العمليات بأنها: ((استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة، المعدات، المواد الأولية والأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة)).

في حين اعتمدت جمعية بحوث العمليات الأمريكية على التعريف الاتي: ((ترتبط بحوث العمليات باتخاذ القرارات العلمية حول كيفية تصميم وعمل أنظمة المعدات- القوى العاملة وفقاً لشروط تتطلب تخصيصا في الموارد النادرة)).

ومن التعاريف السابقة يمكننا أن نستنتج الاتفاق على بعض الخصائص التي تحدد إطار بحوث العمليات وهي:

1. استخدام الطريقة العلمية.
2. الارتكاز على الأساس الكمي ممثلاً في أدوات وأساليب بحوث العمليات.
3. تمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وعلى أساس ذلك يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات بأنها الاساليب الرياضية والكمية التي تساعد صانع القرار في اتخاذ القرار الأمثل عند معالجة المشاكل الإدارية والإنتاجية للمؤسسات والاستغلال الأمثل الموارد المتاحة لها وإيجاد افضل الحلول او اكفأئها.

4.1 أهداف علم بحوث العمليات

يهدف هذا العلم الوصول إلى الحل الأمثل وهذا يعني أن الحل الذي يتم التوصل إليه هو أفضل الحلول و لا يوجد بديل آخر يعطي نتائج أفضل ، و تهدف بحوث العمليات لتحقيق الأمثلة و ليس فقط تحسين الوضع الحالي وهذا يعني أنه في ظروف المشكلة موضوع الدراسة يكون الهدف المطلوب تحقيقه هو أفضل وأمثل الحالات المتاحة لبدائل الحل، فالأمر يستدعي معرفة في مجالات عديدة مما يعني أن المدخل الملائم لعلاج المسائل باستخدام بحوث العمليات يستدعي تشكيل فريق عمل لدراسة المسألة وحلها .

يوفر علم بحوث العمليات فائدة كبيرة لصانعي القرار يمكن توضيحها اعتمادا على ما يلي:

- طرح بدائل لحل مشكلة معينة، و ذلك لاتخاذ القرار المناسب اعتمادا على العوامل و الظروف المتوفرة.
- إعطاء صورة عن تأثير العالم الخارجي على الإستراتيجية المتبعة في تنفيذ خطة ما حيث تؤثر الظروف الخارجية على نتيجة الإستراتيجيات التي تتخذها الإدارة.
- صياغة الأهداف و النتائج ، ومدى تأثر هذه الأهداف بكافة العوامل و المتغيرات و سهولة معالجة روابط هذه المتغيرات رياضيا للوصول إلى كميات رقمية يسهل تحليلها.

5.1 مراحل بحوث العمليات

هناك مراحل خمسة يمر فيها الفريق المكلف بدراسة المشكلة وحلها وتشمل ما يلي [6,5]:

اولا: بيان المشكلة (تعريف المشكلة) قيد البحث.

إن بيان المشكلة قيد البحث يتضمن ثلاث عناصر أساسية :

- وصف دقيق لهذه المشكلة.
- تشخيص بدائل (متغيرات) القرار للنظام التي يستطيع الباحث السيطرة عليها.
- تحديد القيود ومتطلبات النظام.

بعبارة أخرى في هذه المرحلة يتم تحديد المشكلة، وما يتعلق بها و ما ينتج عنها بصورة وصفية.

ثانيا: صياغة الانموذج الرياضي

في هذه المرحلة يقوم الباحث بتحويل الشكل الوصفي للمشكلة إلى نموذج رياضي، و يتم في هذا الانموذج تحديد التعابير الكمية للهدف وقيود المسألة بدلالة متغيرات القرار، فإذا كان الانموذج الناتج هو من النماذج الرياضية الشائعة فيمكن الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام التقنيات الرياضية المعروفة.

وإذا كانت العلاقة الرياضية للنموذج معقدة جدا بحيث لا يمكن الحصول على حلول تحليلية عندئذ نستخدم نماذج المحاكاة وأحيانا يضطر الباحث إلى استخدام توليفة نماذج رياضية كالمحاكاة أو الاستقصاء لتمثيل النظام المدروس بالاضافة الى خبرة الباحث الذي يقوم بصياغة الانموذج.

ثالثا: حل الانموذج الرياضي:

في هذه المرحلة نقوم بالتفتيش عن الأساليب والتقنيات الحسابية الملائمة، والتي تعطي حلا أمثلا للنموذج المقترح.

رابعا: فحص فعالية الانموذج الرياضي:

إن الأسلوب الأكثر شيوعا لاختيار صحة وفعالية نموذج يمثل نظاما معينا هو أن نقارن أداء هذا النظام الحالي مع أدائه في الماضي (باستخدام بيانات متاحة في الماضي) هذا مع فرض أن جميع شروط المدخلات تبقى ثابتة، فإذا كان أداء النظام المدروس في الحاضر هو نفس أدائه في الماضي فإن الانموذج يكون صحيحا.

خامسا: تطبيق النتائج النهائية للانموذج الرياضي:

تنفيذ النتائج في الحقيقة ليس من الصعوبة على متخذ القرار وخاصة عند توفر المعطيات الضرورية وايضا ليس من السهولة تنفيذه، لأنه يجب على الإدارة توفير كل الوسائل والإمكانات المادية والبشرية والشروط الضرورية للتنفيذ والتطبيق، وتتطلب هذه المرحلة إشراك جميع المستويات الإدارية واشعارها بأهمية المرحلة حتى يكون هناك تجنيد كامل لكل القوى الفاعلة في التنظيم من أجل الوصول إلى تنفيذ النتائج.

الفصل الثاني

النماذج الرياضية (Mathematical models)

1.2 تعريف الانموذج وأنواعه

الانموذج هو تمثيل الواقع محاولا تفسير سلوك بعض جوانب هدا الواقع بهذا يمكننا تعريف الانموذج على أنه " تجسيد للواقع او سلوك ظاهرة من الظواهر أو تصور لطبيعة العلاقات القائمة بين عدد من المتغيرات ، و ما يحدث بينها من تفاعلات ، فصياغة الانموذج يتطلب أولا تحديد الظاهرة المراد تفسيرها والظواهر أو العوامل التي يمكن أن تساعد في تفسير سلوكها [7].

كما يمكن تعريفه أيضا بما يلي "الانموذج هو تعبير خاص عن الواقع" [8] .

و بالتالي فهدف الانموذج هو:

- إكتساب معارف جديدة من الانموذج الذي يعكس العملية أو النظام في الواقع العملي
- نقل هذه المعارف إلى الواقع العملي.

مع أن بناء الانموذج يهدف إلى التعبير عن الواقع إلا أن هذا الواقع قد يكون من التعقيد بحيث لا يمكن تجسيمه أو تفهمه فهما كاملا، وعليه فإن نجاح الانموذج قد يكون نجاحا جزئيا ولهذا السبب و لأسباب اخرى نذكر منها:

- عدم إتاحة الأدوات والوسائل اللازمة لتمثيل الواقع بدرجة كافية.
- وجود عنصر عدم التأكد

إلا ان هذا لا يعني رفض أو إستبدال منهج بناء الانموذج [9].

2.2 أنواع النماذج

الانموذج عبارة عن عملية تمثيل مفصل للمكونات والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة بها و أسلوب الربط بينها، وعليه فإن وضع الانموذج هو عبارة عن وسيلة فعالة للتوصل إلى قرار سليم ، ومما تجدر الإشارة إليه أن الانموذج عادة أقل تعقيدا من الواقع، ولكن لابد أن يكون كاملا بما فيه لتقريب مظاهر الواقع تحت البحث وهناك أنواع عدة من المناهج يمكن ذكر بعضها على سبيل المثال و هي [10]:

- نماذج معيارية مثل البرامج الخطية والتفاضلية.
- نماذج وصفية وهي تهدف لوصف الحقائق والعلاقات ، كالمحاكاة و نظرية صفوف الانتظار.
- النماذج المجسدة و تستخدم لأغراض المشاهدة.
- النماذج المجردة وتتمثل في النماذج الرياضية.
- النماذج التناظرية.

أما عن المناهج الرياضية أو الرمزية فإنها تعبر عن النظم أو الواقع باستخدام الرموز و العلاقات الرياضية.

3.2 تعريف وأهمية الانموذج الرياضي

1.3.2 تعريف الانموذج الرياضي

هو الانموذج الذي يستعمل الأدوات الرياضية لتفسير ظاهرة معينة، فهو يهدف إلى بيان العلاقات القائمة مع متغيرات الانموذج بأسلوب رياضي لا يشتمل على أية درجة إحتمالية، حيث تستخدم في ظله مفاهيم تجريد المتغيرات من أجل صياغته بالمستوى المطلوب.

و يمكن تعريف الانموذج الرياضي أيضا كما يلي [11]:

"الانموذج الرياضي مثل سائر النماذج ، قد يكون وصفيا، و من ثم يصف (يفسر) النظام الذي يمثله فهو يوفر درجة عالية من التجريد و الدقة في تطبيقه".

و يرى أخرون أن الانموذج الرياضي هو :

"إستخدام التعبير في وص ف الظاهرة المختلفة لنظام أو مشكلة أو ظاهرة لها وجود مادي يمثله فهو يوفر درجة عالية من التجريد و الدقة في تطبيقه" [12] .

و يرى أخرون أن الانموذج الرياضي هو:

"إستخدام التعبير في وصف الظاهرة المختلفة لنظام أو مشكلة أو ظاهرة لها وجود مادي و لا يعارض الانموذج الرياضي النظام أو الظاهرة في شكلها التفصيلي حيث أن فائدته العملية تكمن في قدرته على تلخيص النظام أو الظاهرة".

من هذا يلاحظ أن الانموذج الرياضي هو وصف العلاقة الرياضية بين متغيرات الظاهرة موقع الدراسة بصورة تجريبية و بدقة.

من التعريفات السابقة نستنتج مايلي :

إن النماذج الرياضية تنقسم إلى :

1- نماذج إستنتاجية.

2- نماذج إستقرائية .

إن النماذج الرياضية تعتبر أكثر دقة و تجريدا عموميا، و يمكن إستخدامها بسهولة ذلك بإستخدام الأدوات الرياضية.

لصياغة أي نموذج رياضي يجب الأخذ في الحسبان الإعتبارات التالية [13] :

- تحديد المتغيرات التي ينبغي إدخالها في الانموذج الرياضي.
- تحديد عدد العلاقات التي يمكن إستخدامها لتفسير الظاهرة قيد البحث.
- تحديد الشكل الجبري للعلاقة أو العلاقات الداخلية في الانموذج الرياضي.
- صياغة بعض الإفتراضات المحددة لمعلمات الانموذج الرياضي.

فالانموذج الرياضي عبارة عن علاقة رياضية بين متغير أو متغيرات مفسرة مع المتغير التابع فهو على شكل:

$Y=F(X_1 ,X_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n)$ حيث Y المتغير تابع.

2.3.2 أهمية الانموذج الرياضي

طالما إن العمليات التخطيطية تبدأ بتحديد مشكلة تنتهي بإتباع إستراتيجية فان استخدام النماذج الرياضية يمكن إدراك أهميتها من خلال ما يأتي [10,5]

أ. قدرة الانموذج على تعريف المشكلة ووصفها بالشكل الذي يجعلها مبسطة ومستندة في ذلك على نظرية لتسهيل تصوير الوقع الحقيقي.

ب. إمكانية الانموذج في تعريف القيود والعوامل التي تحدد مدى الحلول المكونة للمسائل.

ت. يستطيع الانموذج التنبؤ بظروف المستقبل من خلال التعرف على طبيعة المشاكل الحالية.

ث. يستطيع الانموذج تقييم الكميات وتكاليفها ومدى تأثيرها ضمن محيط نظام لفهم مستوى الانجاز الكلي، واذا كانت النماذج الرياضية في استخدامها هذا تعبير عن اداة مهمة من ادوات التحليل وانها اداة لاغنى عنها في دراسة معظم المشاكل وتحليلها فان استخدامها بنفس الوقت يوفر لنا جانبين مهمين:

الأول: هو تلافي مخاطر التغيير او اجراء أي تعديل في حقيقة المسالة (أي التحديد الدقيق للعناصر في المشكلة) دون السماح لأي اضافات لعناصر مؤشرة اخرى يمكن ان تضاف بقصد التحيز لحالة معينة.
الثاني: هو لتوفير عاملي الوقت والمال التي لربما تستنفذ فيما لو لم يكن هذا الاسلوب الذي يختصر كل الجهود وتكاليفها التي كانت ستحدث فيما لو اتبع الاسلوب الوصفي او اسلوب المحاكاة لجميع القوى والفعاليات المؤثرة في مشكلة ما.

4.2 خطوات بناء وتقييم الانموذج الرياضي

1.4.2 خطوات بناء الانموذج الرياضي

يتم بناء الانموذج الرياضي وفق الخطوات التالية[14,9] :

1. وضع المتغيرات والقيم البدائية الممكنة

يقصد بها تلك المتغيرات التي يمكن لمتخذ القرار السيطرة عليها أو التحكم فيها ، و يهدف دائما إلى عطائها القيم المثلى و يجب تحديد هذه المتغيرات لنتمكن من إيجاد الحل الأمثل .

2. تحديد التوابث :

و هي القيم التي لا يمكن لمتخذ القرار التحكم فيها أو السيطرة عليها ، و لها دور فعال في حل أي مشكلة لذلك يجب الإهتمام بدقة وإختيارها إختيار صحيحا حتى لا يتم إدخال ثوابت إلى الحل ليست ذات علاقة وثيقة بالمشكلة موضوع البحث.

ومما تجدر ملاحظته أن إختيار الثوابت يستند إلى درجة التجريد المطلوبة في الانموذج ونتائجه.

3. تحديد الهدف :

قد تكون أهداف طبيعية، تتعلق بكفاية إستخدام الموارد المادية و البشرية ، أي ترتبط بالمدخلات أو قد تكون أهداف مكتسبة تتعلق بالموارد التي يرجى الحصول عليها أي ترتبط بالمخرجات و يتم ترجمة أهداف المدخلات والمخرجات إلى تعظيم المخرجات وتخفيض المدخلات.

4. صياغة الانموذج الرياضي :

يصاغ نموذج رياضي يبحث عن العلاقة بين الهدف والمتغيرات وعن العلاقات المتداخلة بين المتغيرات بعضها بعض، ويمكن استخدام الرموز والأرقام للتعبيرعن تلك المتغيرات والعلاقات المتباينة بينها وصياغة ذلك في شكل مجموعة من المعادلات والمتباينات لقد بين(Herbert Simon) مختلف المراحل لبناء الانموذج الرياضي لمختلف مشاكل إتخاذ القرارات و هي كما يلي [14] :

1) بناء الانموذج الرياضي مع الأخذ بعين الاعتبار العوامل الرئيسية للمشكلة موضوع الدراسة.
2) تحديد القيم التقديرية للمعالم المتعلقة بالمشكلة، هذا بإتباع الطرق الاختيارية .
3) تحديد دالة الهدف التي تستعمل لقياس مدى نجاح نشاط المؤسسة أو غير ذلك.
4) إتباع مختلف الخطوات الحسابية بهدف الوصول إلى الحل الأمثل.

إن بناء الانموذج الرياضي يعتبر مرحلة من مراحل إتخاذ القرار بإستخدام الأساليب الكمية بالرغم من غياب نمط معين للمراحل ، إلا أن هناك إطارا عاما للتحليل المنطقي للمشاكل و الذي يمكن إيجازه بالخطوات التالية [16,15]:

أولا : تعريف اوتحديد المشكلة :

يتضمن تعريف المشكلة تحديد نطاق المشكلة قيد التحقيق. يجب أن يتم تنفيذ هذه الوظيفة من قبل فريق غرفة العمليات بأكمله. الهدف هو تحديد ثلاثة عناصر رئيسية لمشكلة القرار: (1) وصف بدائل القرار ، (2) تحديد هدف الدراسة ، و (3) تحديد القيود التي يعمل بموجبها النظام النموذجي، حيث تعرف حدود وحجم المشكلة ، وذلك لتكون موضوعا للبحث والتحليل ، و قد تتماثل ونحن في مرحلة تحديد المشكلة عن الظواهر أو الشواهد التي تدلنا على أن هناك مشكلة حقيقية وليست أعراض وظواهر، في هذا الصدد فإن ما يثبت وجود مشكلة هو:

أ. شعور الإدارة بوجود مشكلة.
ب. وجود بدائل مختلفة يمكن ان ترجح بعضها على بعض.
ت. إن لكل بديل مزايا و نتائج متوقعة منه ، و لكن لا تتوفر فرصة كاملة لأي بديل من هذه البدائل.
ث. وباختصار فإن تحديد المشكلة يعني الشعور بها والرغبة في تحقيق هدف يتمثل في إيجاد حل لها ووجود بدائل عدة يمكن أن توصلنا لحلها و بدرجات متفاوتة، وكان هناك شك في معرفة أي البدائل أكثر تفصيلا.

ثانيا : بناء الانموذج الرياضي

يستلزم بناء النموذج محاولة ترجمة تعريف المشكلة إلى علاقات رياضية. إذا كان النموذج الناتج يناسب أحد النماذج الرياضية القياسية، مثل البرمجة الخطية ، فيمكننا عادةً الوصول إلى حل باستعمال الطرق والاساليب الرياضية المتاحة ، أما إذا كانت العلاقات الرياضية معقدة للغاية بحيث لا تسمح بتحديد حل تحليلي او طريقة رياضية قياسية، فقد يختار فريق بحوث العمليات تبسيط النموذج واستخدام نهج إرشادي او حدسي (Heuristic approach)، أو قد يفكرون في استخدام المحاكاة ، إذا كان ذلك مناسبًا، في بعض الحالات قد يتم الجمع بين النماذج الرياضية والمحاكاة والنماذج التجريبية لحل مشكلة القرار.

ثالثا : إيجاد الحل الأمثل

يعتبر حل النموذج أبسط مراحل بحوث العمليات لأنه يستلزم استخدام برامجيات او خوارزميات تحسين محددة جيدًا. أحد الجوانب المهمة لمرحلة حل النموذج هو تحليل الحساسية لإنه يتعامل مع الحصول على معلومات إضافية حول سلوك الحل الأمثل عندما يخضع النموذج لبعض التغييرات، ايضا هناك حاجة إلى تحليل الحساسية بشكل خاص عندما لا يمكن تقدير معلمات النموذج بدقة وفي مثل هذه الحالات ، من المهم دراسة سلوك الحل الأمثل في جوار المعلمات المقدرة.

رابعا : التحقيق من صلاحية (نفاذية) الانموذج الرياضي

يتم اختيار الانموذج والتأكد من قدرته على التنبؤ بآثار التغيرات التي تدخلها الإدارة على كفاءة النظام باكمله، إذ كلما كانت قدرة الانموذج على التنبؤ جيدة كان ذلك دليل على كفاءته، إذ أن الانموذج بحد ذاته لا يمثل إلا طرفا واحدا أما الطرف الثاني فهو نجاح هذا الانموذج.

تتحقق صلاحية النموذج مما إذا كان النموذج المقترح يفعل ما يدعي القيام به أم لا ، هل يتنبأ بشكل مناسب بسلوك النظام قيد الدراسة؟ في البداية ، يجب أن يقتنع فريق بحوث العمليات بأن مخرجات النموذج لا تتضمن "مفاجآت". بمعنى آخر ، هل الحل منطقي؟ هل النتائج مقبولة بشكل حدسي؟

على الجانب الرسمي ، تتمثل إحدى الطرق الشائعة للتحقق من صحة النموذج في مقارنة ناتجه ببيانات المخرجات التاريخية. النموذج صالح إذا كان في ظل ظروف إدخال مماثلة ، فإنه يكرر بشكل معقول الأداء السابق. بشكل عام ، ومع ذلك ، لا يوجد ضمان بأن الأداء المستقبلي سيستمر في تكرار السلوك السابق. أيضًا ، نظرًا لأن النموذج يعتمد عادةً على الفحص الدقيق للبيانات السابقة ، فعادة ما تكون المقارنة المقترحة مواتية. إذا كان النموذج المقترح يمثل نظامًا جديدًا (غير موجود) ، فلن تتوفر بيانات تاريخية. في مثل هذه الحالات ، قد نستخدم المحاكاة كأداة مستقلة للتحقق من مخرجات النموذج الرياضي.

خامسا : تنفيذ الحل

و هي أن نضع الحل موضع التنفيذ و من ثم متابعته للتأكد من صلاحيته. تطبيق النموذج يتم عن طريق تطبيق بيانات النموذج الرياضي على ارض الواقع ومقارنته مع النتائج التي كانت ستحقق بدونه ، يتضمن تنفيذ حل النموذج الرياضي الذي تم التحقق من صلاحيته ترجمة النتائج إلى تعليمات تشغيل مفهومة ليتم إصدارها للأشخاص الذين سيديرون النظام الموصى به. يقع عبء هذه المهمة في المقام الأول على عاتق فريق بحوث العمليات.

.

2.4.2 تقييم الانموذج الرياضي

بعد بناء الانموذج لابد من تقييمه وإختباره حتى نضمن الحصول على أدق المعلومات منه، اما الإعتبارات التي تحكم عملية التقسيم فهي :

أ. البساطة في الانموذج: وتتوقف على درجة التجريد للفروض التي يقوم عليها الانموذج ، فكلما كانت درجة التجريد عالية كلما كان الانموذج بسيط.

ب. تحقيق الغرض: ذلك أن تحقيق الغرض الذي تم بناء الانموذج من أجله هو الهدف الأساسي من عملية بناء الانموذج.

ت. إعطاء حلول واقية: فقيمة الانموذج تتوقف على قدرته على إعطاء حلول واقية يمكن تنفيذها وهذا يتطلب الإختيار الصحيح للفروض التي من خلالها وفي حدودها يعمل الانموذج.

ث. الحصول على الحل: أي إجراءات حل الانموذج، و يلاحظ أن الحاسبات وتطورها قد ساعدت كثيرا على إعطاء حلول سريعة و دقيقة.

الفصل الثالث

البرمجة الخطية (Linear Programming)

1.3 التطور التاريخي لاسلوب البرمجة الخطية

مع كبر حجم المنشأت وتعدد اوجه نشاطها ظهر كثير من المتغيرات والمشاكل التي تؤثر بصورة او بأخرى في امكانية اتخاذ القرار السليم الامر الذي يتطلب ضرورة البحث عن اسلوب جديد يساعد على اتخاذ عدد من القرارات الحرجة التي تواجه الادارة العليا للمنشأت .اذ تعد البرمجة الخطية احد الاساليب العلمية الحديثة لبحوث العمليات التي ساعدت وتساعد على اتخاذ القرار المناسب.

تعتبر تقنية البرمجة الخطية من أهم التطورات العلمية التي توصل إليها الإنسان في النصف الثاني من القرن العشرين فمند اكتشاف وتطوير أساليبها تمكن المحللون الإداريون من استخدامها في مجالات عدة و متنوعة ونتج عن استخداماتهم هذه وفرة في التكاليف كما مكنت هذه التقنية متخذ القرار من النظر إلى المسائل الإدارية بشكل علمي و بمنظور يختلف عن الطريقة التي كانت تعالج بها الأمور من قبل مما نتج تحقيق المؤسسات الاقتصادية لأرباح كبيرة و تجنبها لخسائر مكنتها من الاستمرار و الاتساع وبالتالي تحسين الخدمات المقدمة للعملاء.

من الناحية التاريخية يمكن اعتبار نموذج فان نيومن (Van Neuman) الخطي للاقتصاد المتطور من أهم الأعمال التي قدمت في ميدان التنهيج الخطي (1935-1936) وبعده قام واسيلي ليونتف (W.leontie***f***)بدراسة نموذج الدخل و الإنفاق في الاقتصاد الأمريكي، وقد قام فريق لبحوث العمليات في الولايات المتحدة برئاسة المارشال وود *Wood* بتطبيق نموذج ليونتيف لدراسة مسائل توزيع الإمكانات في القوات الجوية، ثم تابع تطوره العالم الرياضي انجليزي Dantizg في (1947) اذ اك تشف طريقة (Simplex) أحد طرق الحل للبرمجة الخطية. وقد لاقت هذه الطريقة نجاحا باهرا وحظيت بأهتمام شديد وفتحت الباب أمام العديد من التطبيقات العسكرية والاقتصادية وأخذ التفاعل بين الدراسات النظرية والمسائل التطبيقية يتزايد يندر له وجود في فرع اخر من فروع الرياضيات .[17,1]

ان البرمجة الخطية تختص بأيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة خطية ذات n متغير حقيقي بحيث تخضع هذة المتغيرات الى شروط خطية على شكل متباينات او معادلات.

اما تطبيقات البرمجة الخطية فهي عديدة ومهمة، فشركات البترول تهتم بمزج أصناف مختلفة من البترول الخام بنسب معينة كي تضاعف أرباحها والمهندس الزراعي يهتم في تخطيط الأرض الزراعية لتأتي له بالربح الاوفر،كذلك المختصون في التحليل العددي يسعون للحصول على تقريب امثل للدوال المتصلة.

ان البرمجة الخطية ليست مجرد وسيلة للتطبيقات ولكنها مهمة في دراسة رياضية للمتباينات الخطية ،حيث ان طريقة (Simplex) لاتنحصر اهميتها في كونها وسيلة لحل مسائل البرمجة الخطية لكنها مهمة في دراسة مواضيع مهمة لها صلة بالبرمجة الخطية مثل موضوع اقصى تدفق ،اقصر طريق ،تحليل الشبكي، مسائل الثنائية وتحليل حساسية الحلول تجاه تغير المعطيات.

2.3 المستلزمات الاساسية للبرمجة الخطية

أ. ان يكون هناك هدف مطلوب تحققه مثلا تحقيق أقصى ألارباح أو تخفيض التكاليف الى ادنى حد ممكن.

ب. ان تكون هناك بدائل مختلفة للوصول الى الهدف.

ت. ان تكون الموارد المستخدمة محدودة لأن طريقة البرمجة الخطية تتمثل في كونها طريقة علمية تهدف الى الاستغلال الأمثل للموارد المحدودة لتحقيق هدف معين ، ونقصد بالموارد المحدودة هنا عدد ساعات التشغيل ،المواد الخام ،الأيدي العاملة ، كمية المبالغ المستثمرة.

ث. يجب ان تكون هناك علاقة بين المتغيرات اي توفر عنصر التأكيد وغياب الاحتمالات.

ج. التعبير عن حالة القيود بمعادلات او متباينات خطية.

3.3 تعريف البرمجة الخطية Definition of Linear Programming

وردت عدة تعاريف للبرمجة الخطية من قبل عدة باحثين نذكر منها [16,2] :

- أسلوب رياضي يستخدم في إيجاد الحل الأمثل لكيفية استخدام المشروع لموارده. وتشير كلمة خطية الى ان العلاقات بين المتغيرات المكونة للمشكلة المدروسة هي علاقة خطية. اما كلمة برمجة فتشير الى التكنيك الرياضي المستخدم في إيجاد الحل الأمثل.
- أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والامكانيات المحددة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من الشروط والقيود والمحددات الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي ان توزيعها مثالياً.
- أداة او طريقة تساهم في عملية صنع واتخاذ القرارات الإدارية بصدد توزيع الموارد المادية والبشرية المتاحة والاستغلال الأمثل لها بهدف تحديد أفضل عائد او اقل كلفة.

4.3 استخدامات و فرضيات انموذج البرمجة الخطية

1.4.3 استخدامات البرمجة الخطية

هناك استخدامات متعددة للبرمجة الخطية هي :

- تخطيط و رقابة الإنتاج و تحديد المزيج الإنتاجي .
- الاختيار بين طرائق الإنتاج المختلفة.
- السيطرة على طاقات الآلات لتقليل التكاليف.
- اختيار أفضل طرائق توزيع السلع .
- تحليل العمليات لتحسين الأرباح.
- المساعدة في اتخاذ القرارات الرئيسية للإدارة كالتخطيط و الرقابة.

كما تستخدم البرمجة الخطية في اتخاذ القرار الإداري المناسب لتوزيع الموارد المحدودة لدى المنشأة سواء أكانت في صورة نقود أو موارد آلات بشرية أو وسائل نقل أو موارد طاقة وغيرها بالشكل الذي يحقق أقصى درجة من الكفاءة (أعلى عائد مادي أو اجتماعي أو أقل كلفة ممكنة) .

ولايقتصر استخدام البرمجة الخطية على نشاط معين أو صعيد معين بل تستخدم في كافة الأنشطة (مثل الأنشطة الصناعية والتجارية والعسكرية والحكومية) وعلى المستويات كافة سواء على مستوى المنشأة أو القطاع أو الاقتصاد القومي ككل و ذلك لحل المشكلات التي تواجه هذه الأنشطة ومنها :

- تحديد المزيج من السلع الذي يحقق أفضل استغلال للإمكانيات الإنتاجية المتاحة (الذي يؤدي إلى أقل كلفة ممكنة أو أعلى ربح ممكن).
- تحديد كمية الاستهلاك وبالتالي كمية الإنتاج حسب حاجة السوق أو المزيج الأمثل للمنتوجات.
- تعيين الوظائف على الآلات و المعدات ، والأعمال على الأفراد ، و أوامر التشغيل على المراكز الإنتاجية بالشكل الذي يؤدي أقل زمن ممكن للتنفيذ أو أقل كلفة ممكنة ، أو أعلى ربح ممكن.
- التخطيط الأمثل لعمليات النقل من المنشأة و إليها بالشكل الذي يحقق أقل كلفة ممكنة أو أقصر وقت ممكن.

2.4.3 فرضيات انموذج البرمجة الخطية

البرمجة الخطية كنموذج تستدعي بعض التبسيط مما يجعلها تحتوي فقط على جزء من خصائص المشكلة التي يمثلها وهذا التبسيط يتجلى في مجموعة من الفرضيات التي تعتمدها هذه التقنية و تتمثل هذه الفرضيات في افتراض خطية الانموذج، افتراض التناسبية،قابلية التجزئة، الإضافية و افتراض التأكد التام [18,15]

1. **الخطية :** فيقصد بها أن العلاقة بين كل متغيرات المسألة علاقة خطية أي أن تغيرا ثابتا في قيمة أخذ متغيرات المسألة ينتج عنه تغير ثابت في قيمة باقي المتغيرات .

ويمكن أن يعبر عنها رياضيا :

$$y = a + b x$$

حيث ان :

Y = متغير تابع ،X = متغير مستقل ، (a,b) = كميات ثابتة

2. **الإضافة:** يقصد بذلك أن كميات الموارد الأولية الداخلة في الإنتاج وكميات الإنتاج قابلة للإضافة وأن مجموع نواتج أنشطة الإنتاج تمثل مجموع نواتج كل نشاط إنتاجي يشكل منفصل ويمكن تمثيلها رياضيا:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \mathrm{y}$$

3. **التجزئة:** أي يمكن لمتغيرات المسألة أن تكون قيما جزئية تسمح بإمكانية التعبير عن هذه المتغيرات بخط مستقيم متصل يعطى الاستمرارية للدالة.
4. **المحدودية:** أي عدم وجود عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة.
5. **التناسب:** أي أن مساهمة كل متغير في الدالة الهدف تتناسب طرديا مع أهمية هذا المتغير.
6. **عدم السالبية:** تعني أن تكون قيم المتغيرات حقيقية وغير سالبة وهذا ما يفرضه المنطق، وتعرف هذه القيود باسم " القيود المنطقية ".
7. **التأكد:** أن تكون جميع القيم معلومة ، و لا توجد قيم احتمالية.
8. **قابلية القسمة أو الكسر:** وهذه الفرضية تعني أن متغيرات القرار يمكن أن يكون قيم غير صحيحة أي قيم كسرية.
9. **الاستقلالية:** إن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي أن عناصر الإنتاج مستقلة.

العلاقة المحددة: أن تكون جميع العلاقات الرياضية معروفة و ثابتة.

5.3 صياغة النماذج الخطية Linear Programming Models Formulation

تعد عملية تكوين او بناء أنموذج البرمجة الخطية اهم خطوة او مرحلة في عملية صنع القرار، ويقصد بالأنموذج التعبير عن العلاقات الحقيقية (الواقعية) بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله وتبعاً لصيغة المشكلة يمكن تقييم وحل الانموذج او هو عبارة عن فكرة او عمل فني يحتوي على جميع العناصر الأساسية والرئيسية للمشكلة ويجب ان يكون الانموذج مبسط قدر الإمكان لكي يعطي النتائج المطلوبة مما يؤدي الى جعل مشكلة القرار من السهولة السيطرة عليها، ويتطلب هذا الامر توافر ثلاث عناصر أساسية وهي[10,1] :

1. **دالة الهدف Objective Function**

وهي الدالة المراد تعظيمها (تكبيرها) في حالة وجود أرباح وتسمى **Max (Z)** او تقليلها (تدنيتها) في حالة وجود كلف وتسمى **Min (Z)** عند صياغة انموذج البرمجة الخطية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوب دراستها وتحليلها.

2. **القيود Constraints**

وتشير هذه القيود الى كميات المواد المتاحة او المتوفرة، الطاقة القصوى لتشغيل المكائن او ميزانية الشركة ... الخ ، ويتم التعبير عنها اما بشكل معادلات او متراجحات.

3. **شرط (المتغيرات) غير السالبة Non-Negative Variables**

وهذا يعني ان جميع متغيرات القرار التي هي قيد الدراسة (عدد الوحدات المنتجة) يجب ان تكون صفرية او موجبة وعليه يمكننا من صياغة أنموذج البرمجة الخطية بشكله العام وكالاتي:

$$Max\ \boldsymbol{or}\ Min\ (Z) = \sum_{j=1}^{j=n} C_j X_j$$

S.to.

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b_i$$

$$X_j \begin{pmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ U.R.S. \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

اذ ان:

C_j، b_i، a_{ij} : ثوابت من سياق المشكلة المدروسة

Z : تمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها او تقليلها

X_j : المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار فيها

b_j : تمثل الإمكانيات المتاحة او الموارد المحددة

C_j : تمثل الكلفة او الربح من انتاج وحدة واحدة من النشاط (j)

a_{ij} : تمثل كمية الموارد المحددة من النوع (i) واللازم تخصيصها الى النشاط (j)

للتخلص من المتغيرات (متغيرات القرار) السالبة $(X_i \leq 0)$ والغير مقيدة بإشارة $(X_i\ U.\text{R.S.})$ يتم افتراض ما يلي:

- $X_i \leq 0 \rightarrow X_i = -X_i' \rightarrow X_i' = -X_i \quad \& \quad X_i' \geq 0$
- $X_i\ U.\text{R.S.} \rightarrow X_i = X_i' - X_i'' \quad \& \ X_i',\ X_i'' \geq 0$

- متغيرات القرار هي قرارات متغيرة وعلى عدة أنواع: -

1. مستمرة (متصلة) Continuous
2. متقطعة (صحيحة) Integer
3. متقطعة (ثنائية) Binary (0-1)
4. غير مقيده بإشارة Unrestricted in Sign

6.3 امثلة محلولة [17,10,5]

المثال (1): مصنع ينتج ثلاثة أنواع من المنتجات P_3, P_2, P_1 وتدخل هذه المنتجات خلال عملية الإنتاج على ثلاثة مكائن ايضاً M_3 , M_2 , M_1 وقد كان الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة من كل نوع (منتج) والطاقة القصوى في الاسبوع الواحد موضحة كما في الجدول ادناه:

الطاقة القوى للمكائن دقيقة / أسبوع	**الوقت بالساعات**			**المنتجات** **المكائن**
	P_3	P_2	P_1	
5600	2	3	2	M_1
3600	3	---	4	M_2
4200	---	5	2	M_3

حيث ان الرمز (---) يشير الى ان العملية الانتاجية لمنتج معين لا يستوجب ان تمر بهذا النوع من المكائن ،المطلوب: صياغة أنموذج البرمجة الخطية، اذا علمت ان ربح الوحدة الواحدة من المنتج P_3, P_2, P_1 هي 4 , 3 , 6 دولار على التوالي

الحل: لنفرض ان

X_1 : يمثل الكمية المنتجة بالاسبوع الواحد من المنتج P_1

X_2 : يمثل الكمية المنتجة بالاسبوع الواحد من المنتج P_2

X_3: يمثل الكمية المنتجة بالاسبوع الواحد من المنتج P_3

وعليه فان أنموذج البرمجة الخطية يكون كالاتي:-

$$Max\ (Z) = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

S.to.

$$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq \frac{5600}{60}$$ نحول الدقائق الى ساعات

$$4X_1 \qquad + 3X_3 \leq \frac{3600}{60}$$

$$2X_1 + 5X_2 \qquad \leq \frac{4200}{60}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال (2): تنتج شركة نوعين من المنتجات التي تباع كمدخلات انتاج لصناعة مساحيق الغسيل وبناء على دراسة تحليلية لمستويات الخزين والطلب المتوقع للشهر القادم، حددت إدارة الشركة ان الإنتاج الكلي للمنتجين B , A معاً يجب ان لا يقل عن 350 غالون، هناك طلبية من احد الزبائن الرئيسيين مساوية حتما الى 125 غالون من المنتج A يجب تلبيته. المنتج A يحتاج الى انتاج الغالون الواحد منه لساعتين تشغيل بينما يحتاج المنتج B الى ساعة واحدة تشغيل. عدد الساعات المتوفرة (المتاحة) للشهر القادم هي 600 ساعة، وكلفة انتاج الغالون من المنتج A هي 2 دينار والمنتج B هي 3 دينار، المطلوب بناء انموذج البرمجة الخطية الذي يحقق منفعة الشركة؟

الحل: نفرض ان

X_1: يمثل الكمية المنتجة او عدد الوحدات من المنتج A (بالغالون)

X_2: يمثل الكمية المنتجة او عدد الوحدات من المنتج B (بالغالون)

وعليه فان أنموذج البرمجة الخطية يكتب كالاتي:

$$Min\ Z = 2X_1 + 3X_2$$

S.to.

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

$$X_1 \quad = 125$$

$$2X_1 + X_2 \leq 600$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (3): استلمت شركة كيميائية طلباً لانتاج كمية مساوية الى 1400 كيلو غرام لخليط مكون من ثلاثة مركبات وبالمواصفات التالية:

1. يجب ان لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كيلو غرام من المركب الأول
2. يجب ان يحتوي الخليط على الأقل 200 كيلو غرام من المركب الثاني
3. يجب ان يحتوي الخليط على الأقل 100 كيلو غرام من المركب الثالث

اذا علمت ان كلفة الكيلوغرام من المركب الأول، المركب الثاني، المركب الثالث، هي 5 , 3 , 2 دولار على التوالي، المطلوب كتابة أنموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟

الحل: لنفرض ان

X_1: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الأول

X_2: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثاني

X_3: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثالث

وعليه فان انموذج البرمجة الخطية يكتب كالاتي:

$$Min\ Z = 5X_1 + 3X_2 + 2X_3$$

S.to.

$$X_1 \leq 400$$

$$X_2 \geq 200$$

$$X_3 \geq 100$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1400$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال (4):

يقوم احد المصارف بانجاز اربعة انواع من المعاملات الخاصة بالمواطنين ويطمح المصرف ان يكون الانجاز لهذه المعاملات اكبر مايمكن لتعظيم الحوافز المستحصلة منها وان الحوافز التي يقدمها المصرف لموظفيه جراء انجازه لهذه المعاملات هي (6، 4 ، 7، 9) دولار وعلى التوالي. ان عدد الموظفين المسؤولين عن انجاز هذه المعاملات هو 2 موظف بالاضافة الى مدير المصرف ، يتطلب انجاز كل معاملة مرورها على الموظفين الثلاث وكما يلي لكل معاملة (3,6,4)، (2,4,5)، (1,5,4) ، (3,2,3) دقيقة وعلى التوالي، علما ان الوقت الفعلي المتاح للعمل يوميا في المصرف هو 6 ساعات وان المصرف ملزم بانجاز ما لا يقل عن 10 معاملات يوميا من النوع الثاني وتسليمها الى البنك المركزي كما ان هناك تعليمات من السيد مدير المصرف تقضي بان يكون هناك انجاز لايقل عن 30 معاملة يوميا من جميع الانواع وان لايزيد عن 7 من النوع الاول ، المطلوب بناء نموذج برمجة خطية لتعظيم الحوافز المستحصلة من انجاز هذه المعاملات.

الحل:

نفرض ان عدد العاملات المنجزة من النوع الاول هي X_1

نفرض ان عدد العاملات المنجزة من النوع الثاني هي X_2

نفرض ان عدد العاملات المنجزة من النوع الثالث هي X_3

نفرض ان عدد العاملات المنجزة من النوع الرابع هي X_4

$Max\ (Z)= 6X_1+4X_2+7X_3+9X_4$

S.to

$4X_1+5X_2+4X_3+3X_4 \leq 360$

$6X_1+4X_2+5X_3+2X_4 \leq 360$

$3X_1+2X_2+X_3+3X_4 \leq 360$

$X_2 \geq 10$

$X_1+X_2+X_3+X_4 \geq 30$

$X_1 \leq 7$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

مثال (5):

يمتلك احد صناع الاثاث 6 وحدات من الخشب و 28 ساعه من الوقت يستغرق في صنع شاشات ديكور وقد باع نوعين منها في الماضي و لذلك فانه سيقيد نفسه بهما و يقدر ان النوع الاول يحتاج الى وحدتين من الخشب و سبع ساعات بينما يحتاج من النوع الثاني وحده واحده من الخشب وثمانية ساعات و تقدر ارباح النوعين ب 120 دولار و 80 دولار على التوالي، المطلوب: كم عدد شاشات الديكور التي يجب ان يقوم بتصنيعها من كل نوع اذا اراد تعظيم العائد من المبيعات؟

الحل:

نفرض ان عدد الشاشات المصنعة من النوع الاول هي X_1

نفرض ان عدد الشاشات المصنعة من النوع الثاني هي X_2

$Max\ (Z) = 120X_1+80X_2$

S.to:

قيد عدد وحدات الخشب	$2X_1+X_2 \leq 6$
قيد الساعات اللازمة للانجاز	$7X_1+8X_2 \leq 28$
قيد عدم السالبية وشرط الاعداد الصحيحة	$X_1, X_2 \geq 0$ and Integers

مثال (6):

تقوم شركه دهوك للمناجم بتشغيل ثلاثه مناجم بمحافظة دهوك ويفصل الخام من كل منجم الى درجتين قبل الشحن ويبين الجدول التالي الطاقة الانتاجية اليوميه للمناجم وكذلك التكلفة اليومية

تكلفة التشغيل 1000دولار \يوم	خام قليل الجودة طن\يوم	خام عالي الجودة طن \يوم	
20	4	4	منجم 1
22	4	6	منجم 2
18	6	1	منجم 3

وقد التزمت الشركه بتسليم 54 طنا من الخام عالي الجوده و 65 طنا من القليل الجوده في نهايه كل اسبوع كما ان الشركة تعاقدت مع العمال لتضمن لها تواجد العمال بطول اليوم او جزء من اليوم اثناء فتح المنجم.

المطلوب: حدد عدد الايام التي يجب ان يعملها كل منجم خلال الأسبوع (7 أيام) المقبل للوفاء بالتزامات الشركة باقل تكلفه ممكنه.

الحل:

نفرض ان عدد الايام التي يعملها المنجم الاول خلال الاسبوع هي X_1

نفرض ان عدد الايام التي يعملها المنجم الثاني خلال الاسبوع هي X_2

نفرض ان عدد الايام التي يعملها المنجم الثالث خلال الاسبوع هي X_3

$Min\ (Z) = 20000X_1 + 22000\ X_2 + 18000X_3$

S.to:

$4X_1+6X_2+ X3 \geq 54$ قيد تسليم خام عالي الجودة

$4X_1+4X_2+ 6X_3 \geq 65$ قيد تسليم خام قليل الجودة

قيود الايام المحددة وهي اسبوع:

$X_1 \leq 7$

$X_2 \leq 7$

$X_3 \leq 7$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ قيد عدم السالبية

مثال (7):

يبدا احد الصناع الاسبوع الاخير من الانتاج في تصنيع صناديق خشبيه لاجهزه التلفزيون موديلات 4,3,2,1 و كل منها يجب ان يجمع ثم يعمل له الديكور اللازم وتحتاج هذه الموديلات الى 5,3,5,4 ساعات على التوالي للتجميع وكذلك 3,3,1.5,2 ساعات على التوالي لعمل الديكورات و تقدر الارباح من الموديلات المختلفه بين 9,6,7,7 دولارات على التوالي والوقت المتاح للصانع لتجميع هذه المنتجات هو 30000 ساعه (750 عامل تجميع يعملون 40 ساعه /اسبوع) وكذلك 20000 ساعه وقت متاح لعمل الديكورات(500 عامل ديكور يعملون 40 /اسبوع) ماهو العدد الذي ينتجه الصانع خلال هذا الاسبوع الاخير لتعظيم الربح مع افتراض ان كل الوحدات المنتجه ستباع؟

الحل:

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من الموديل الاول هي X1

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من الموديل الثاني هي X2

نفرض ان عدد الوحدات المنتجة من الموديل الثالث هي X3

$Max\ (Z)$ = 7X1+ 7 X2+6X3+9X4

S.to:

1. قيد التجميع $4X1+5X2+3\ X3+ 5X4 \leq 30000$
2. قيد عمل الديكورات $2X1+ 1.5X2+ 3X3+ 3X4 \leq 20000$
3. قيد عدم السالبية وشرط الاعداد الصحيحة $X1, X2,X3,X4 \geq 0$ and Integers

7.3 أمثلة غير محلولة[16,15,1]

<u>س1/</u> قامت شركة صناعة الإطارات بدراسة أجرتها لثلاث قياسات هي C , B , A علماً ان ربح الاطار الواحد 150 , 180 , 200 للأنواع الثلاث، وتمر هذه الإطارات بثلاث مراحل عمل. يستغرق النوع (A) فيها 2 , 4 , 3 ساعة والنوع (B) 4 , 1 , 3 ساعة والنوع (C) 6 , 3 , 5 ساعة علماً ان الطاقة القصوى للمرحلة الأولى بلغت (8) ساعة والثانية (12) ساعة والثالثة (16) ساعة. المطلوب صياغة انموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اعلى ربح؟

<u>س2/</u> تقوم احدى الشركات بصنع ثلاث منتجات C , B , A من خلال مرورها على ماكنتين ويوضح الجدول ادناه المعلومات التالية:

الطاقة الدنيا بالساعات	**الزمن بالدقائق**			**المنتجات** **المكائن**
	C	**B**	**A**	
8	300	----	180	**الماكنة الأولى**
10	420	120	240	**الماكنة الثانية**
	65	40	30	**كلفة انتاج الوحدة**

المطلوب: صياغة انموذج البرمجة الخطية؟

<u>س3/</u> تقوم شركة الخياطة الحديثة بصنع ثلاثة أنواع من المنتجات C , B , A وقد كانت كمية القماش الداخلة في صناعة البدلة الواحدة من كل نوع 4 , 6 , 3 متر. وقد كان الزمن المستغرق لصنع البدلة الواحدة من كل نوع 0.5 , 0.75 , 0.25 ساعة، علماً ان الكمية المتاحة من القماش في الشركة للأنواع الثلاث لا يتجاوز (600) متر والطاقة التشغيلية القصوى للعمل بلغت (540). المطلوب صياغة انموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اقل كلفة علماً ان كلفة البدلة الواحدة للأنواع الثلاث كانت (450) , (750) , (600) دولار؟

س4/ تقوم احدى الشركات بتصنيع ثلاث منتجات A , B , C من خلال مرورها على مراحل عمل الأولى يدوية والأخرى ميكانيكية، ويوضح الجدول ادناه المعلومات التالية:

المراحل **المنتجات**	**زمن العمل اليدوي (ساعة)**	**زمن العمل الميكانيكي (ساعة)**	**ربح الوحدة الواحدة**
A	3	1	17
B	2	4	22
C	5	2	19
الطاقة القصوى	14	9	

المطلوب: صياغة انموذج البرمجة الخطية الذي يحقق المنفعة القصوى؟

س5/ تقوم احدى الشركات بصنع ثلاث منتجات A , B , C من خلال مرورها على ماكنتين وقد كانت لديك المعلومات التالية بالجدول ادناه

المعلومات **المنتجات**	**زمن الماكنة (1) (دقيقة)**	**زمن الماكنة (2) (دقيقة)**	**اعلى انتاج**	**ادنى انتاج**	**الربح**
A	40	20	80	---	55
B	20	25	60	---	45
C	45	15	---	100	60
الزمن المتاح (ساعة)	12	15			

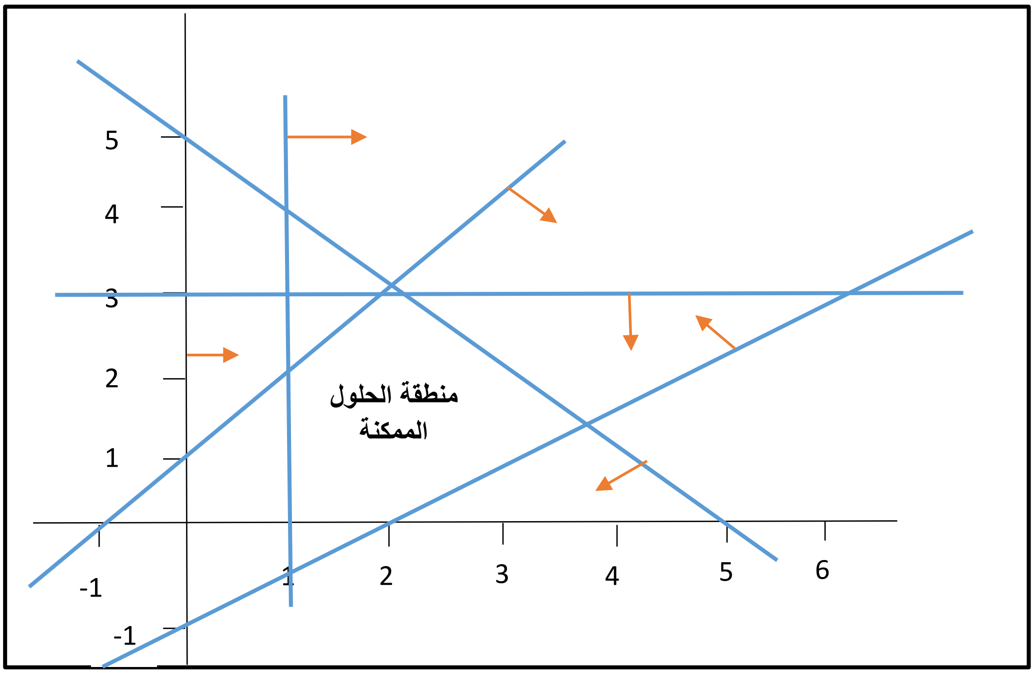
المطلوب: صياغة انموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اعلى ربح؟

س6/ منتجان مصنعان باستخدام ثلاث مكائن وذلك عن طريق مرورها بعدة عمليات تتابعيه. الوقت المتاح للمصنع هو 10 ساعات في اليوم، وان وقت المكائن والربح لكل منتج موضحاً ادناه

المنتجان	**الوقت بالدقائق للمكائن**			**الربح**
	الماكنة (1)	**الماكنة (2)**	**الماكنة (3)**	
1	10	6	8	2$
2	5	20	15	3$

المطلوب: صياغة انموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اعظم ربح؟

س7/ اوجد مجموعة القيود المرتبطة بمنطقة الحلول الممكنة في الشكل ادناه



8.3 صيغتا أسلوب البرمجة الخطية

توجد هناك صيغتان لأنموذج البرمجة الخطية [18,10,1]:

1.8.3 الصيغة القانونية Canonical Form

قبل البدء باستخدام أي طريقة من طرق الحل للوصول الى الحل الأمثل (Optimal Solution) فان المشكلة يجب ان تكون بإحدى الصيغتين القانونية (Canonical) او القياسية (Standard) وسوف نبدأ بالصيغة القانونية اولاً. ان الصيغة القانونية لأنموذج البرمجة الخطية بشكلها العام كالاتي:

$$Max\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

S.to.

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} X_j \leq \mp b_i \quad , i = 1.2.\ldots.m$$

$$X_j \geq 0 \quad , j = 1,2,\ldots,n$$

ونلاحظ من انموذج البرمجة الخطية بصيغته القانونية أعلاه بانه يمتاز بما يلي:

1. دالة الهدف من نوع (Max) فقط
2. جميع القيود من نوع ($\leq$) فقط
3. ليست بالضرورة ان تكون قيم الطرف الأيمن موجبة للقيود
4. جميع متغيرات القرار كميات صفرية او موجبة $\left(X_j \geq 0\right)$

- وقد تصادفنا بعض التحويرات عند التحويل الى الصيغة القانونية

a. اذا كانت دالة الهدف من نوع (Min) فيجب تحويلها الى (Max)

وكمثال

$$Min\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

فأنها تكافئ

$$Max\ (-Z) = -(C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n)$$

b. عند وجود احد القيود بصيغة معادلة (=) فيمكن تحويل هذه المعادلة الى متباينتين متعاكستين بالاتجاه احدهما من نوع (≤) والأخرى (≥)، ثم تحول المتباينة من نوع (≥) الى (≤) عن طريق ضربها في (-1) لكي تتوافق مع الشكل او الصيغة القانونية وكمثال على ذلك:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \text{ يتحول الى } \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 & \leq b_1 \\ -(a_{11}X_1 + a_{12}X_2) & \leq -b_1 \end{cases}$$

c. في حالة وجود قيم مطلقة (Absolute Value) فان معالجة هذه الحالة تتم كما يلي وكمثال على ذلك:

$$|a_{11}X_1 + a_{12}X_2| \leq b_1 \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 & \leq +b_1 \\ -(a_{11}X_1 + a_{12}X_2) & \leq +b_1 \end{cases}$$

d. الى هذه النقطة تم افتراض ان متغيرات القرار كميات موجبة او صفرية $\left(X_j \geq 0\right)$ ولكن من الممكن في التطبيق العملي ان تظهر احد المتغيرات سالبة او غير محددة بإشارة فعندها يتم التخلص من هذه الحالة عن طريق:

1. $X_i \leq 0$ كمية سالبة $\rightarrow$ $\acute{X_\imath} = -X_i$ $\quad or \quad$ $X_i = -\acute{X}_\imath$
2. $X_i\ is\ U$.R.S. $\rightarrow$ *غير مقيد بإشارة* $X_i = \acute{X_\imath} - \acute{\acute{X}}_\imath$

2.8.3 الصيغة القياسية Standard Form

تعد هذه الصيغة أفضل من السابقة لأنها تستخدم في الطريقة العامة المعتمدة في تحليل البرمجة الخطية أي الطريقة المبسطة (Simplex Method) حيث لا يمكن تطبيق الطريقة المبسطة الا بعد تحويلها الى الصيغة القياسية، ان الصيغة العامة لأنموذج البرمجة الخطية بصيغته القياسية هو كالاتي:

$$Max\ \ or\ \ Min\ \ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

S.to.

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} X_j \mp S_i = + b_i$$

$$X_j \geq 0 \ \ ; \ \ j = 1, 2, \dots, n$$

$$S_i \geq 0 \ \ ; \ \ i = 1, 2, \dots, m$$

ونلاحظ من انموذج البرمجة الخطية أعلاه بانه يمتاز بما يلي:

1. دالة الهدف من نوع Max او Min
2. جميع القيود تكون على شكل معادلات (مساواة)
3. قيم الطرف الأيمن كميات موجبة فقط $(b_i \geq 0)$
4. جميع متغيرات القرار كميات موجبة $\left(X_j \geq 0\right)$

- ويتم الاخذ بنظر الاعتبار التحويرات عندما تكون القيود من نوع متباينات حيث يتم تحويلها الى معادلات وذلك عن طريق جمع او طرح متغير موجب (Non-Negative) من الجهة اليسرى للقيود وكما يلي:

إذا كان القيد من نوع $(\leq)$ فيتم إضافة متغير موجب للجانب الايسر من القيد ويسمى هذا المتغير بالمتغير الراكد (Slack Variable) ويمثل النقص في الجانب الايسر للقيد مقارنة بما متوفر من الجانب الأيمن وكمثال على ذلك:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \quad \text{يحول الى} \rightarrow \ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + S_1 = b_1$$

a. إذا كان القيد من نوع $(\geq)$ فيتم طرح متغير موجب من الجانب الايسر للقيد ويسمى هذا المتغير بالمتغير الفائض (Surplus Variable) ويمثل الزيادة في الجانب الايسر او الإضافة الى الجانب الأيمن وكمثال على ذلك:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \geq b_1 \ \text{يحول الى} \rightarrow a_{11}X_1 + a_{12}X_2 - S_1 = b_1$$

3.8.3 أمثلة محلولة على الصيغة القانونية والصيغة القياسية

<u>مثال (1)</u>: اوجد الصيغة القانونية والقياسية لأنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$Min\ Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3$

S.to.

$|4X_1 + 5X_2 + 8X_3| \geq 4$

$5X_1 + X_2 - X_3 = 3$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 8$

$X_1 \leq 0$, $X_2 \leq 0$, X_3 U.R.S.

<u>الحل:</u>

1. الصيغة القانونية

دالة الهدف في الصيغة القانونية تكون تعظيم (Max)

$Max\ (-Z) = -(3X_1 + 4X_2 + X_3)$

S.to.

$4X_1 + 5X_2 + 8X_3 \geq 4 \ldots\ldots \times\ (-1)$

$-(4X_1 + 5X_2 + 8X_3) \geq 4 \ldots\ldots \times\ (-1)$

$5X_1 + X_2 - X_3 \leq 3$

$(5X_1 + X_2 - X_3) \geq 3 \quad \ldots\ldots \times\ (-1)$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 8 \ldots\ldots \times (-1)$

$X_1 \leq 0$; $X_2 \leq 0$; X_3 U.R.S.

ملاحظة:القيد المطلق موجب مرة وسالب مرة

$Max\ (-Z) = -(3X_1 + 4X_2 + X_3)$

S.to

$-4X_1 - 5X_2 - 8X_3 \leq -4$

$4X_1 + 5X_2 + 8X_3 \leq -4$

$5X_1 + X_2 - X_3 \leq 3$

$-5X_1 - X_2 + X_3 \leq -3$

$-X_1 - X_2 - X_3 \leq -8$

$X_1 \leq 0$; $X_2 \leq 0$; X_3 U.R.S.

- المتغيرات يجب ان تكون جميعها (≥ 0)

$Let\ X_1 = -X_1'\ ;\quad X_2 = -X_2'\ ;\quad X_3 = X_3' - X_3''$

$Max\ (-Z) = -\left[3(-X_1') + 4(-X_2') + \left(X_3' - X_3''\right)\right]$

S.to.

$-4(-X_1') - 5(-X_2') - 8\left(X_3' - X_3''\right) \leq -4$

$4(-X_1') + 5(-X_2') + 8\left(X_3' - X_3''\right) \leq -4$

$5(-X_1') + (-X_2') - \left(X_3' - X_3''\right) \leq 3$

$-5(-X_1') - (-X_2') + \left(X_3' - X_3''\right) \leq -3$

$-(-X_1') - (-X_2') - \left(X_3' - X_3''\right) \leq -8$

$X_1', X_2', X_3', X_3'' \geq 0$

وبشكل أكثر وضوحا

$$Max\ (-Z) = 3X_1^{\prime} + 4X_2^{\prime} - \acute{X}_3 + \acute{\acute{X}}_3$$

S.to.

$$4X_1^{\prime} + 5X_2^{\prime} - 8\acute{X}_3 + 8\acute{\acute{X}}_3 \leq -4$$

$$4X_1^{\prime} - 5X_2^{\prime} + 8\acute{X}_3 - 8\acute{\acute{X}}_3 \leq -4$$

$$-5X_1^{\prime} - X_2^{\prime} - \acute{X}_3 + \acute{\acute{X}}_3 \leq 3$$

$$5X_1^{\prime} + X_2^{\prime} + \acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3 \leq -3$$

$$X_1^{\prime} + \acute{X}_2 - \acute{X}_3 + \acute{\acute{X}}_3 \leq -8$$

$$\acute{X}_1, \quad \acute{X}_2, \quad \acute{X}_3, \acute{\acute{X}}_3 \geq 0$$

2. الصيغة القياسية

$$Min\ Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3$$

S.to.

$$4X_1 + 5X_2 + 8X_3 \geq 4$$

$$-(4X_1 + 5X_2 + 8X_3) \geq 4$$

$$5X_1 + X_2 - X_3 = 3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 8$$

$X_1 \leq 0$; $X_2 \leq 0$; X_3 U.R.S.

$$Let\ X_1 = -X_1^{\prime} \ ; \quad X_2 = -X_2^{\prime} \ ; \quad X_3 = \acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3$$

$$\therefore \quad Min\ Z = -3X_1^{\prime} - 4X_2^{\prime} + \left(\acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3\right)$$

S.to.

$$-4X_1^{\prime} - 5X_2^{\prime} + 8\left(\acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3\right) - S_1 = 4$$

$$4X_1^{\prime} + 5X_2^{\prime} - 8\left(\acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3\right) - S_2 = 4$$

$$-5X_1^{\prime} - X_2^{\prime} - \left(\acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3\right) \qquad = 3$$

$$-X_1^{\prime} - X_2^{\prime} - \left(\acute{X}_3 - \acute{\acute{X}}_3\right) \quad - S_3 = 8$$

$$\acute{X}_1, \acute{X}_2\ , \acute{X}_3\ , \acute{\acute{X}}_3, \qquad S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

مثال (2): اوجد الصيغة القياسية والقانونية لأنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$Min\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

S.to

$$X_1 + X_2 - X_3 \geq -5$$

$$-6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15$$

$$|19X_1 - 7X_2 + 5X_3| \leq 13$$

$X_1, X_2 \geq 0$; X_3 *is* U.R.S.

الحل:

1. الصيغة القياسية

$$Min\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 5\left(X_3' - X_3''\right)$$

S.to.

$$-\left[X_1 + X_2 - \left(X_3' - X_3''\right)\right] + S_1 = 5$$

$$-6X_1 + 7X_2 - 9\left(X_3' - X_3''\right) = 15$$

$$19X_1 - 7X_2 + 5\left(X_3' - X_3''\right) + S_2 = 13$$

$$-19X_1 + 7X_2 - 5\left(X_3' - X_3''\right) + S_3 = 13$$

$$X_1', X_2', X_3', X_3'', S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2. الصيغة القانونية

$$Max\ (-Z) = -\left[2X_1 + 3X_2 + 5\left(X_3' - X_3''\right)\right]$$

S.to.

$$-\left[X_1 + X_2 - \left(X_3' - X_3''\right)\right] \leq 5$$

$$-6X_1 + 7X_2 - 9\left(X_3' - X_3''\right) \leq 15$$

$$6X_1 - 7X_2 + 9\left(X_3' - X_3''\right) \leq -15$$

$$19X_1 - 7X_2 + 5\left(X_3' - X_3''\right) \leq 13$$

$$-19X_1 + 7X_2 - 5\left(X_3' - X_3''\right) \leq 13$$

$$X_1', X_2', X_3', X_3'' \geq 0$$

4.8.3 أمثلة غير محلولة على الصيغة القانونية والصيغة القياسية

اوجد الصيغة القانونية والقياسية لكل ما يأتي:

1. $Min\ Z = 2X_1 - X_2$

S.to

$|3X_1 + 5X_2| \leq 2$

$2X_1 + 4X_2 = 3$

$X_1 + 7X_2 \leq -7$

$X_1, X_2 \leq 0$

2. $Max\ Z = 5X_1 + 3X_2 + 7X_3$

S.to

$6X_1 - X_2 + 3X_3 = -9$

$7X_1 + X_2 - 4X_3 \geq 2$

$|X_1 + 3X_2 - 5X_3| \leq -3$

$X_1, X_2 \geq 0$; $X_3 is$ U.R.S.

3. $Min\ Z = X_1 + 5X_2 + X_3$

S.to

$2X_1 + X_2 + 5X_3 = 4$

$3X_1 - 2X_2 - X_3 \leq -7$

$X_1 \leq 0\ , X_2 \geq 0$

$X_3\ is$ U.R.S.

4. $Max\ Z = 8X_1 - X_2$

S.to

$3X_1 + X_2 = -6$

$5X_1 + 3X_2 \geq 2$

$6X_1 - X_2 \leq 1$

X_1, X_2 *are* U.R.S

5. $Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 6X_3$

S.to

$X_1 \qquad - 5X_3 \leq 5$

$3X_2 + 6X_3 \geq 3$

$X_1 \qquad + 7X_3 = -8$

$X_1 \geq 0$, $X_2 \leq 0$; X_3 *is* U.R.S.

6. $Max\ Z = 5X_1 + 6X_2$

S.to.

$X_1 - 2X_2 \geq 2$

$-2X_1 + 3X_2 \geq 2$

X_1, X_2 *are* U.R.S.

9.3 طرق حل نماذج البرمجة الخطية [18,10,1]

1.9.3 الطريقة البيانية (Graphical Method)

تعتبر هذه الطريقة من أسهل الطرق في البرمجة الخطية لحل المشاكل الخطية والتي لا تزيد متغيراتها في الغالب عن اثنين وتعتبر هذه الطريقة غير واسعة الاستخدام في الحياة العملية لعدم إمكانية تطبيقها على المشاكل المعقدة. وخطوات هذه الطريقة كما يلي:

1. يرسم المحورين الافقي X_1 والعمودي X_2
2. تحويل المتباينات (القيود للمشكلة) الى معادلات أي في حالة المساواة
3. تحديد نقاطع تقاطع كل قيد مع كل محور ونتيجة لذلك ستكون لدينا نقطتين لكل قيد نصل بينهما بخط مستقيم
4. تحديد اتجاه كل قيد فاذا كان من نوع اقل او يساوي فان منطقة الحل الممكن او المقبول لهذا القيد تكون باتجاه نقطة الأصل اما إذا كان اتجاه القيد من نوع أكبر او يساوي فان منطقة الحل الممكن او المقبول له تكون بعكس اتجاه نقطة الأصل.
5. ان المضلع الناتج من تقاطع اتجاهات جميع القيود الواردة في المسالة تسمى بمنطقة الحل المقبول او الممكن وهي منطقة تلبي جميع او اغلب القيود وهذه المنطقة تكون في الربع الأول فقط.
6. يتم تحديد النقاط المتطرفة لمجال او لمنطقة الحل المقبول ثم يتم اختيار نقطة متطرفة واحدة وهي التي تجعل دالة الهدف في النهاية العظمى او النهاية الصغرى.

1.1.9.3 أمثلة محلولة على الطريقة البيانية

1. الطريقة البيانية في حالة التعظيم (Maximization)

مثال (1): اوجد الحل الأمثل لأنموذج البرمجة الخطية الاتي باستخدام الطريقة البيانية:

$Max\ Z = 12X_1 + 8X_2$

S.to

$8X_1 + 6X_2 \leq 2200$

$4X_1 + 9X_2 \leq 1800$

$X_1 + 2X_2 \leq 400$

$X_1, X_2 \geq 0$

نتبع خطوات الطريقة البيانية في حل هذا المثال:

1. رسم المحورين X_2 , X_1
2. نحول القيود الى معادلات وكما يلي

$8X_1 + 6X_2 = 2200$

$4X_1 + 9X_2 = 1800$

$X_1 + 2X_2 = 400$

3. إيجاد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين X_2 , X_1

أ- لإيجاد نقاط تقاطع القيد الأول مع المحورين X_2 , X_1

$8X_1 + 6X_2 = 2200$

نفرض ان الكمية المنتجة من X_2 مساوية الى الصفر أي $X_2=0$ ثم نعوضها في القيد الأول

$8X_1 + 6(0) = 2200$

$X_1 = \frac{2200}{8} = 275$ وحدة

∴ النقطة الاولى هي (275,0)

لإيجاد النقطة الثانية نفرض ان الكمية المنتجة من X_1 تساوي صفر أي ان $X_1=0$ ثم نعوضها في القيد الأول

$$8(0) + 6X_2 = 2200$$

$$X_2 = \frac{2200}{6} = 366.6 \text{ وحدة}$$

∴ النقطة الثانية هي $(0, 366.6)$

يتم تحديد النقطتين على المحورين X_1 , X_2 ثم نصل بينهما بخط مستقيم

ب- لإيجاد نقاطع تقاطع القيد الثاني مع المحورين X_1 , X_2

$$4X_1 + 9X_2 = 1800$$

نفرض ان $X_2=0$ ثم نعوض في نفس القيد

$$4X_1 + 9(0) = 1800$$

$$X_1 = \frac{1800}{4} = 450$$

∴ النقطة الاولى هي $(450,0)$

لإيجاد النقطة الثانية للقيد الثاني

نفرض ان $X_1=0$ ثم نعوض في نفس القيد

$$0 + 9X_2 = 1800$$

$$X_2 = \frac{1800}{94} = 200 \text{ وحدة}$$

∴ النقطة الثانية هي $(0,200)$

يتم تحديد النقطتين على المحورين X_1 , X_2 ثم نصل بينهما بخط مستقيم

ت- إيجاد نقاطع تقاطع القيد الثالث مع المحورين X_1 , X_2

$$X_1 + 2X_2 = 400$$

نفرض ان $X_2=0$ ثم نعوض في نفس القيد

$$X_1 = 400$$

∴ النقطة الاولى هي (400,0)

لإيجاد النقطة الثانية للقيد الثالث نفرض ان $X_1=0$

$$0 + 2X_2 = 400$$

$$X_2 = \frac{400}{2} = 200$$

∴ النقطة الثانية هي (0,200)

ثم يتم تحديد هاتين النقطتين على المحورين X_2 , X_1 ثم نصل بينهما بخط مستقيم

ان المنطقة المظللة والمحددة بالنقاط (ن، و، ه، م) هي منطقة الحلول المقبولة، ان أي نقطة تقطع ضمن المنطقة المقبولة او على حدودها هي نقطة تمثل حل مقبول او حل ممكن للمشكلة وتحقق جميع القيود السابقة.

من الشكل السابق نلاحظ ان القيد الثاني ليس له تأثير على منطقة الحلول ولذلك يمكن الاستغناء عنه.

إيجاد الحل الأمثل (Optimal Solution): -

تكون منطقة الحل الممكن او الحل المقبول في الطريقة البيانية عبارة عن مضلع وعليه فأن الحل الأمثل يكون في واحدة من نقاط الزوايا للمضلع حيث يتم: -

1. تحديد نقاط الزوايا لمنطقة الحل الممكن
2. إيجاد قيم هذه النقاط
3. اختيار أكبر قيمة

يمكن تحديد جميع نقاطع الزوايا لمنطقة الحل الممكن بسهولة عدا تلك النقاط التي هي حاصل تقاطع القيود مع بعضها، لذا فالنقطة (و) وهي حاصل تقاطع القيد الأول مع القيد الثالث في هذا المثال، لذلك فان ابسط طريقة لحل المعادلتين بمجهولين هي اما بإضافة او طرح او ضرب او بقسمة مجموعة من المعادلات، حيث ان هذه العمليات تؤدي الى إيجاد قيمة احدى المتغيرات ثم يتم إيجاد قيمة المتغير الاخر بدلالته

$8X_1 + 6X_2 = 2200 \quad \dots (1)$ القيد الاول

$X_1 + 2X_2 = 400 \quad \dots (3)$ القيد الثالث $* 3$

$$8X_1 + 6X_2 = 2200$$

$$\mp 3X_1 \mp 6X_2 = \mp 1200$$

بالطرح

$$5X_1 + 0 = 1000 \Rightarrow X_1 = \frac{1000}{5} = 200$$

بعدها يتم تعويض قيمة X_1 في المعادلة (1)

$$8(200) + 6X_2 = 2200 \text{ ———————— } (1)$$

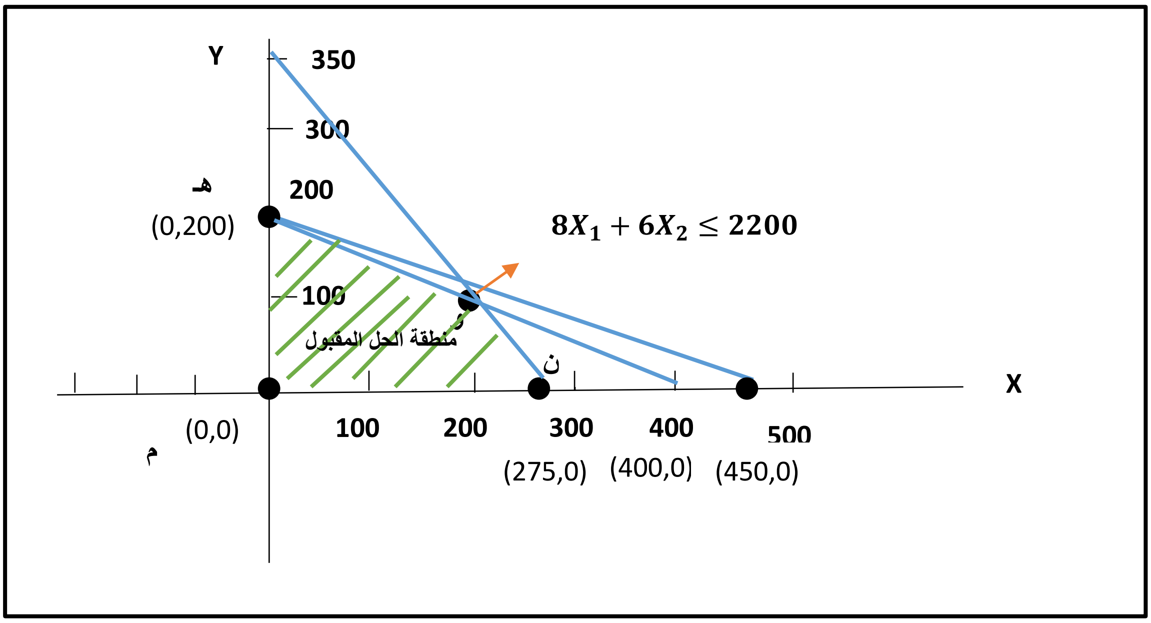
$$1600 + 6X_2 = 2200$$

$$X_2 = \frac{600}{6} = 100$$

∴نقطة تقاطع معادلة القيد الأول مع معادلة القيد الثاني هي النقطة (200,100)

النقاط	$\mathbf{12X_1 + 8X_2}$	**Z**
(0,0) م	12(0)+8(0)	0
(275,0) ن	12(275)+8(0)	3300
(200,100) و	12(200)+8(100)	3200
(0,200) ه	12(0)+8(200)	1600

∴ النقطة ن هي التي تحقق أكبر ربح للمشكلة ويكون ذلك بإنتاج 275 قطعة من النوع A وعدم الإنتاج من النوع B وعليه فان $Z=3300, X_1=275, X_2=0$



2. الطريقة البيانية في حالة تقليل (Minimization)

<u>مثال (2):</u> بالرجوع الى الانموذج الخاص بإحدى الجمعيات الخيرية والذي هدفه تقليل التكاليف وهو:

$$Min\ Z = 2000X_1 + 2300X_2$$

S.to

$$8X_1 + 4X_2 \geq 100$$

$$2X_1 + 4X_2 \geq 70$$

$$2X_1 + 8X_2 \geq 90$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

<u>الحل:</u> بعد رسم المحورين X_1 , X_2 نقوم بتحويل قيود المشكلة الى معادلات ونبدأ ب

<u>القيد الأول</u>

$$8X_1 + 4X_2 = 100$$

نفرض أن $X_1=0$ ونعوض في معادلة القيد الأول

$$4X_2 = 100 \Rightarrow X_2 = 25$$

∴ النقطة الاولى هي (0,25)

ثم نفرض ان $X_2=0$ ونعوض في معادلة القيد الأول

$$8X_1 = 100 \Rightarrow X_1 = 12.5$$

∴ النقطة الثانية هي $(12.5, 0)$

القيد الثاني

$$2X_1 + 4X_2 = 70$$

نفرض ان $X_1=0$ ونعوض في معادلة القيد الثاني

$$4X_2 = 70 \Rightarrow X_2 = \frac{70}{4} = 17.5$$

∴ النقطة الاولى هي $(0.17.5)$

نفرض ان $X_2=0$ ونعوض في معادلة القيد الثاني

$$2X_1 = 70 \Rightarrow X_1 = 35$$

∴ النقطة الثانية هي $(35,0)$

القيد الثالث

$$2X_1 + 8X_2 = 90$$

نفرض ان $X_1=0$ ونعوض في معادلة القيد الثالث

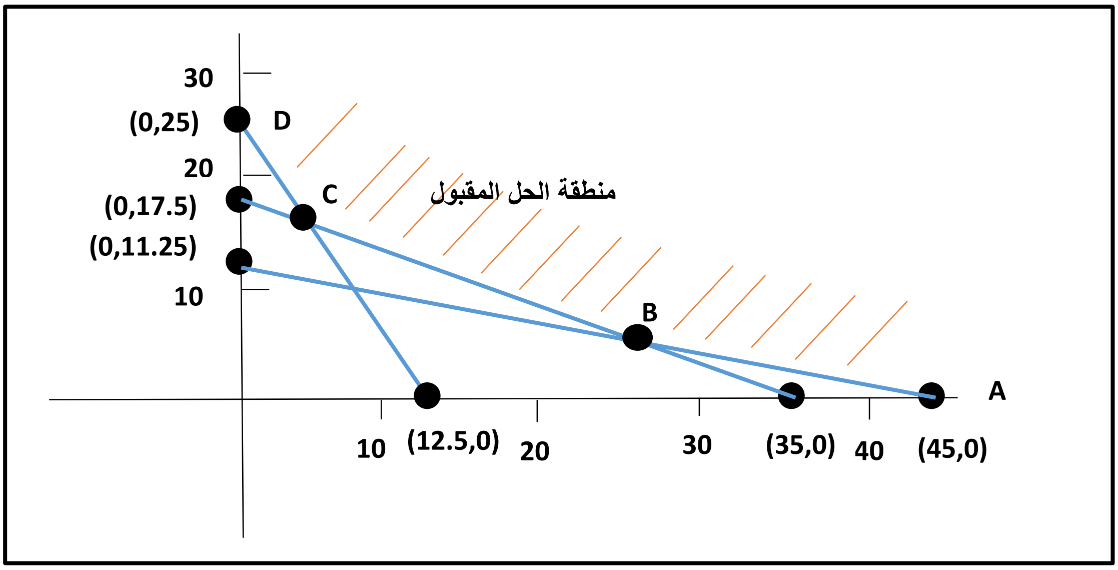
$$8X_2 = 90 \Rightarrow X_2 = \frac{90}{8} = 11.25$$

∴ النقطة الاولى هي $(0,11.25)$

نفرض ان $X_2=0$ ونعوض في معادلة القيد الثالث

$$2X_1 = 90 \Rightarrow X_1 = 45$$

∴ النقطة الثانية هي $(45,0)$



يلاحظ ان منطقة الحل الممكن تحدد بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لان المتباينات او القيود من نوع اكبر او يساوي ≥ وان الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة المضلعة ويمكن تحديدها بالنقاط (D, C, B, A). ثم يتم إيجاد قيمة هذه النقاط حيث ان النقطتين A , D يمكن تحديدهما بشكل مباشر لتقاطع معادلة الخط المستقيم مع المحور X_1 في حالة A ومع X_2 في حالة D اما النقطتان C , B فيتم ايجادهما من حل المعادلتين الانيتين اللتين تمثلان معادلة الخطين المستقيمين المتقاطعتين.

النقطة B هي حاصل تقاطع القيد الثاني مع القيد الثالث

$$2X_1 + 4X_2 = 70 \qquad (2)$$

$$\mp 2X_1 \mp 8X_2 = \mp 90 \quad * (-1) \qquad (3)$$

$$-4X_2 = -20$$

$$X_2 = \frac{-20}{-4} = 5$$

بتعويض قيمة $X_2=5$ في المعادلة (2)

$$2X_1 + 4(5) = 70$$

$$2X_1 = 50 \Rightarrow X_1 = 25$$

∴ النقطة B هي (25,5)اما النقطة C فيتم إيجاد قيمتها عن طريق حل المعادلتين الانيتين معادلة القيد 1 ومعادلة القيد 2 وكما يلي:

$$8X_1 + 4X_2 = 100 \qquad (1)$$

$$\mp 2X_1 \mp 4X_2 = \mp 70 \qquad (2)$$

بالطرح

$$6X_1 = 30$$

$$X_1 = 5$$

وبالتعويض في معادلة القيد (1)

$$8(5) + 4X_2 = 100$$

$$4X_2 = 100 - 40 \Rightarrow X_2 = \frac{60}{4} = 15$$

∴ النقطة C هي (5.15)

النقاط	$\mathbf{2000X_1 + 2300X_2}$	**Z**
A (45,0)	2000(45)+2300(0)	90000
B (25,5)	2000(25)+2300(5)	61500
C (5,15)	2000(5)+2300(15)	44500
D (0,25)	2000(0)+2300(25)	57500

ويتم اختيار اقل التكاليف وهي 44500 دينار التي تمثل الحل الأمثل عندما

$Z=44500$, $X_1=5$, $X_2=15$

مثال (3): استعمل الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الاتية:

$$Min\ Z = 10X_1 + 25X_2$$

S.to.

$$X_1 + X_2 \geq 50$$

$$X_1 \geq 20$$

$$X_2 \leq 40$$

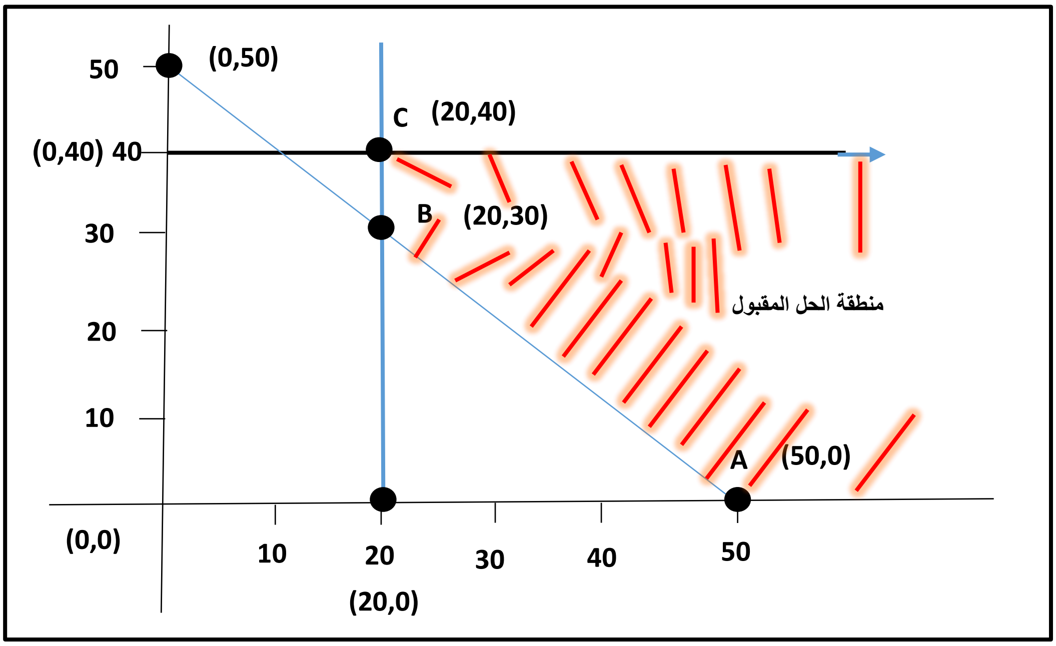
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$X_1 + X_2 = 50$$

$$X_1 = 20$$

$$X_2 = 40$$



لإيجاد احداثيات النقطة B والناتجة من تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني

$X_1 + X_2 = 50$ (1)

$X_1 = 20$ (2) يتم تعويض (2) في معادلة القيد (1)

$20 + X_2 = 50$

$X_2 = 30$

∴ النقطة B هي $(20,30)$

لإيجاد احداثيات النقطة C والناتجة من تقاطع القيد الثاني مع القيد الثالث

$X_1 = 20$ (2)

$X_2 = 40$ (3)

∴ النقطة C هي $(20,40)$

Z	$\mathbf{10X_1 + 25X_2}$	النقاط
500	10(50)+25(0)	**A(50,0)**
950	10(20)+25(30)	**B(20,30)**
1200	10(20)+25(40)	**C(20,40)**

Optimal Solution Z=500 , X_1=50 , X_2=0

∴ النقطة A تمثل الحل الامثل للمشكله

<u>مثال (4):</u> اوجد الحل الأمثل لأنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية

$Max\ Z = 10X_1 + 2X_2$

S.to.

$8X_1 + 4X_2 \leq 32$

$6X_1 + 8X_2 \leq 48$

$4X_1 + 6X_2 \leq 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل: اولاً: يتم تحويل المتراجحات الى معادلات وكالاتي

$$8X_1 + 4X_2 = 32$$

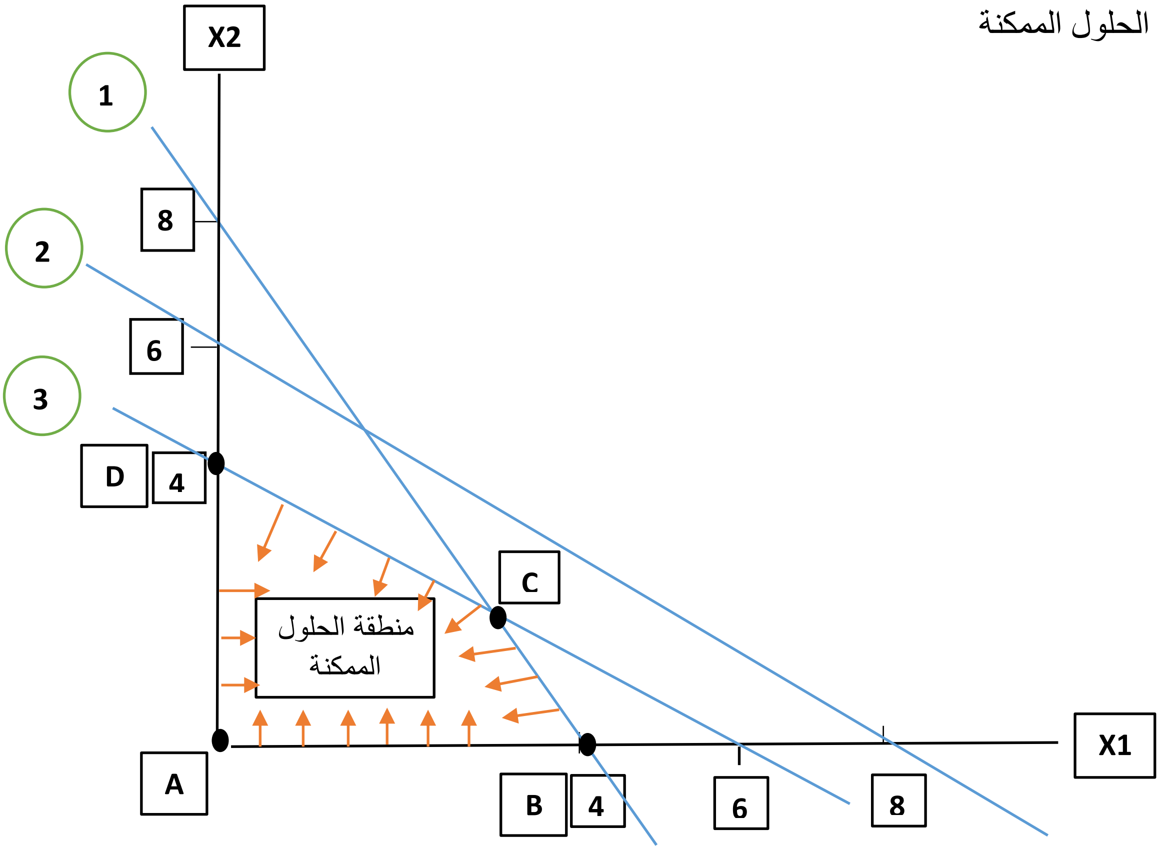
$$6X_1 + 8X_2 = 48$$

$$4X_1 + 6X_2 = 24$$

ثانياً: لاستخراج احداثيات النقاط يتم تصفير أحد المتغيرين للحصول على قيمة المتغير الاخر وكالاتي:

النقطة	قيمة X_2	قيمة X_1	رقم القيد
(0,8)	8	0	**1**
(4,0)	0	4	
(0,6)	6	0	**2**
(8,0)	0	8	
(0,4)	4	0	**3**
(6,0)	0	6	

بعدها يتم رسم محورين افقي (X_1) وعمودي (X_2) ثم نقوم برسم احداثيات النقاط أعلاه لتحديد منطقة الحلول الممكنة



ايجاد قيمة النقطة C انياً بأخذ القيد 1 والقيد 3

$8X_1 + 4X_2 = 32$

$\underline{[4X_1 + 6X_2 = 24] \times (2)}$ بالطرح

$8X_1 + 4X_2 = 32$

$-8X_1 - 12X_2 = -48$

$-8X_2 = -16$

$X_2 = 2$

$8X_1 + 4X_2 = 32 \Rightarrow 8X_1 + 4(2) = 32$

$8X_1 = 32 - 8 \Rightarrow 8X_1 = 24$

$X_1 = 3$

نجد قيم Z لمنطقة الحلول الممكنة وكالاتي:

إيجاد النقاط	**قيمة X_1**	**قيمة X_2**	$\boldsymbol{Z = 10X_1 + 2X_2}$
A	0	0	Z=0
B	4	0	Z=40
C	3	2	Z=34
D	0	4	Z=8

عندها يتم اختيار الحل الأمثل الذي تكون فيه الأرباح اعلى ما يمكن عندما

$$X_1^* = 4 \quad . \quad X_2^* = 0 \qquad and \quad Z^* = 40$$

والذي يمثل نقطة B.

مثال (5): اوجد الحل الأمثل لأنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية

$$8X_1 + 4X_2 \leq 32$$

$$6X_1 + 8X_2 = 48$$

$$4X_1 + 6X_2 \geq 24$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

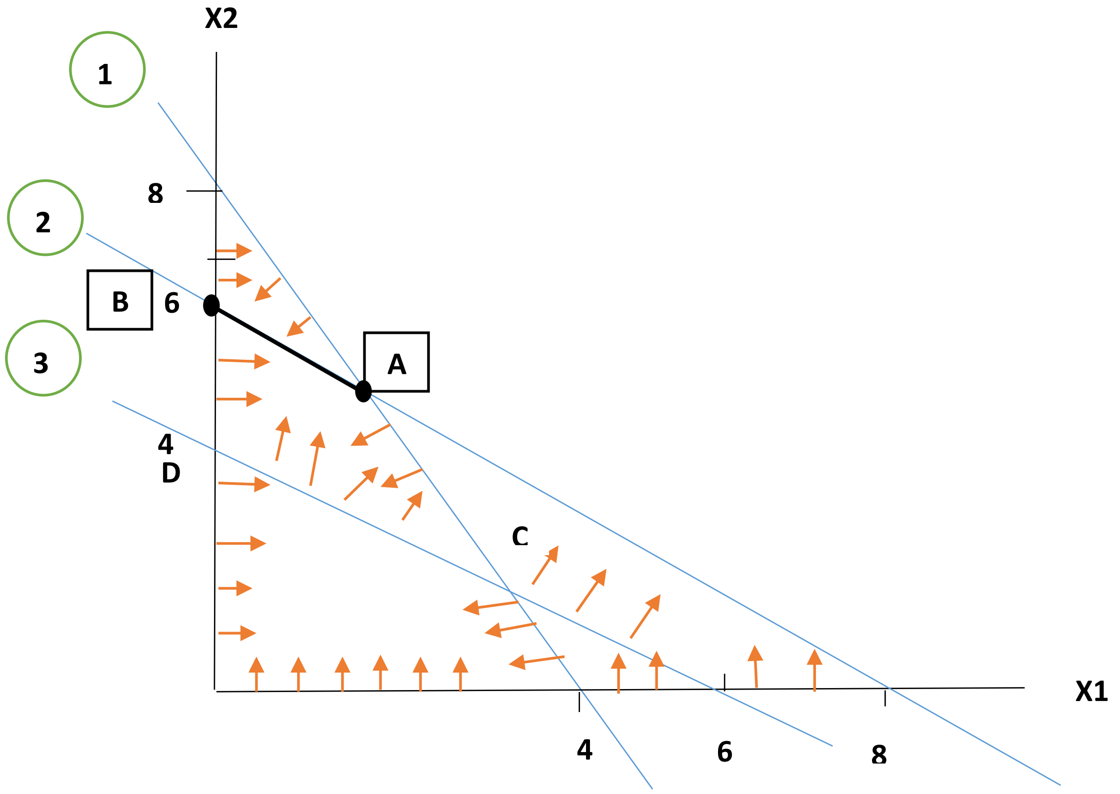
اوجد الحل الأمثل عندما تكون دالة الهدف

أ. $Max\ Z = 10X_1 + 2X_2$

ب. $Min\ Z = 10X_1 + 2X_2$

الحل: احداثيات النقاط هي نفسها احداثيات مثال (1)

رقم القيد	**قيمة X_1**	**قيمة X_2**	**النقطة**
1	0	8	(0,8)
	4	0	(4,0)
2	0	6	(0,6)
	8	0	(8,0)
3	0	4	(0,4)
	6	0	(6,0)



منطقة الحلول الممكنة تتمثل بقطعة المستقيم A B وذلك بسبب وجود المساواة في القيد 2

$Z = 10X_1 + 2X_2$	قيمة X_2	قيمة X_1	إيجاد النقاط
$25\frac{3}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{8}{5}$	A
12	6	0	B

الحل الأمثل في حالة Max عندما

$$X_1^* = \frac{8}{5} \quad , \quad X_2^* = \frac{24}{5} \quad and \quad Z^* = 25\frac{3}{5}$$

الحل الأمثل في حالة Min عندما

$$X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 6 \quad and \quad Z^* = 12$$

مثال (6): اوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الرسم لأنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$Min\ Z = 10X_1 + 2X_2$

S.to

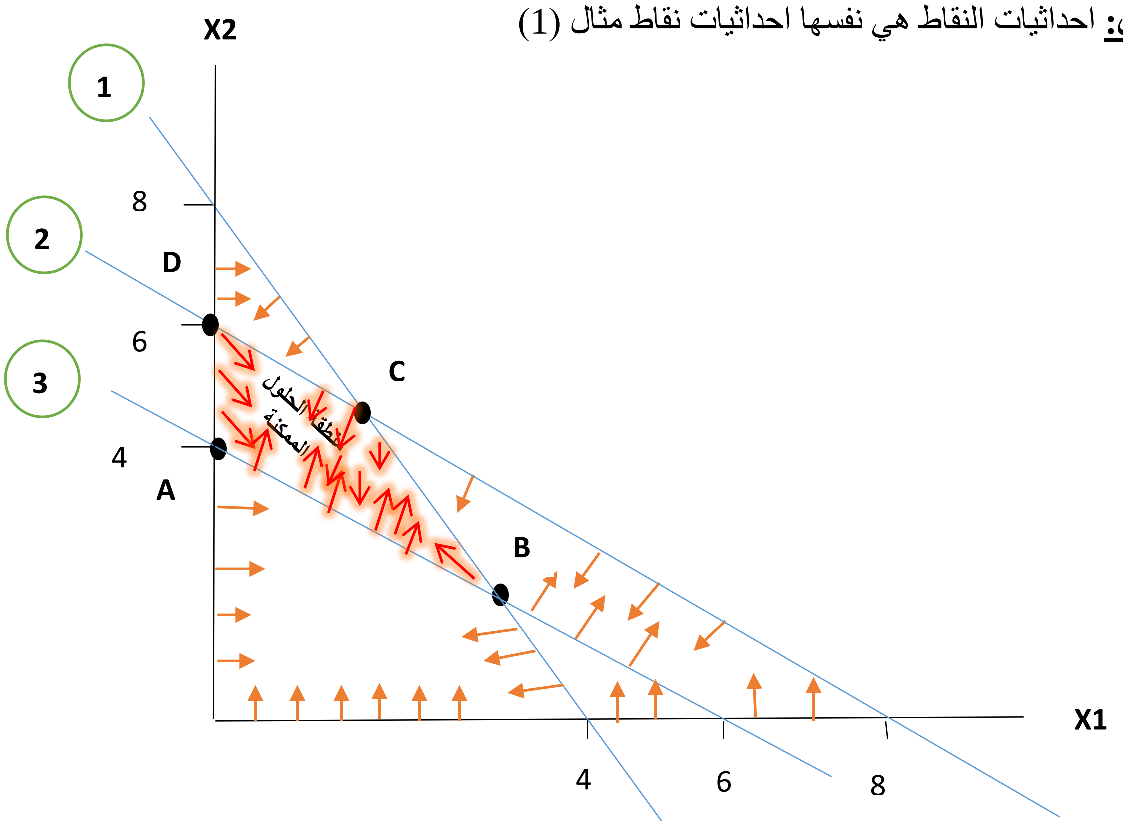
$8X_1 + 4X_2 \leq 32$

$6X_1 + 8X_2 \leq 48$

$4X_1 + 6X_2 \geq 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل: احداثيات النقاط هي نفسها احداثيات نقاط مثال (1)



لإيجاد قيمة النقطة C نحل أنياً القيد 1 والقيد 2 كما في المثال السابق

$Z = 10X_1 + 2X_2$	قيمة X_2	قيمة X_1	إيجاد النقاط
Z=8	4	0	A
Z=34	2	3	B
Z= $\frac{128}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{8}{5}$	C
Z=12	6	0	D

وعليه فان الحل الأمثل هو

$$X_1^* = 0 \quad . \quad X_2^* = 4 \quad and \quad Z^* = 8$$

والذي يمثل النقطة A.

مثال (7): اوجد الحل الأمثل لأنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية

$Max\ Z = 6X_1 + 2X_2$

S.to

$X_1 + X_2 \leq 5$

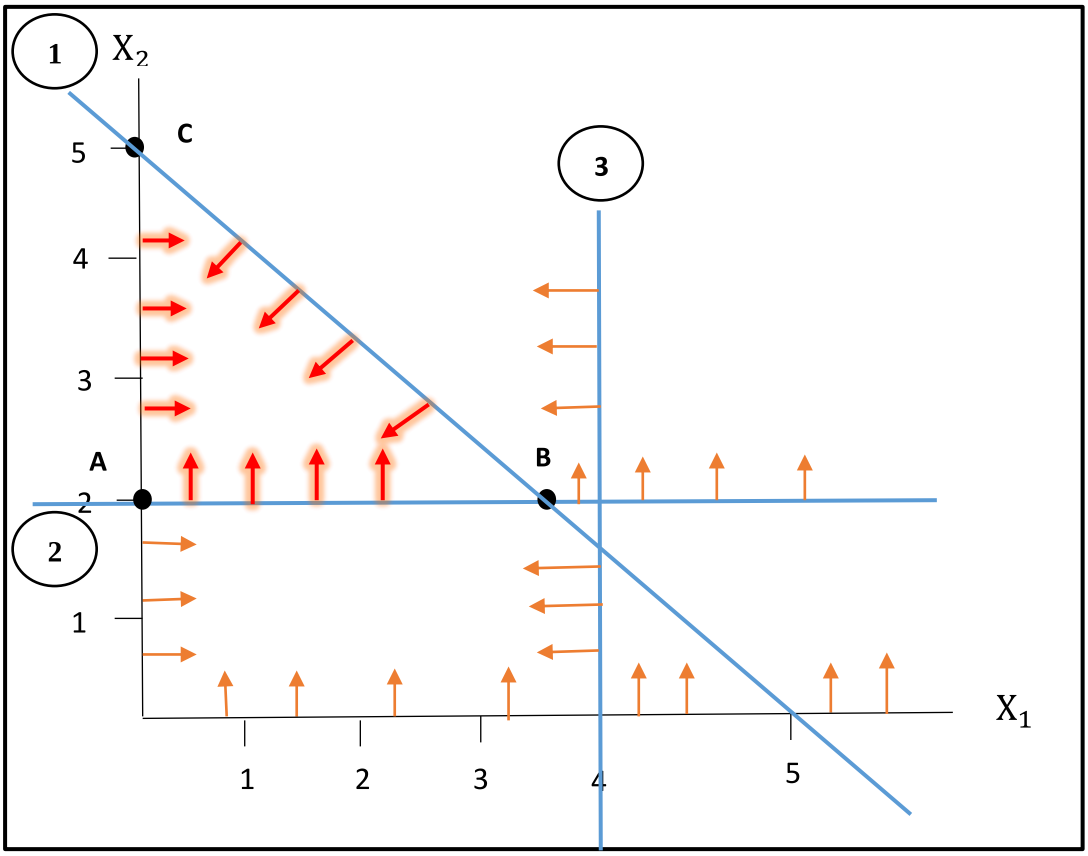
$X_2 \geq 2$

$X_1 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

النقطة	X_2	X_1	رقم القيد
(0,5)	5	0	**1**
(5,0)	0	5	
(0,2)	2	0	**2**
(4,0)	0	4	**3**



$Z = 6X_1 + 2X_2$	قيمة X_2	قيمة X_1	أسماء النقاط
Z=4	2	0	**A**
Z=22	2	3	**B**
Z=10	5	0	**C**

وعليه فان الحل الأمثل يتحقق عندما

$$X_1^* = 3 \quad . \quad X_2^* = 2 \quad and \quad Z^* = 22$$

عند النقطة B.

2.1.9.3 أمثلة غير محلولة على الطريقة البيانية

س1/ اوجد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية لكلاً مما يلي:

1. $Max\ Z = 2X_1 + 6X_2$

$S.$to.

$4X_1 + 8X_2 \leq 32$

$5X_1 + 7X_2 \leq 35$

$-6X_1 + 6X_2 \leq 18$

$2X_1 \quad\quad \leq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

2. $Min\ Z = 100X_1 + 120X_2$

$S.$to.

$2X_1 + X_2 \geq 60$

$6X_1 - 4X_2 \leq 120$

$X_1 + 4X_2 \geq 100$

$6X_1 + 8X_2 \leq 480$

$X_1, X_2 \geq 0$

3. $Max\ Z = 2X_1 + X_2$

$S.$to.

$X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_1 + X_2 \leq 6$

$X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 - 2X_2 \leq 1$

$X_1, X_2 \geq 0$

4. $Min\ Z = 2X_1 + 3X_1$

$S.$to.

$X_1 + X_2 \leq 30$

$X_1 \quad\quad \leq 20$

$X_2 \leq 12$

$X_2 \leq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

3.1.9.3 الحالات الخاصة في الطريقة البيانية

هناك عدد من الحالات الخاصة تظهر عن طريق الرسم البياني في حل مسائل البرمجة الخطية من هذه الحالات هي [10,9] :

1. عدم إمكانية الحل Infeasible Solution
2. عدم محدودية الحل Unbounded Solution
3. تعدد الحلول المثلى Alternatve Optimal Solution
4. انحلال الحل Degeneracy Solution

أولا:عدم إمكانية الحل (Infeasible Solution)

تظهر هذه الحالة عندما لا يمكن تحديد منطقة حل ممكن مشتركة بين جميع القيود، وقد يكون هذا ناتج عن حالة تعارض بين القيود او نتيجة الخطأ في تحديد اتجاه المتباينات او الخطأ في صياغة القيود.

مثال:

$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2$

S.to.

$2X_1 + 3X_2 \leq 6$

$X_2 \geq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

$2X_1 + 3X_2 = 6$ (a

$X_1 = 0$

$3X_2 = 6$

$\xrightarrow{yields} X_2 = 2$

اذن النقطة الأولى هي (0,2)

نفرض ان $X_2 = 0$

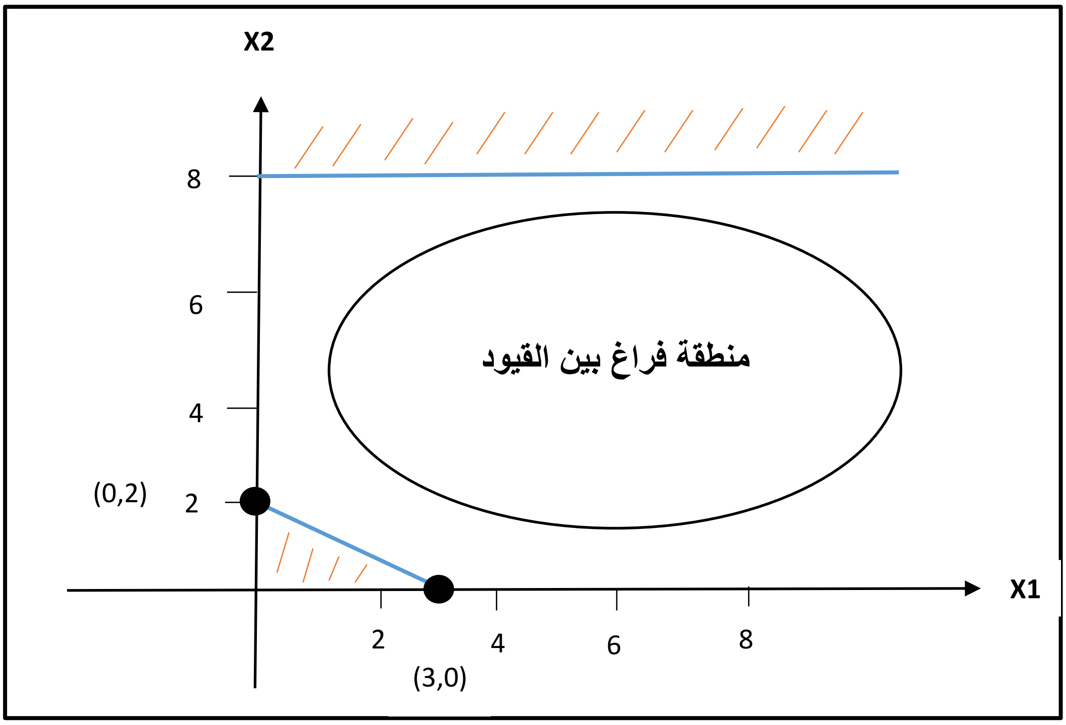
$$2X_1 = 6$$

$$\xrightarrow{yields} X_1 = 3$$

اذن النقطة الثانية هي $(3,0)$

$X_2 = 8$ (b

النقطة هي $(0,8)$



يظهر من الشكل السابق ان ليس هناك منطقة مشتركة لجميع القيود وذلك لحالة الخطأ وعدم الدقة في تحديد القيود.

ثانيا: عدم محدودية الحل (Unbounded Solution)

هي الحالة التي تكون فيها منطقة الحل الممكن غير محدودة أي لا يمكن تحديدها فمثلاً الأرباح المتحققة يمكن زيادتها الى ما لا نهاية (∞) (Infinity) وقد يكون مقبولاً من الوجهة النظرية، الا انه لا يمكن تحقيقه عملياً حيث لا يمكن زيادة الإنتاج الى ما لانهاية من أي منتوج فانه ليس هناك ما لا نهاية من الموارد المحددة او ما لا نهاية من الطلب على ذلك المنتوج.

<u>مثال</u>:جد الحل الأمثل ان امكن باستعمال الطريقة البيانية لانموذج البرمجة الخطية الاتي:

$Max\ Z = 4X_1 + 2X_2$

S.to.

$X_1 \geq 3$

$X_1 + X_2 \geq 6$

$X_2 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

<u>الحل:</u>

أ) $X_1 = 6$

اذن النقطة هي (3,0)

ب) $X_1 + X_2 = 6$

نفرض ان $X_1=0$

اذن $X_2=6$

اذن النقطة الأولى هي (0,6)

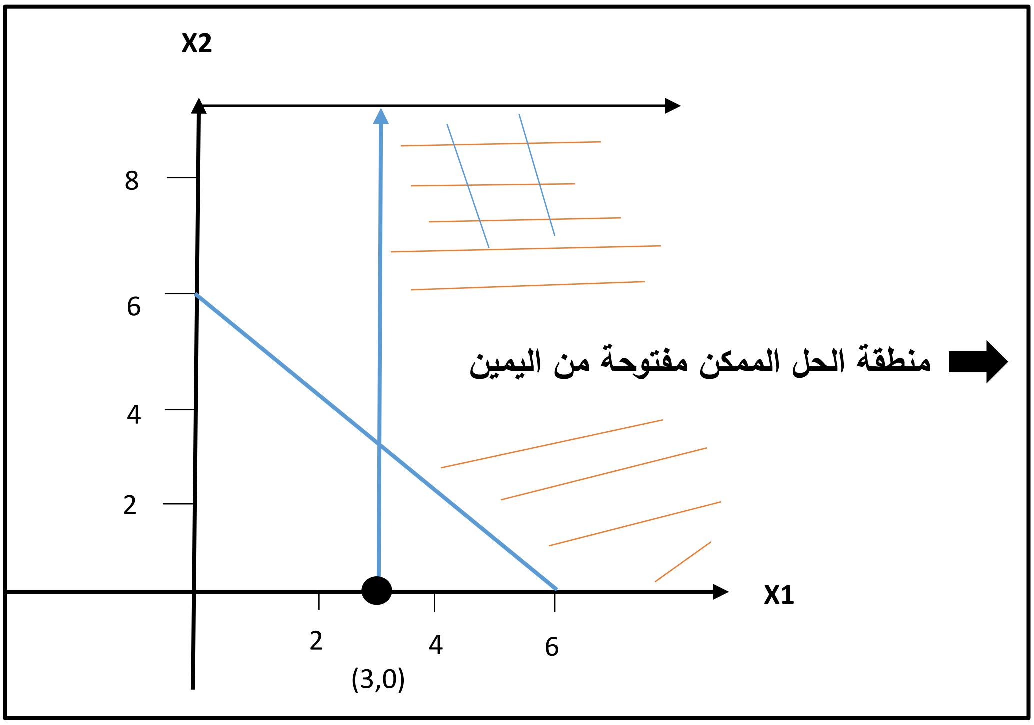
نفرض ان $X_2=0$

اذن $X_1=6$

اذن النقطة الثانية هي (6,0)

ت) $X_2 = 8$

اذن النقطة هي (0,8)



يلاحظ من الشكل السابق ان منطقة الحل الممكن مفتوحة النهاية مما يتيح انتاج ما لا نهاية من X_1. هذه الحالة الخاصة تظهر في حالة التعظيم اما في التقليل فتختفي ويكون الحل طبيعي.

ثالثا: تعدد الحلول المثلى (Alternative Optimal Solution)

من المعروف ان حل مسائل البرمجة الخطية يقود الى حل أمثل واحد (Optimal Solation) الا ان بعض هذه المسائل يكون لها نقطتين او أكثر من نقاط الزوايا وتمثل حلول مثلى مما يتيح لمتخذ القرار مرونة كافية لاختيار الحل الأمثل. يمكن التعرف على هذه الحالة الخاصة عن طريق ما يلي:

1. عندما تكون معادلة الخط المستقيم الذي يمثل أحد القيود موازياً لمعادلة الخط المستقيم لدالة الهدف.
2. بعد الانتهاء من حل مسألة البرمجة الخطية، يمكن ملاحظة ان هناك أكثر من نقطة تمثل الحل الأمثل.

مثال: جد الحل الأمثل ان امكن باستعمال الطريقة البيانية لانموذج البرمجة الخطية الاتي:

$Max\ Z = 10X_1 + 25X_2$

S.to.

$2X_1 + 5X_2 \leq 50$

$4X_1 + 2X_2 \leq 36$

$X_1 . X_2 \geq 0$

يلاحظ ان الطرف الايسر للقيد الأول يمكن أي يصبح مساوياً الى دالة الهدف عند ضربه في (5) او تقسم معادلة دالة على (5) مما يعطي الدليل على وجود أكثر من حل أمثل

أ. $2X_1 + 5X_2 = 50$

نفرض $X_1=0$

$X_2=10$

النقطة الأولى (0,10)

نفرض $X_2=0$

$X_1=25$

اذن النقطة الثانية (25,0)

ب. $4X_1 + 2X_2 = 36$

نفرض $X_1=0$

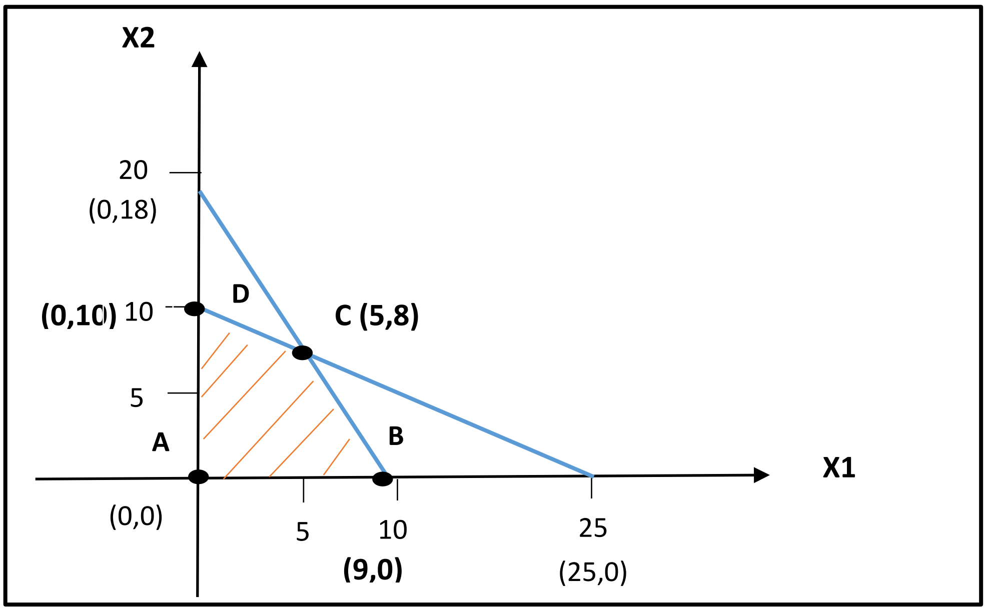
$X_2=18$

اذن النقطة الأولى (0,18)

نفرض $X_2=0$

$X_1=9$

اذن النقطة الثانية هي (9,0)



وبعد إيجاد احداثيات النقطة (5,8) C يتم تعويض النقاط D, C, B, A في دالة الهدف فتكون القيمة لدالة الهدف لكل نقطة من هذه النقاط كما يأتي

A=0 , B=90 , C=250 , D=250

تبين ان الحل الأمثل يتحقق في النقطتين D و C

رابعا: انحلال الحل (التفكك) (Degeneracy Solution)

تظهر هذه الحالة في مسائل البرمجة الخطية عندما يكون هناك قيداً فائضاً (Redundant) فالقيد الفائض هو القيد الذي لا يؤثر على تحديد منطقة الحل الممكن، وتظهر هذه الحالة عندما يكون عدد القيود في مسألة البرمجة الخطية كبيراً او ان هناك قيد يكون أكثر تأثيراً او تحديداً، ان وجود القيد الفائض لا يعقد حل مسألة البرمجة الخطية.

مثال: جد الحل الأمثل ان امكن باستعمال الطريقة البيانية لانموذج البرمجة الخطية الاتي:

$Max\ Z = 4X_1 + 2X_2$

S.to

$X_1 + 3X_2 \leq 9$

$2X_1 + X_2 \leq 8$

$X_1 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

أ. $X_1 + 3X_2 = 9$

نفرض ان $X_1 = 0$

$\therefore X_2=3$ اذن النقطة الأولى هي (0,3)

نفرض $X_2=0$

$X_1=9$

اذن النقطة الثانية هي (9,0)

ب. $2X_1 + X_2 = 8$

نفرض $X_1=0$

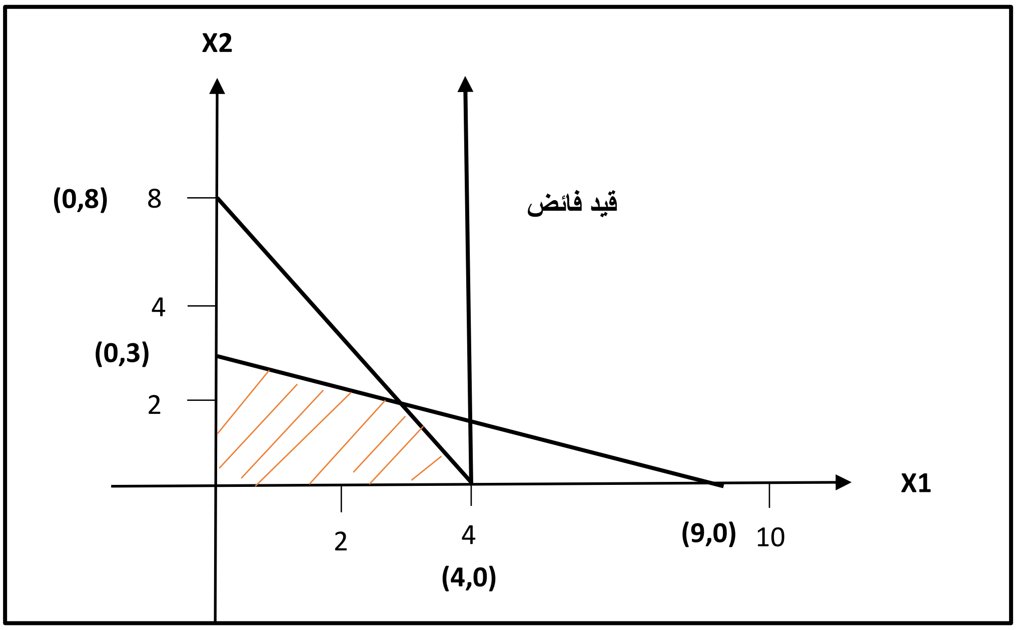
$\therefore X_2=8$ اذن النقطة الأولى هي (0,8)

نفرض $X_2=0$

$\therefore X_1=4$ اذن النقطة الثانية هي (4,0)

ت. $X_1 = 4$

النقاط هي (4,0)



يلاحظ ان القيد $X_1=4$ غير ضروري في صياغة مسألة البرمجة الخطية او حلها حيث ليس له تأثير على تحديد منطقة الحل الممكن.

2.9.3 الطريقة المبسطة (Simplex Method)[5,2,1]

في عام 1947 م طور جورج دانتزغ عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) لحل مسألة البرمجة الخطية لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956م، وبعد نشر الطريقة المبسطة (السمبلكس) حدث تسارع كبير في استخدام وتطوير البرمجة الخطية، وقد لاقت هذه الطريقة نجاحا باهرا وحظيت بأهتمام شديد وفتحت الباب أمام العديد من التطبيقات العسكرية والاقتصادية وأخذ التفاعل بين الدراسات النظرية والمسائل التطبيقية يتزايد يندر له وجود في فرع اخر من فروع الرياضيات .

ان البرمجة الخطية ليست مجرد وسيلة للتطبيقات ولكنها مهمة في دراسة رياضية للمتباينات الخطية ،حيث ان طريقة (Simplex) لاتنحصر اهميتها في كونها وسيلة لحل مسائل البرمجة الخطية لكنها مهمة في دراسة مواضيع مهمة لها صلة بالبرمجة الخطية مثل موضوع اقصى تدفق ،اقصر طريق ،تحليل الشبكي، مسائل الثنائية وتحليل حساسية الحلول تجاه تغير المعطيات.

والمثال (1) يوضح خطوات الطريقة المبسطة.

<u>مثال(1):</u> استخدام الطريقة المبسطة (Simplex Method) لحل الأنموذج الاتي حلاً امثلاً:

$Max\ Z = 4X_1 + 5X_2$

$S.$to

$X_1 + 3X_2 \leq 12$

$4X_1 + 3X_2 \leq 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

من اجل تطبيق طريقة Simplex يجب تحويل مشكلة البرمجة الخطية من الصيغة القانونية (Canonical form) الى الصيغة القياسية (Standard form) وكما يأتي: -

1. نحول المتباينات الى معادلات خطية بإضافة متغيرات وهمية (Slack variable) والتي تمثل الموارد الغير مستغلة في بداية العملية الإنتاجية او بداية تطبيق الانموذج الرياضي المقترح وكما يأتي:

$$X_1 + 3X_2 + S_1 = 12$$
$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 24$$

2. نضيف نفس المتغيرات الوهمية أو الراكدة الى دالة الهدف بمعاملات صفرية لان معدل المساهمة في تحقيق الربح عندما يكون عدد الوحدات المنتجة من X_1=X_2=0 هو صفر ايضاً.

$$Max\ Z = 4X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

3. نحول المتغيرات في دالة الهدف الى طرف واحد وفق الصيغة الاتية: -

$$Max\ Z - 4X_1 - 5X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

4. ترتيب دالة الهدف والقيود في جدول Simplex وكما موضح في الجدول الاتي حيث يتضح ان الحل الأساسي الأولى المقبول هو

   Z=0 ,S_1=12, S_2=24 بمعنى عدم الإنتاج بصورة نهائية او المنشاة مازالت في بداية التأسيس والأنشاء بحيث ان المتغيرات الوهمية تمثل مواردها المتاحة والتي مازالت غير مستخدمة في العملية الإنتاجية.

5. تحديد المتغير الداخل: فما دامت المشكلة هي مشكلة (تعظيم) فأننا نبحث في صف دالة الهدف عن المتغير الذي يكون معامله اشد سالبية (الأكثر سالبية) وان الاشد سالبية هو (5-) الذي يمثل معامل X_2 لذلك فان X_2 سيكون المتغير الداخل الذي يعطي أكبر ربح للمنتج X_2 عند اختياره ويسمى عمود X_2 بالعمود المحوري وكما هو واضح من جدول (1).

جدول (1) ↓ **داخل**

خارج ← S_1

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
Z	-4	**-5**	0	0	0	---
S_1	1	**3** **عنصر محوري**	1	0	12	$4 = \frac{12}{3}$
S_2	4	3	0	1	24	$8 = \frac{24}{3}$

6. <u>تحديد المتغير الخارج</u>: أن عمود X_2 في مصفوفة الـ (Simplex) يسمى العمود المحوري فمن اجل إيجاد المتغير الخارج يتم تقسيم الثابت (R.H.S) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري عدا صف دالة الهدف وكالاتي: -

- في صف S_1 فأن $\mathbf{4 = \frac{12}{3}}$
- في صف S_2 فأن $\mathbf{8 = \frac{24}{3}}$

أن اقل النسب هي **(4)** لذلك نطلق على العنصر **(3)** في صف S_1 العنصر المحوري والصف S_1 بالصف المحوري ولذلك فأن S_1 سيكون المتغير الخارج.

(<u>ملاحظة: يتم اختيار اقل النسب الموجبة</u>).

7. لإيجاد معادلة X_2 (المتغير الداخل او معادلة المحور) في المرحلة الثانية في جدول (Simplex) فأننا نقسم الصف المحوري على العنصر المحوري وكالاتي (أو نقسم صف المتغير الخارج على العنصر المحوري): -

معادلة X_2 الجديدة $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{12}{3}\right]$

8. لإيجاد معادلة Z الجديدة فأننا نقوم بضرب معادلة X_2 الجديدة بالعنصر المقابل للعنصر المحوري المقابل لـ Z ونطرحها من صف Z الأصلي وكالاتي:

معادلة Z الاصلية $[-4, -5, 0, 0, 0]$

$-$

العنصر المقابل للعنصر المحوري في Z الاصلية

معادلة X_2 الجديدة $-5 \times \left[\frac{1}{3}, \quad 1, \frac{1}{3}, 0, 4\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\frac{-7}{3}, \quad 0, \quad \frac{5}{3}, \quad 0, \quad 20\right]$

9. لإيجاد قيمة S_2 الجديدة فأننا نقوم بضرب معادلة X_2 بالعنصر المقابل للعنصر المحوري المقابل لـ S_2 ونطرحها من صف S_2 الأصلي وكالاتي: -

معادلة S_2 الاصلية $[4, \quad 3, \quad 0, \quad 1, \quad 24]$

$-$

معادلة X_2 الجديدة $3 \times \left[\frac{1}{3}, \quad 1, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad 4\right]$

معادلة S_2 الجديدة $[3, 0, -1, 1, 12]$

10. ولما كانت قيم دالة الهدف ما زال فيها قيم سالبة كما هو واضح من جدول (2) فإننا لم نصل للحل الأمثل وبذلك نستمر بالحل كما سبق حتى نصل للحل الأمثل بحيث تكون قيم $Z_j \geq 0$.

جدول (2)

داخل ↓ (X_1)

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	$\frac{-7}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	20
X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	4
S_2	③	0	-1	1	12

خارج ← (S_2)

11. نقوم مرة أخرى بتحديد المتغير الداخل الذي يحمل اعلى سالبيه ومن خلال الجدول رقم (2) نلاحظ ان معامل X_1 هو الذي يحمل اعلى سالبية $\frac{-7}{3}$ لذلك فان X_1 سيكون المتغير الداخل.

12. ثم نقوم بتحديد المتغير الخارج حيث يتم تقسيم الثابت او الطرف الأيمن (R.H.S) على العمودي المحوي (عمود المتغير الداخل) وكالاتي: في صف X_2 فان $\frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$، في صف S_2 فان $\frac{12}{3} = 4$. ان اقل النسب هي (4) لذلك نطلق على العنصر (3) *في صف* S_2 بالعنصر المحوري والصف S_2 بالصف المحوري ولذلك فأن S_2 سيكون المتغير الخارج.

13. لإيجاد معادلة X_1 الجديدة في الجدول (3) (العنصر الداخل) فإننا نقسم الصف المحوري على العنصر المحوري وكالاتي: -

معادلة X_1 الجديدة $\leftarrow \left[1,\qquad 0, \frac{-1}{3},\qquad \frac{1}{3},\qquad 4\right]$

14. لإيجاد معادلة Z الجديدة فإننا نقوم بضرب معادلة X_1 بالعنصر المحوري المقابل لـ Z ونطرحها من صف Z الأصلي او معادلة Z في الجدول (2)

معادلة Z القديمة في جدول(2) $\left[\frac{-7}{3},\ 0,\ \frac{5}{3},\ 0,\ 20\right]$ $-$

معادلة X_1 الجديدة $\frac{-7}{3} \times \left[1, 0, \frac{-1}{3},\qquad \frac{1}{3}, 4\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[0,\qquad 0,\qquad \frac{8}{9},\qquad \frac{7}{9}, \frac{88}{3}\right]$

15. لإيجاد معادلة X_2 الجديدة في الجدول (3) فإننا نقوم بضرب معادلة X_1 بالعنصر المحوري المقابل لـ X_2 ونطرحها من صف X_2 الأصلي في جدول (2) وكالاتي:

معادلة X_2 الاصلية $\left[\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 4\right]$

$-$

معادلة X_1 الجديدة $\frac{1}{3} \times \left[1, 0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 4\right]$

معادلة X_2 الجديدة $\left[0, 1, \frac{4}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{8}{3}\right]$

جدول (3)

B.V	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	**R.H.S**
Z	0	0	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{88}{3}$
$\mathbf{X_2}$	0	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{8}{3}$
$\mathbf{X_1}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4

يتبين من الجدول (3) ان جميع قيم صف Z هي اما موجبة أو صفرية مما يدل على ان الحل الأمثل قد تحقق حيث ان:

$$Z = \frac{88}{3}\ , X_1 = 4, X_2 = \frac{8}{3}$$

3.9.3 طريقة (M-Technique) or (Big M)

بعض المشاكل التي تكون فيها القيود من نوع أكبر او يساوي ($\geq$) فانه يصعب تطبيق أسلوب Simplex الاعتيادي لذلك يلجأ الى استخدام تقنية M او M الكبيرة ويمكن توضيحها بالمثال (1) وكما يلي:

مثال(1):

$$Min\ Z = 5X_1 + 6X_2 + 7X_3$$

S.to.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1000$$

$$X_1 \leq 300$$

$$X_2 \geq 150$$

$$X_3 \geq 200$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

لتحويل القيود أعلاه الى الصيغة القياسية (Standard Form) فأننا نضيف المتغيرات الراكدة (Slack variable) ثم نضيف متغيرات اصطناعية Artificial الى كل قيد له إشارة أكبر او يساوي أو مساواة وكالاتي:

1)

$$X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 1000$$

$$X_1 + S_1 = 300$$

$$X_2 - S_2 + R_2 = 150$$

$$X_3 - S_3 + R_3 = 200$$

2) نضيف المتغيرات الراكدة او الوهمية Slack Variable او الفائضة (Surplus Variable) والاصطناعية (Artificial Variable) وبمعامل صفر للمتغيرات الراكدة ومعامل M والتي تمثل كمية موجبة كبيرة الى المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف فتكون دالة الهدف كما يلي:

$$Min\ Z = 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3$$

اما إذا كانت الدالة Max فيتم إضافة (-M) الى المتغيرات الاصطناعية

3) ومن اجل ان نجعل معاملات المتغيرات الاصطناعية تساوي صفراً في دالة الهدف نضرب معاملات القيود ذات المتغيرات الاصطناعية (R) بموجب M بـ (+M) في حالة دالة الهدف Min اما إذا كانت Max فيتم ضرب القيود بـ (-M) (القيوم التي تحوي R)

$$Min\ Z - 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - \cancel{M}R_1 - \cancel{M}R_2 - \cancel{M}R_3 = 0$$

$$MX_1 \quad + MX_2 + MX_3 + \cancel{M}R_1 = \qquad 1000M$$

$$MX_2 - MS_2 + \cancel{M}R_2 = \qquad 150M$$

$$MX_3 - MS_3 + \cancel{M}R_3 = \qquad 200M$$

$$Min\ Z + (-5 + M)X_1 + (-6 + 2M)X_2 + (-7 + 2M)X_3 - 0S_1 - MS_2 - MS_3 = 1350M$$

وترتيباً على ما سبق فان نموذج البرمجة الخطية سيكون

$$Min\ Z + (-5 + M)X_1 + (-6 + 2M)X_2 + (-7 + 2M)X_3 - 0S_1 - MS_2 - MS_3 = 1350M$$

Subject to

$$X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 1000$$

$$X_1 + S_1 \qquad = 300$$

$$X_2 - S_2 + R_2 = 150$$

$$X_3 - S_3 + R_3 = 200$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

وباستخدام نفس خطوات Simplex السابقة نحصل على الحل الأمثل والموضح في الجداول ادناه مع مراعاة ان المتغير الداخل سيكون أكبر معامل موجب في دالة الهدف لان نوع الدالة هو التقليل (Min) وهو المعامل X_2 حيث يقابل قيمة (-6+2M) اما المتغير الخارج فهو المتغير الواقع امام اقل نسبة من النسب الاتية مع مراعاة عدم التقسيم على الصفر والسالب

$$\left[\frac{150}{1},\frac{1000}{1}\right]$$

لذلك فان 150 اقل النسب وهي تقابل المتغير الاصطناعي R_2 وهكذا نستمر بحل المشكلة حتى نصل الى الحل الأمثل.

داخل

جدول (1)

B.V	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**S3**	**R1**	**R2**	**R3**	**R.H.S**
Z	(-5+M)	(-6+2M)	(-7+2M)	0	-M	-M	0	0	0	1350M
R1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1000
S1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300
R2	0	**1** عنصر محوري	0	0	-1	0	0	1	0	150
R3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200

خارج

- لإيجاد معادلة X_2 (المتغير الداخل) في المرحلة الثانية فأننا نقسم الصف المحوري على العنصر المحوري وكالاتي:

$$\left[\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1},\frac{-1}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{150}{1}\right]$$ معادلة X_2 المتغير الداخل

- ولإيجاد معادلة Z الجديدة فأننا نقوم بضرب معادلة X_2 الجديدة بالعنصر المقابل للمحوري في دالة Z القديمة أو العنصر المناظر لـ Z ونطرحها من صف Z الأصلي أو Z القديمة وكالاتي:

معادلة Z القديمة او الاصلية – [معادلة X_2 الجديدة] × العنصر المقابل للعنصر المحوري في Z القديمة

معادلة Z القديمة $[\ (-5+M),\ (-6+2M),\ (-7+2M),\ 0, -M, -M,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1350M]$

$-$

معادلة X_2 الجديدة $(-6+2M) \times [\ 0,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad -1,\ 0,\ \ 0,1,\quad 0,\quad 150]$

معادلة Z الجديدة$[\ (-5+M), 0, (-7+2M), 0, (-6+M), -M, 0, (6-2M), 0, (900+1050M)]$

ولبيان كيفية الحصول على اخر عنصر في صف معادلة Z الجديدة والذي يمثل قيمتها وهو (900+1050M) كمثال على سير العملية الرياضية لبقية عناصر Z الجديدة: -

$$= 1350M - [(-6+2M) \times 150]$$

$$= 1350M - [-900+300M]$$

$$= 1350M + 900 - 300M$$

$$= 900 + 1050M$$

لإيجاد معادلة R_1 فأننا نقوم بضرب معادلة X_2 بالعنصر المحوري المناظر لـ R_1 ونطرحها من صف R_1 أو معادلة R_1 الاصلية او القديمة وكالاتي: -

× معادلة R_1 القديمة $[1, 1, 1,\ 0,\ 0, 0, 1, 0, 0,\ 1000]$

$-$

معادلة X_2 الجديدة $[\ 0,1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 150]$ x العنصر المقابل للعنصر المحوري في R1 القديمة (1)

معادلة R_1 الجديدة $[\ 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 850\ ]$

- لإيجاد معادلة S_1 الجديدة بنفس الخطوات السابقة: -

معادلة S_1 القديمة $[\ 1,\ 0,\ 0, 1,0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 300]$

$-$

معادلة X_2 الجديدة $0 \times [\ 0\ ,1\ \ ,0\ ,0\ \ , -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 150]$

معادلة S_1 الجديدة $[\ 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 300]$

- لإيجاد معادلة R_3 الجديدة وكما يأتي:

معادلة R_3 القديمة $[\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0, -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 200\ ]$

$-$

معادلة X_2 الجديدة $0 \times [\ 0\ ,1\ ,0\ ,0\ , -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 150]$

معادلة R_3 الجديدة $[\ 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 200\ ]$

بعدها يتم كتابة المعادلات الجديدة لـ R_3, S_1, R_1, Z في الجدول رقم (2) كما يأتي: -

نلاحظ احتواء صف دالة الهدف Z في جدول (2) على معادلات موجبة وهذا دلالة على ان هذا الحل هو حل غير أمثل

جدول (2)

B.V	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**S3**	**R1**	**R2**	**R3**	**R.H.S**
Z	(-5+M)	0	(-7+2M)	0	-6+M	-M	0	6-2M	0	900+1050M
R1	1	0	1	0	1	0	1	-1	0	850
S1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300
X2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150
R3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200

ولهذا سوف ندخل أكبر معامل موجب وهو معامل المتغير X_3 ونعتبره المتغير الداخل ونكمل الحل باستخدام نفس الخطوات السابقة الى ان نصل الى الحل الأمثل الذي يكون فيه صف دالة الهدف خالي من المعاملات الموجبة (لان الدالة هي دالة تقليل Min)

جدول (3)

B.V	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**S3**	**R1**	**R2**	**R3**	**R.H.S**
Z	(-5+M)	0	0	0	-6+M	-7+M	0	6-2M	7-2M	2300+650M
R1	1	0	0	0	1	0	1	-1	-1	650
S1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300
X2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150
X3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200

جدول (4)

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	S3	R1	R2	R3	R.H.S
Z	0	0	0	5-M	-6+M	-7+M	0	6-2M	7-2M	3800+350M
R1	0	0	0	-1	1	1	1	-1	-1	350
X1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300
X2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150
X3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200

جدول (5)

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	S3	R1	R2	R3	R.H.S
Z	0	0	0	-1	0	-1	6-M	-M	1-M	5900
S2	0	0	0	-1	1	1	1	-1	-1	350
X1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300
X2	0	1	0	-1	0	1	1	0	-1	500
X3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200

نلاحظ من خلال الجدول الأخير وهو جدول (5) ان صف دالة الهدف (Z) قيمه خاليه من أي معامل موجب وهذا دلالة على انه جدول الحل الأمثل.

مثال(2) استعمل طريقة M-Technique لحل مسالة البرمجة الخطية الاتية للوصول الى الحل الأمثل:

$$Max\ Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.to.

$$X_1 + 3X_2 = 9$$

$$2X_1 + X_2 \geq 12$$

$$X_1 - 3X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نقوم بتحويل الانموذج الى الصيغة القياسية

$$Max\ Z = 3X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2$$

S.to

$$X_1 + 3X_2 + R_1 = 9$$

$$2X_1 + X_2 - S_1 + R_2 = 12$$

$$X_1 - 3X_2 + S_2 = 3$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

ملاحظة مهمة: - السالب M او (-M) التي تم اضافتها الى المتغيرات الاصطناعية (R_i) في دالة الهدف هي حالة غير مرغوب فيها وهي كمية كبيرة سالبة وتحاول التأثير على الأرباح الكلية (قيمة Z) لذلك سيتم التخلص منها عن طريق ضرب القيود بـ M- ايضاً (القيود التي تحوي متغيرات اصطناعية فقط). وتعكس الحالة إذا كانت الدالة هي دالة كلفة أي (Min) أي ستضاف M الى دالة الهدف وتضرب القيود بـ M.

$Max\ Z - 3X_1 - 5X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$

ملاحظة: تم ضرب القيود التي تحوي R بـ M-

$-MX_1 - 3MX_2 - MR_1 = -9M$

$-2MX_1 - MX_2 + MS_1 - MR_2 = -12M$

$Max\ Z + (-3 - 3M)X_1 + (-5 - 4M)X_2 + MS_1 - 0S_2 = -21M$

S.to.

$X_1 + 3X_2 + R_1 = 9$

$2X_1 + X_2 - S_1 + R_2 = 12$

$X_1 - 3X_2 + S_2 = 3$

$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$

نضع الانموذج أعلاه في جدول

جدول (1)

داخل ↓

B.V	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**R1**	**R2**	**R.H.S**
Z	-3-3M	-5-4M	M	0	0	0	-21M
خارج ← **R1**	1	**3** عنصر محوري	0	0	1	0	9
R2	2	1	-1	0	0	1	12
S2	1	-3	0	1	0	0	3

ثم نقوم بتحديد المتغير الداخل وبما ان الدالة هي تعظيم (Max) فيتم اختيار أكبر او اشد معامل بالسالب وهو المتغير X_2 ثم نقوم بتحديد المتغير الخارج وذلك بتقسيم عمود الثابت (R.H.S) على عمود المتغير الداخل واهمال القسمة على الصفر او السالب ثم اختيار اقل النسب التي تناظر أحد المتغيرات الأساسية (B.V) أي يتم تقسيم:

$12 = \frac{12}{1},\ 3 = \frac{9}{3}$ فيتم اختيار المتغير الاصطناعي R_1 كمتغير خارج ويكون عنصر تقاطع عمود المتغير الداخل (X_2) مع صف المتغير الخارج (صف R_1) هو العنصر 3.

ثم نجد معادلة المتغير الداخل او صف المتغير الداخل (X_2 الجديد) وذلك بقسمة صف المتغير الخارج (الصف المحوري) على العنصر المحوري

معادلة X_2 الجديدة $\left[\frac{1}{3}, 1, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 3\right]$

بعدها نجد معادلة Z الجديدة وكما يأتي:

معادلة Z القديمة $[-3-3M, -5-4M,\ M,\ 0,\ 0,\ 0, -21M]$

—

معادلة X_2 الجديدة $(-5-4M) \times \left[\ \frac{1}{3},\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 3\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\frac{-4}{3} - \frac{5M}{3}, 0, M, 0, \frac{5+4M}{3}, 0, 15-9M\right]$

لإيجاد معادلة R_2 الجديدة: -

معادلة R_2 القديمة $[\ 2, 1, -1, 0, 0, 1, 12\ ]$

—

معادلة X_2 الجديدة $1 \times \left[\ \frac{1}{3},\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0, 3\right]$

معادلة R_2 الجديدة $\left[\ \frac{5}{3},\ 0, -1,\ 0,\ \frac{-1}{3},\ 1,\ 9\right]$

لإيجاد معادلة S_2 الجديدة: -

معادلة S_2 القديمة $[\ 1, -3,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 3]$

—

معادلة X_2 الجديدة $-3 \times \left[\ \frac{1}{3},\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 3\right]$

معادلة S_2الجديدة $[\ 2, 0, 0, 1, 1, 0, 12]$

جدول (2)

داخل ↓ X1

B.V	X1	X2	S1	S2	R1	R2	R.H.S
Z	$\frac{-4}{3}-\frac{5M}{3}$	0	M	0	$\frac{5}{3}+\frac{4M}{3}$	0	15-9M
X2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	3
R2	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	0	-1	0	$\frac{-1}{3}$	1	9
S2	2	0	0	1	1	0	12

خارج ← R2

ونظراً لوجود قيمة سالبة في صف دالة الهدف وتحت المتغير X_1 فستكرر العمليات سابقة الذكر من البداية

نحدد المتغير الخارج: -

$$6=\frac{12}{2} \qquad * \qquad \text{اقل النسب} \quad \frac{27}{5}=\frac{3}{5}\times 9=\frac{9}{\frac{5}{3}} \qquad * \qquad 9=\frac{3}{\frac{1}{3}} \qquad *$$

لإيجاد معادلة X_1 الجديدة

$$\left[\ 1,0,\frac{-3}{5},0,\frac{-1}{5},\frac{3}{5},\frac{27}{5}\right]$$

لإيجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $\left[\left(\frac{-4}{3}-\frac{5M}{3}\right),0,M,0,\left(\frac{5}{3}+\frac{4M}{3}\right),0,(15-9M)\right]$

$-$

معادلة X_1 الجديدة $\left(\frac{-4}{3}-\frac{5M}{3}\right)\times\left[0,\ 1,\ 0,\ \frac{-3}{5},\ 0,\ \frac{-1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{27}{5}\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\ 0,0,\frac{-4}{5},0,\left(\frac{7}{5}+M\right),\left(\frac{4}{5}+M\right),\frac{111}{5}\right]$

لإيجاد معادلة X_2 الجديدة

معادلة X_2 القديمة $\left[\frac{1}{3},1,0,0,\frac{1}{3},0,3\right]$

$-$

معادلة X_1 الجديدة $\left(\frac{1}{3}\right)\times\left[1,0,\frac{-3}{5},0,\frac{-1}{5},\frac{3}{5},\frac{27}{5}\right]$

معادلة X_2 الجديدة $\left[0,1,\frac{3}{5},0,\frac{6}{15},\frac{-3}{15},\frac{18}{15}\right]$

لإيجاد معادلة S_2الجديدة

معادلةS_2 القديمة $[\ 2,0,0,1,1,0,12]\ [\ ]$

$-$

معادلةX_1 الجديدة $(2)\times\left[1,0,\frac{-3}{5},0,\frac{-1}{5},\frac{3}{5},\frac{27}{5}\right]$

معادلةS_2 الجديدة $\left[0,0,\frac{6}{5},1,\frac{7}{5},\frac{-6}{5},\frac{6}{5}\right]$

ثم يتم تنظيم جدول (3) بالمعادلات الجديدة التي تم استخراجها.

جدول (3) ↓ **داخل**

B.V	X1	X2	S1	S2	R1	R2	R.H.S
Z	0	0	$\frac{-4}{5}$	0	$\frac{7}{5}+M$	$\frac{4}{5}+M$	$\frac{111}{5}$
X2	0	1	$\frac{3}{15}$	0	$\frac{6}{15}$	$\frac{-3}{15}$	$\frac{18}{15}$
X1	1	0	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{27}{5}$
S2	0	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{-6}{5}$	$\frac{6}{5}$

خارج ←

يتم تحديد المتغير الخارج

النسب اقل $1 = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}}$. $6 = \frac{18}{3} = \frac{\frac{18}{15}}{\frac{3}{15}}$

معادلة $S1$ الجديدة $\left[\ 0, 0, 1, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, -1, 1\right]$

لإيجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $\left[\ 0, 0, \frac{-4}{5}, 0, \left(\frac{7}{5} + M\right), \left(\frac{4}{5} + M\right), \frac{111}{5}\right]$

$-$

معادلة S_1 الجديدة $\frac{-4}{5} \times \left[\ 0, 0, 1, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, -1, 1\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\ 0, 0, 0, \frac{2}{3}, \left(\frac{7}{3} + M\right), M, 23\right]$

لإيجاد معادلة X_2 الجديدة

معادلةX_2 القديمة $\left[0, 1, \frac{3}{15}, 0, \frac{6}{15}, \frac{-3}{15}, \frac{18}{15}\right]$

$-$

معادلةS_1 الجديدة $\frac{3}{15} \times \left[\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6}, -1,\ 1\right]$

معادلةX_2 الجديدة $\left[\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{-1}{6},\ \frac{1}{6},\ 0,\ 1\right]$

لإيجاد معادلة X_1 الجديدة

معادلةX_1 القديمة $\left[\ 1,\ 0,\ \frac{-3}{5},\ 0,\ \frac{-1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{27}{5}\right]$

$-$

معادلةS_1 الجديدة $\frac{-3}{5} \times \left[\ 0, 0, 1, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, -1, 1\right]$

معادلةX_1 الجديدة $\left[\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}, 0,\ 6\right]$

جدول (4)

B.V	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**R1**	**R2**	**R.H.S**
Z	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}+M$	M	23
X2	0	1	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	1
X1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6
S1	0	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	-1	1

- يتبين ان صف دالة الهدف في جدول (4) لا يحتوي على معاملات سالبة فيعتبر هو جدول الحل الأمثل أي ان:

Optimal Solution:

Z=23

X_1=6

X_2=1

<u>مثال(3)</u>: جد الحل الأمثل باستعمال الطريقة (M-Technique):

$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 3X_3$

S.to

$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 2$

$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 8$

$X_1, X_2, X_1 \geq 0$

<u>الحل:</u>

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 0S_1 + 0S_2 - MR_2$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 2$$

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 - S_2 + R_2 = 8 \quad \times (-M)$$

$$X_1, X_2, X_1, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

- بعد ان تم إضافة المتغيرات الوهمية (S_1, S_2) بمعاملات صفرية الى دالة الهدف وبعد ان تم ضرب المتغيرات الاصطناعية (R_2) بـ (-M) يتم طرح (-MR_2) من دالة الهدف لان الدالة هي من نوع (Max).
- الخطوة الأخرى هي ضرب القيود التي تحوي (R) بـ (-M) ثم يتم اضافتها الى دالة الهدف ليتم التخلص من المتغيرات الاصطناعية وهي (R_2)

$$Max\ Z - 3X_1 - 2X_2 - 3X_3 - 0S_1 - 0S_2 + \cancel{M}R_2 = 0$$

$$\underline{-3MX_1 - 4MX_2 - 2MX_3 + MS_2 - \cancel{MR}_2 = -8M \quad \times (-M)}$$

$$Max\ Z + (-3 - 3M)X_1 + (-2 - 4M)X_2 + (-3 - 2M)X_3 - 0S_1$$
$$+ MS_2 = -8M$$

S.to.

$$2X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 2$$

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 - S_2 + R_2 = 8$$

$$X_1, X_2, X_1, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

جدول (1)

داخل ↓

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	R2	R.H.S
Z	-3-3M	-2-4M	-3-2M	0	M	0	-8M
S1	2	1	1	1	0	0	2
R2	3	4 محوري	2	0	-1	1	8

خارج ←

- يتم تحديد المتغير الداخل الذي يكون معامله أكبر معامل سالب لان الدالة هي من نوع Max
- يتم تحديد المتغير الخارج وذلك بتقسيم عمود الثابت (R.H.S) على عمود المتغير الداخل وثم اختيار اقل النسب او اختيار احداهما إذا ظهرت حالة المساواة بين نسبتين هما الأقل بين النسب (حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية وهي حالة الانحلال).

$$2 = \frac{2}{1} \qquad , \qquad 2 = \frac{8}{4}$$

معادلة X_2 الجديدة $\left[\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, 2\right]$

لإيجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $[\,(-3-3M), (-2-4M), (-3-2M), 0, M, 0, -8M]$

$-$

معادلة X_2 الجديدة $(-2-4M) \times \left[\,\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, 2\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\,\frac{-3}{2},\ 0, -2,\ 0,\ \frac{-1}{2},\ \left(\frac{1}{2} + M\right),\ 4\right]$

لإيجاد معادلة S_1 الجديدة

معادلة S_1 القديمة $[\ 2, 1, 1, 1, 0, 0, 2]$

معادلة X_2 الجديدة $\left[\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, 2\right] \times (1)$ $-$

معادلة S_1 الجديدة $\left[\ \frac{5}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, 0\right]$

جدول (2)

داخل ↓ X3

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	R2	R.H.S
Z	$\frac{-3}{2}$	0	-2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}+M$	4
S1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0
X2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2

خارج ← S1

- وبسبب ظهور قيم سالبة في صف دالة الهدف فسيتم إعادة العمليات السابقة ابتداءً من تحديد المتغير الداخل الى إيجاد القيم الجديدة لمعادلة دالة الهدف والمتغيرات الأساسية.
- يتم تحديد المتغير الخارج الذي يمثل اقل النسب

$$0 = \frac{0}{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad 1 = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

معادلة X_3 الجديدة $\left[\ \frac{5}{2}, 0, 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right]$

لإيجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $\left[\frac{-3}{2},0,-2,0,\frac{-1}{2},\left(\frac{1}{2}+M\right),4\right]$

معادلة X_3 الجديدة $— \quad (-2)\times\left[\frac{5}{2},0,1,2,\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\frac{7}{2},0,0,4,\frac{1}{2},\left(\frac{-1}{2}+M\right),4\right]$

لإيجاد معادلة X_2 الجديدة

معادلة X_2 القديمة $\left[\frac{3}{4},1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{4},\frac{1}{4},2\right]$

معادلة X_3 الجديدة $— \quad \left(\frac{1}{2}\right)\times\left[\frac{5}{2},0,1,2,\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right]$

معادلة X_2 الجديدة $\left[\frac{-1}{2},1,0,-1,\frac{-1}{2},\frac{1}{2},2\right]$

جدول (3)

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	R2	R.H.S
Z	$\frac{7}{2}$	0	0	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}+M$	4
X3	$\frac{5}{2}$	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
X2	$\frac{-1}{2}$	1	0	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

- بما أن صف دالة الهدف في جدول (3) لا يحتوي على معاملات سالبة فيعتبر هو جدول الحل الأمثل Optimal Solution:

$Z=4, X_1=0, X_2=2, X_3=0$

1.3.9.3 أمثلة إضافية محلولة على طريقة Big M

مثال(4): جد الحل الأمثل باستعمال الطريقة (M-Technique)

$$\text{Max } Z = 3X_1 - X_2$$

S.to

$$2X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 3$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

يتم التحويل الى الانموذج القياسي

$$\text{Max } Z = 3X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MA_1$$

$$2X_1 + X_2 - S_1 + A_1 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 + S_2 = 3$$

$$X_2 + S_3 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, A_1 \geq 0$$

يجب التعويض عن قيمة A_1 في دالة الهدف من القيد الأول حيث:

$$A_1 = 2 - 2X_1 - X_2 + S_1$$

$$Z = 3X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - M(2 - 2X_1 - X_2 + S_1)$$

$$Z = 3X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - 2M + 2MX_1 + MX_2 - MS_1$$

$$Z = (3 + 2M)X_1 + (-1 + M)X_2 - MS_1 - 2M$$

$$Z + (-3 - 2M)X_1 + (+1 - M)X_2 + MS_1 = -2M$$

داخل ↓

جدول (1)

خارج ←

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	R.H.S
A_1	②	1	-1	0	0	1	2
S_2	1	3	0	1	0	0	3
S_3	0	1	0	0	1	0	4
Z	$-3-2M$	$1-M$	M	0	0	0	-2M

معادلة المحور او معادلة المتغير الداخل(X_1) $\left[1,\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0,0,\frac{1}{2},1\right]$

معادلة Z الجديدة= [معادلة Z القديمة] – [معادلة المحور] × العنصر الذي يقابل العنصر المحوري في Z القديمة

معادلة Z القديمة $[-3-2M$, 1-M, M, 0, 0, 0, -2M]

معادلة المحور بعد ضربها بالعنصر الذي يقابل العنصر المحوري $(-3-2M)$ ثم طرحها من Z القديمة

$$\left[(-3-2M), (\frac{-3}{2}\text{-M}), (\frac{3}{2}+M), 0, 0, \left(\frac{-3}{2}-M\right), (\text{-3-2M})\right]$$

معادلة Z الجديدة $\left[0, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{-3}{2}, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{3}{2}+M, \quad 3\right]$

لاستخراج S_2 الجديدة

معادلةS_2 القديمة $[1, \quad 3, \quad 0, \quad 1, \quad 0 \ ,0 \quad , \quad 3]$

معادلة المتغير الداخلX_1 $-\left[1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad 0, \quad 0 \ , \frac{1}{2} \quad , \quad 1\right]$

معادلةS_2 الجديدة $\left[0, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 0 \ , \frac{-1}{2} \quad , \quad 2\right]$

لاستخراج S_3 الجديدة

$$
\begin{array}{l}
[0,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad 1\ ,0\quad ,\quad 4] \\
-\,[0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\ ,0\quad ,\quad 0]
\end{array}
$$

S_3 الجديدة $[0,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\quad 1\ ,0\quad ,\quad 4]$

جدول(2) ↓ داخل

خارج ← S_2

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	R.H.S
X_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
S_2	0	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	$\frac{-1}{2}$	2
S_3	0	1	0	0	1	0	4
Z	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{-3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}+M$	3

معادلة المحور او S_1 $\left[1,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right]$

معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $[-3-2M,\quad 1\text{-}M,\quad M,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \text{-}2M]$

$-$

$$\frac{-3}{2}\times\left[0,\quad \frac{-15}{2},\quad \frac{-3}{2},\quad -3,\quad 0\ ,\ \frac{3}{2}\quad ,\quad -6\right]$$

معادلة Z الجديدة $[0,\quad 10,\quad 0,\quad 3,\quad 0,\quad M,\quad 9]$

معادلة X_1 الجديدة

معادلة X_1 القديمة $\left[1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1\right]$

$-$

$$\frac{-1}{2} \times \left[0, \quad \frac{-5}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad -1, \quad 0 \ , \frac{1}{2} \quad , \quad -2\right]$$

معادلة X_1 الجديدة $[1, \quad 3, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 3]$

معادلة S_3 الجديدة

معادلة S_3 القديمة $[0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 4]$

$-$

$$0 \times [0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \ , 0 \quad , \quad 0]$$

معادلة S_3 الجديدة $[0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 4]$

جدول (3)

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	R.H.S
X_1	1	3	0	1	0	0	3
S_1	0	5	1	2	0	-1	4
S_3	0	1	0	0	1	0	4
Z	0	10	0	3	0	M	9

من جدول (3) نلاحظ ان الجميع قيم الصف Z هو قيم موجب والذي يمثل أمثل ربح حيث أن:

$$Z = 9 \ , X_1 = 3 \ , X_2 = 0, S_1 = 4, S_2 = 0, S_3 = 4$$

مثال (5): استعمل طريقة M-Tech لايجاد الحل الأمثل

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$

$$S.\text{to}$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 30$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 \qquad = 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR$$

$$Max\ Z - 4X_1 - 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR = 0$$

$$S.\text{to}$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_1 = 30$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 20$$

$$X_1 + \text{R} \qquad = 9 \quad \times -M$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R \geq 0$$

لايجاد Z الجديدة بعد المتغيرات الاصطناعية

$$Max\ Z - 4X_1 - 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR = 0$$

$$-M\ X_1 - \text{MR} \qquad = -9M$$

$$Max\ Z + (-4 - M)X_1 + (-3X_2) = -9M$$

S.to

$$3X_1 + 2X_2 + S_1 = 30$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 20$$

$$X_1 + \text{R} \qquad = 9$$

جدول (1) الحل الأساسي الاولي

داخل ↓ X_1

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R	R.H.S
S_1	3	2	1	0	0	30
S_2	1	2	0	1	0	20
خارج ← R	**1**	0	0	0	1	9
Z	-4-M	-3	0	0	0	-9M

$$\frac{9}{1}=9\ ,\qquad \frac{30}{3}=10\ ,\qquad \frac{20}{1}=20$$

معادلة المحور او X_1 $[1,0,0,0,1,9]$

معادلة Z الجديدة =

Z القديمة $[(-4-M),-3,\ 0,\ 0,\ 0,-9M]$

— معادلة X_1 $(-4-M)\times\ [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 9]$

معادلة Z الجديدة $[0,-3,0,0,(4+M),36]$

معادلة S_1 الجديدة =

S_1 القديمة $[(-4-M),-3,0,0,0,-9M]$

— معادلة X_1 $(-4-M)\times\ [1,0,0,0,1,9]$

معادلة S_1 الجديدة $[0,2,1,0,-3,3]$

معادلة S_2 الجديدة

S_2 القديمة $[(-4-M),-3,0,0,0,-9M]$

— معادلة X_1 $(-4-M)\times\ [1,0,0,0,1,9]$

معادلة S_2 الجديدة $[0,2,0,1,-1,11]$

جدول (2)

داخل ↓

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R	R.H.S
S_1 ← خارج	0	**2**	1	0	-3	3
S_2	0	2	0	1	-1	11
R	1	0	0	0	1	9
Z	0	-3	0	0	4+M	36

ملاحظة: جدول (2) ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في صف Z

معادلة $X_2 = \left[0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

معادلة Z الجديدة =

Z القديمة $[0, -3, 0, 0, 4 + M, 36]$

معادلة X_2 $(-3) \times \left[0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{-3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$ —

معادلة Z الجديدة $\left[0, 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{-1 + 2M}{2}, 40\right]$

معادلة S_2 الجديدة =

S_2 القديمة $[0, 2, 0, 1, -1, 11]$

معادلة X_2 $(2) \times \left[0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{-3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$ —

معادلة S_2 الجديدة $[0, 0, -1, 1, 2, 8]$

معادلة X_1 الجديدة =

X_1 القديمة $[1, 0, 0, 0, 1, 9]$

معادلة X_2 $(0) \times \left[0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ —

معادلة X_1 الجديدة $[1, 0, 0,\ 0, 1, 9]$

جدول (3) الحل الامثل

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R	R.H.S
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$
S_2	0	0	-1	1	2	8
X_1	1	0	0	0	1	9
Z	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{-1+2M}{2}$	40.5

الحل أمثل $Z=40.5, \; X_1=9 \; , X_2=\frac{3}{2}$

<u>مثال (6)</u>: أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام Big M

$$Min\ Z = 5X_1 + 7X_2$$

$$S.\text{to}$$

$$X_1 + 2X_2 = 50$$

$$X_1 \geq 20$$

$$X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

<u>الحل:</u>

$$Min\ Z = 5X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$S.\text{to}$$

$$X_1 + 2X_2 + A_1 = 50$$

$$X_1 - S_1 + A_2 = 20$$

$$X_2 + S_2 = 20$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

ولأن A_1 و A_2 متغيرات أساسية في القيود يجب أن يكون معاملها في دالة الهدف في الحل الأساسي الأولي يساوي صفراً لذلك يجب التعويض عنها في دالة الهدف من القيدين الأول والثاني حيث:

$$A_1 = 50 - X_1 - 2X_2$$

$$A_2 = 20 - X_1 + S_1$$

$$Z = 5X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + M(50 - X_1 - 2X_2) + M(20 - X_1 + S_1)$$

$$Z = 5X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 50M - MX_1 - 2MX_2 + 20M - MX_1 + MS_1$$

$$Z = (5 - 2M)X_1 + (7 - 2M)X_2 + MS_1 + 70M$$

$$Z + (-5 + 2M)X_1 + (-7 + 2M)X_2 - MS_1 = 70M$$

الجدول ادناه يبين الحل الأساسي (الأولي) لهذه المشكلة وكالاتي:

داخل ↓

	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	Sol.
	A_1	1	2	0	0	1	0	50
خارج ←	A_2	①	0	-1	0	0	1	20
	S_2	0	1	0	1	0	0	20
	Z	$-5+2M$	$-7 + 2M$	$-M$	0	0	0	70M

معادلة المحور او X_1 $[1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 20]$

معادلة Z الجديدة= [معادلة Z القديمة] – [معادلة المحور] × العنصر الذي يقابل العنصر المحوري في Z القديمة

معادلة Z القديمة $[(-5+2M),\ (-7+2M),\ -M,\ 0,\ 0,\ 0,\ 70M]$

$-$

$(-5+2M) \times [1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 20]$

معادلة Z الجديدة $[0,\ (-7+2M),\ (-5+M),\ 0,\ 0,\ (5-2M),\ (100+30M)]$

لايجاد معادلة A_1 الجديدة

معادلة A_1 القديمة $[1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 50]$

بعد ضربها بـ (1) ثم طرحه من A_1

معادلة X_1 $-[1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 20]$

معادلة A_1 الجديدة $[0,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 30]$

معادلة S_2 الجديدة

معادلة S_2 القديمة $[0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 20]$

بعد ضربها بـ (0)ثم طرحها من S_2

معادلة X_1 $-[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$

معادلة S_2 الجديدة $[0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 20]$

داخل ↓

خارج ←

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	Sol.
A_1	0	②	1	0	1	-1	30
X_1	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	1	0	1	0	0	20
Z	0	$-7+2M$	$-5+M$	0	0	$5-2M$	100+30M

معادلة المحور $\left[0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ 15\right]$

معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $[0, (-7+2M), (-5+M), 0, 0, (5-2M), (100+30M)]$

بعد ضرب معادلة المحور ب$(-7+2M)$ ثم طرحها من Z

$$-\left[0, (-7+2M), \left(\frac{-7}{2}+M\right), 0, \left(\frac{-7}{2}+M\right), \left(\frac{7}{2}-M\right), (-105+30M)\right]$$

معادلة Z الجديدة $\left[0,\ 0,\ \frac{-3}{2},\ 0,\ \left(\frac{7}{2}-M\right),\ \left(\frac{3}{2}-M\right),\ 205\right]$

معادلة S_2 الجديدة

معادلة S_2 القديمة $[0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 20]$

بعد ضربها بـ (1) ثم طرحها من S_2

$$-\left[0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ 15\right]$$

معادلة S_2 الجديدة $\left[0,\ 0,\ \frac{-1}{2},\ 1,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{2},\ 5\right]$

معادلة X_1 الجديدة

معادلة X_1 القديمة $[1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 20]$

بعد ضربها بـ (0) ثم طرحها من X_1

$$-[0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0]$$

معادلة X_1 الجديدة $[1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 20]$

جدول (3)

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	Sol.
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	15
X_1	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	0	$\frac{-1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
Z	0	0	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{7}{2} - M$	$\frac{3}{2} - M$	205

من جدول رقم (3) نلاحظ ان جميع قيم الصف Z سالبة وهذا معناه الحصول على الحل الأمثل

$$Z = 205$$

$$X_1 = 20$$

$$X_2 = 15$$

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = 5$$

4.9.3 طريقة المرحلتين Two- Phase Method

<u>مثال(1)</u> اوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الاتية باستخدام طريقة المرحلتين Two-phase

$$Min\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.\text{to}$$

$$3X_1 + 3X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \ \ \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: سيتم في هذا المثال توضيح خطوات الحل لطريقة المرحلتين (Two-Phase):

1. يتم تحويل الانموذج الى الصيغة القياسية وذلك بإضافة المتغيرات المكملة والاصطناعية للقيود

$$3X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + A_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$

2. يتم تحويل دالة الهدف الاصلية(Z) الى الشكل الاتي ومساواتها بالصفر.

$$Min\ Z - 2X_1 - X_2 = 0$$

3. يتم تشكيل دالة هدف جديدة (W) والتي تكون عبارة عن مجموع المتغيرات الاصطناعية وهي من نوع التصغير دائما (Min w) وكما يلي:

$$Min\ W = A_1 + A_1$$

4. نضع القيود التي تحتوي على المتغيرات الاصطناعية بدلالة متغيراتها الاصطناعية

$$A_1 = 3 - 3X_1 - X_2 + S_1$$

$$A_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2$$

5. نجد دالة الهدف الجديدة بعد ان يتم تبسيطها وكما يلي:

$$W = 3 - 3X_1 - X_2 + S_1 + 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2$$

$$= -7X_1 - 4X_2 + S_1 + S_2 + 9$$

$$W + 7X_1 + 4X_2 - S_1 - S_2 = 9$$ دالة الهدف الجديدة

6. نجد جدول الحل الأساسي الاولي والذي يحتوي على دالة الهدف الجديدة (W) ودالة الهدف الاصلية (Z) حيث يتم العمل بالطريقة المبسطة (Simplex) من تحديد للمتغير الداخل والخارج والعمليات المحورية اعتمادا على دالة الهدف الجديدة (W)

جدول (1)

داخل ↓ (X1)

خارج ← (A1)

B.V	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**A1**	**A2**	**R.H.S**
A1	3	1	-1	0	0	1	0	3
A2	4	3	0	-1	0	0	1	6
S3	1	2	0	0	1	0	0	3
Min Z	-2	-1	0	0	0	0	0	0
Min W	7	4	-1	-1	0	0	0	9

معادلة المحور $\left[1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 1\right]$

لايجاد معادلة W الجديدة

معادلة W القديمة $[7,4,-1,-1,0,0,0,9]$ —

معادلة المحور $(7) \times \left[1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 1\right]$

معادلة W الجديدة $\left[0, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -1, 0, \frac{-7}{3}, 0, 2\right]$

لايجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $[-2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$-$

معادلة المحور $(-2) \times \left[1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 1\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[0, \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}, 0, 0, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, 0, 2\right]$

لايجاد معادلة A_2 الجديدة

معادلة A_2 القديمة $[4, 3, 0, -1, 0, 0, 1, 6]$

$-$

معادلة المحور $(4) \times \left[1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 1\right]$

معادلة A_2 الجديدة $\left[0, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, -1, 0, \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}}, 1,2\right]$

لايجاد معادلة S_3 الجديدة

معادلة S_3 القديمة $[1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 3]$

$-$

معادلة المحور $(1) \times \left[1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 1\right]$

معادلة S_3 الجديدة $\left[0, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, 0, 1, \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}, 0, 2\right]$

جدول (2)

داخل ↓ X2

خارج ← A2

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	R.H.S
X1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1
A2	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2
S3	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2
Min Z	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	2
Min W	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	0	$\frac{-7}{3}$	0	2

نلاحظ ان الصف W لا يزال يحتوي على قيم موجبة فنستمر بالحل فيكون المتغير الداخل هو X_2 والخارج هو A_2

معادلة المحور $\left[0, 1, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right]$

لايجاد معادلة W الجديدة

معادلة W القديمة $\left[0, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -1, 0, \frac{-7}{3}, 0, 2\right]$

معادلة المحور $-\left(\frac{5}{3}\right) \times \left[0, 1, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right]$

معادلة W الجديدة $[0,\ 0,\ 0, 0,\ 0, -1, -1,\ 0]$

لايجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $\left[0, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0, 2\right]$

$-$

معادلة المحور $\left(\frac{-1}{3}\right) \times \left[0, 1, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[0\ , 0, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}, 0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right]$

لايجاد معادلة X_1 الجديدة

معادلة X_1 القديمة $\left[1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 1\right]$

$-$

معادلة المحور $\left(\frac{1}{3}\right) \times \left[0, 1, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\ , \frac{6}{5}\right]$

معادلة X_1 الجديدة $\left[1, 0, \frac{-3}{5}, \frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{3}{5}\right]$

لايجاد معادلة S_3الجديدة

معادلة S_3 القديمة $\left[0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, \frac{-1}{3}, 0, 2\right]$

$-$

معادلة المحور $\left(\frac{5}{3}\right) \times \left[0, 1, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\ , \frac{6}{5}\right]$

معادلة $S3$ الجديدة $[0\ ,\ \ 0, -1, 1, 1, 1, -1, 0]$

جدول (3)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	R.H.S
X1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{3}{5}$
X2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
S3	0	0	-1	1	1	1	-1	0
Min Z	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
Min W	0	0	0	0	0	-1	-1	0

7. نلاحظ ان صف دالة الهدف الجديدة (Min W) سالبة واصفار وقيمة دالة الهدف هي صفر، اذن حصلنا على الحل الأساسي، عليه ننتقل الى المرحلة الثانية ويتم ذلك بحذف أعمدة معاملات المتغيرات الاصطناعية وصف دالة الهدف (W) من جدول الحل الأمثل (للمرحلة الأولى) كما في جدول (3). ونحصل بعد ذلك على جدول (4) بذلك تنتهي المرحلة الأولى ونبدأ بالمرحلة الثانية.

جدول (4)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	R.H.S
X1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
X2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
S3	0	0	-1	1	1	0
Min Z	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$

8. تبدأ المرحلة الثانية حيث يتم العمل بالطريقة المبسطة (Simplex) من تحديد للمتغير الداخل والخارج والعمليات المحورية اعتمادا على دالة الهدف القديمة (Z) وبما ان دالة الهدف الاصلية (Z) في الجدول (4) لاتحتوي على معاملات موجبة (لان قيم صف Z سالبة واصفار) عليه فان جدول (4) هو جدول الحل الأمثل، بذلك نكون قد توصلنا الى الحل الأمثل.

$$Z = \frac{12}{5} \quad , \quad X_1 = \frac{3}{5} \quad , \quad X_2 = \frac{6}{5}$$

مثال(2) اوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الأتية بأستخدام طريقة المرحلتين Two-phase

$$Max\ Z = 2X_1 - 4X_2 + X_3$$

$$S.\text{to}$$

$$2X_1 - 2X_2 + X_3 \le 8$$

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 \ge 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

الحل: بنفس الخطوات السابقة نبدأ الحل بطريقة المرحلتين Two-phase

$$2X_1 - 2X_2 + X_3 + S_1 = 8$$

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 - S_2 + A = 6$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, \text{A} \ge 0$$

يتم تحويل دالة الهدف الأصلية الى الشكل الاتي ومساواتها بالصفر

$$Z - 2X_1 + 4X_2 - X_3 = 0$$

اما دالة الهدف الجديدة والتي تكون من نوع (Min W) دائماً فيتم الحصول عليها كالاتي:

$$Min\ W = A$$

وأن:

$$A = 6 - X_1 - 2X_2 + 3X_3 + S_2$$

أذن:

$$W + X_1 + 2X_2 - 3X_3 - S_2 = 6$$

نقل الثوابت الى الطرف الأيمن او نقل المتغيرات الى الطرف الأيسر.

جدول (1)　　　　**داخل** ↓

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	A	R.H.S
S1	2	-2	1	1	0	0	8
A	1	2	-3	0	-1	1	6
Max Z	-2	4	-1	0	0	0	0
Min W	1	2	-3	-1	-1	0	6

خارج ← A

ملاحظة: المتغير الداخل هو X_2 لأنه يقابل أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف الجديدة (Min W)

معادلة المحور او معادلة X_2 الجديدة $\left[\frac{1}{2}, 1, \frac{-3}{2}, 0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right]$

لإيجاد معادلة W الجديدة

معادلة W القديمة $[1, 2, -3, 0, -1, 0, 6]$

$-$ معادلة المحور $(2) \times \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{-3}{2}, 0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right]$

معادلة W الجديدة $[0, 0, 0, 0, 0, -1, 0]$

لإيجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $[-2, 4, -1,0, 0, 0, 0]$

$-$

معادلة المحور $(4) \times \left[\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{-3}{2},\ 0,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{2},\ 3\right]$

معادلة Z الجديدة $[-4,0, 5, 0, 2, -2, -12]$

لإيجاد معادلة S_1 الجديدة

معادلةS_1 القديمة $[2, -2,1,1,0,0,8]$

$-$ معادلة المحور $(-2) \times \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{-3}{2}, 0,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{2}, 3\right]$

معادلةS_1 الجديدة $[3, 0, -2, 1, -1, 1, 14]$

جدول (2)

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	A	R.H.S
S1	3	0	-2	1	-1	1	14
X2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
Max Z	-4	0	5	0	2	-2	-12
Min W	0	0	0	0	0	-1	0

بما أن جميع قيم الصف W سالبة واصفار وقيمة الهدف هي صفر، اذن حصلنا على حل أساسي.

نحذف صف دالة الهدف الجديدة W وعمود المتغير الاصطناعي A وبذلك تنتهي المرحلة الأولى ونبدأ بالمرحلة الثانية وبتطبيق الطريقة المبسطة

جدول (3)

داخل ↓ X1

خارج ← S1

B.V	X1	X2	X3	S1	S2	R.H.S
S1	3	0	-2	1	-1	14
X2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	3
Max Z	-4	0	5	0	2	-12

معادلة المحور $\left[1, 0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{14}{3}\right]$

لايجاد معادلة Z الجديدة

معادلة Z القديمة $[-4,0,5,0,2,-12]$

—

معادلة المحور $(-4) \times \left[1, 0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{14}{3}\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[0,\ 0, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}\right]$

لايجاد معادلة X_2 الجديدة

معادلة X_2 القديمة $\left[\frac{1}{2}, 1, \frac{-3}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 3\right]$

—

معادلة المحور $\left(\frac{1}{2}\right) \times \left[1, 0, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{14}{3}\right]$

معادلة X_2 الجديدة $\left[0, 1, \frac{-7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

جدول (4) الحل الامثل

B.V	**X1**	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**R.H.S**
X1	1	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{14}{3}$
X2	0	1	$\frac{-7}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Max Z	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$

وبما ان جميع قيم الصف Z هي موجبة واصفار اذن حصلنا على الحل الأمثل

$$Z = \frac{20}{3}, X_1 = \frac{14}{3}, X_2 = \frac{2}{3}$$

مثال(3) استعمل طريقة ذات المرحلتين لايجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$

S.to

$$3X_1 + 2X_2 \leq 30$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 \qquad = 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$Max\ Z - 4X_1 - 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

S.to

$$3X_1 + 2X_2 + S_1 = 30$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 20$$

$$X_1 \qquad + R \quad = 9$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

$$Min\ W = R$$

$$R = 9 - X_1$$

$$W = 9 - X_1$$

$$W + X_1 = 9$$

المرحلة الأولى

جدول (1)

داخل ↓

خارج ←

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R	R.H.S
S_1	3	2	1	0	0	30
S_2	1	2	0	1	0	20
R	1	0	0	0	1	9
Min W	1	0	0	0	0	9
Max Z	-4	-3	0	0	0	0

معادلة $X_1 = [1, 0, 0, 0, 1, 9]$

معادلة W الجديدة =

W القديمة $[1, 0, 0, 0, 0, 9]$

—

معادلة X_1 $(1) \times [1, 0, 0, 0, 1, 9]$

معادلة W الجديدة $[0, 0, 0, 0, -1, 0]$

معادلة Z الجديدة =

Z القديمة $[-4, -3, 0, 0, 0, 0]$

—

معادلة X_1 $(-4) \times [1, 0, 0, 0, 1, 9]$

معادلة Z الجديدة $[0, -3, 0, 0, 4, 36]$

معادلة S_1 الجديدة =

S_1 القديمة $[3, 2, 1, 0, 0, 30]$

—

معادلة X_1 $(3) \times [1, 0, 0, 0, 1, 9]$

معادلة S_1 الجديدة $[0, 2, 1, 0, -3, 3]$

معادلة S_2 الجديدة =

S_2 القديمة $[1, 2, 0, 1, 0, 20]$

—

معادلة X_1 $(1) \times [1, 0, 0, 0, 1, 9]$

معادلة S_2 الجديدة $[0, 2, 0, 1, -1, 11]$

جدول (2)

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2		**R**	**R.H.S**
S_1	0	2	1	0		-3	3
S_2	0	2	0	1		1	11
X_1	1	0	0	0		1	9
Min W	0	0	0	0		-1	0
Max Z	0	-3	0	0		4	36

المرحلة الثانية

جدول(3) ↓ داخل

خارج ←

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
S_1	0	2	1	0	3
S_2	0	2	0	1	11
X_1	1	0	0	0	9
Max Z	0	-3	0	0	36

معادلة X_2 $= \left[0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right]$

معادلة Z الجديدة =

Z القديمة $[0\,, -3\,, 0, 0{,}36]$

—

معادلة X_2 $(-3) \times \left[0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[0, 0, \frac{3}{2}, 0\,, 40.5\right]$

معادلة S_2 الجديدة =

S_2 القديمة $[0\,, 2\,, 0, 1{,}11]$

—

معادلة X_2 $(2) \times \left[0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right]$

معادلة S_2 الجديدة $[0\,, 0, -1, 1\,, 8]$

معادلة X_1 الجديدة =

X_1 القديمة $[1,0\,,0,0,9]$

$-$

معادلة X_2 $\left[0,1,\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right]$ (0)

معادلة X_1 الجديدة $[1,0,0,\ 0\,,9]$

جدول (4) جدول الحل الأمثل

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
S_2	0	0	-1	1	8
X_1	1	0	0	0	9
Z	0	0	$\frac{3}{2}$	0	40.5

الحل الأمثل :

Z= 40.5

$X_1 = 9$

$X_2 = \frac{3}{2}$

5.9.3 الحالات الخاصة في الطريقة المبسطة Special Cases in Simplex Method

هناك عدد من الحالات التي قد لا تنطبق عليها قواعد الحل العام باستخدام طريقة السمبلكس في بعض مشاكل البرمجة الخطية [15,10,9]:

1. تعدد الحلول المثلى Alternate Optimal Solution
2. عدم إمكانية الحل In feasible Solution
3. عدم محدودية الحل Unbounded ness
4. حالة الانحلال او التفكك Degeneracy Solution

الحالة الأولى: تعدد الحلول المثلى

يمكن التعرف على ان لمشكلة البرمجة الخطية أكثر من حل أمثل عندما تكون معادلة دالة الهدف موازية (Parallel) الى الطرف الايسر من أحد القيود ويكون هذا واضحاً في المسائل التي تتضمن عدد محدوداً من القيود والتي يمكن حلها باستخدام الطريقة البيانية.

اما في حالة استخدام طريقة السمبلكس فانه يستدل على وجود حل أمثل اخر او أكثر من الجدول النهائي عندما تكون قيمة أحد المتغيرات غير الأساسية Non basic var. في صف دالة الهدف او صف $\left(C_j - Z_j\right)$ تساوي صفراً، وان الحل الأمثل الاخر يمكن تحديده عن طريق عمل جدول اخر ويكون تحديد المتغير الداخل فيه هو المتغير غير الأساسي الذي قيمته ظهرت صفراً في صف دالة الهدف (انظر جدول 2) ويلاحظ عند عمل الجدول الإضافي ان المتغير الداخل الجديد الذي دخل لا يؤثر على قيمة دالة الهدف Z، المثال الاتي يوضح الحالة الأولى:

$$Max\ Z = 6X_1 + 2X_2$$

$$S.\text{to.}$$

$$12X_1 + 4X_2 \leq 200$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 150$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

يحول الى الصيغة القياسية

$$Max\ Z = 6X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S.\text{to.}$$

$$12X_1 + 4X_2 + S_1 = 200$$

$$3X_1 + 5X_2 + S_2 = 150$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ثم يتم اكمال الحل حيث يتم إيجاد الجدول الأول الذي يمثل الحل الاولي الأساسي الذي يتم فيه تحديد المتغير الداخل الذي يحمل أكبر او أكثر معامل سالب لان الدالة من نوع Max ثم يحدد المتغير الخارج واكمال بقية العمليات المحورية.

جدول (1)

داخل ↓ X1

B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	-6	-2	0	0	0
S1	12	4	1	0	200
S2	3	5	0	1	150

خارج ← S1

جدول (2)

داخل ↓ X2

B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
X1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{200}{12}$
S2	0	4	$\frac{-1}{4}$	1	100

خارج ← S2

يلاحظ ان الحل الأمثل تحقق في الجدول (2) حيث ان جميع قيم او معاملات دالة الهدف هي أكبر او تساوي صفر كما يتضح ان المتغير X2 لم يكن في عمود الحل او عمود المتغيرات الأساسية (B.V) الا ان قيمته في صف دالة الهدف تساوي صفراً مما يعطي الدليل على وجود حل أمثل بديلاً اخر كما يلاحظ ان قيمة Z=100 بقيت ثابتة في جميع المراحل.

جدول (3)

B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
X1	1	0	$\frac{5}{48}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{100}{2}$
X2	0	1	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{4}$	25

الحالة الثانية: عدم محدودية الحل

في بعض مسائل البرمجة الخطية قيمة أحد المتغيرات يمكن زيادتها بشكل غير محدد دون المساس بأي من القيود (أي يمكن زيادتها دون ان يؤثر فيها او يحد منها أي قيد من قيود ذلك الانموذج). هذا يعني ان منطقة الحل الممكن غير محددة unbounded أي انها مفتوحة من أحد الاتجاهات. يمكن الاستدلال على هذه الحالة عندما لا يمكن تحديد المتغير الخارج او صف العمود المحوري، وذلك لان جميع عناصر العمود المحوري او عمود المتغير الداخل تأخذ قيم صفر او سالبة.

المثال الاتي يوضح الحالة الثانية:

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S.\text{to.}$$

$$X_1 - X_2 \leq 1$$

$$3X_1 - 2X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

جدول (1) داخل

	B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
	Z	-3	-2	0	0	0
خارج	**S1**	1	-1	1	0	1
	S2	3	-2	0	1	6

جدول(2) داخل

	B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
	Z	0	-5	3	0	3
	X1	1	-1	1	0	1
خارج	**S2**	0	1	-3	1	3

جدول (3)

B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	0	0	-12	5	18
X1	1	0	-2	1	4
X2	0	1	-3	1	3

يلاحظ من الجدول (3) ان المتغير S_1 له أكبر معامل سالب وهو (-12) مما يستوجب ان يكون المتغير الداخل في الجدول اللاحق ولكون جميع قيم هذا العمود المحوري سالبة فانه لا يمكن تحديد المتغير الخارج مما يؤدي الى زيادة الأرباح دون المساس بالقيود ويمكن الاستنتاج ان مشكلة البرمجة الخطية غير محدودة الحل.

الحالة الثالثة: عدم إمكانية الحل

في حالة استخدام طريقة (Simplex) أي مشكلة ليس لها حل أساسي اولي مقبول فأنها على الأقل تحتوي على متغير اصطناعي (Artificial Var.) له قيمة موجبة أي ان المتغير الاصطناعي R يبقى ضمن المتغيرات الأساسية (B.V) بقيمة أكبر من الصفر. لا تظهر الحالة عندما تكون جميع المتباينات للقيود من نوع اصفر او يساوي.

المثال الاتي يوضح الحالة الثالثة:

$$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2$$

$$S.\text{to.}$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 6$$

$$X_1 - 2X_2 \geq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

يظهر في الجدول الثاني* ان الحل الأمثل قد تحقق حيث ان جميع معاملات المتغيرات في صف دالة الهدف موجبة او صفر ويلاحظ ان قيمة R_1 هي 5* في الحل الأمثل وهذا يوضح ان مسالة البرمجة الخطية حالة خاصة من نوع عدم إمكانية الحل وان الحل الأمثل المتحقق يدعى بالحل الأمثل الكاذب (Pseudo-optimal sol.).

جدول (1)

داخل ↓

B.V	X1	X2	S1	S2	R1	R.H.S
Z	-3-M	-4+2M	0	M	0	-8M
S1	2	4	1	0	0	6
R1	1	-2	0	-1	1	8

خارج ←

جدول (2)

B.V	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**R1**	**R.H.S**
Z	0	2+4M	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}M$	M	0	9-5M
S1	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0	3
R1	0	-4	$\frac{-1}{2}$	-1	1	**5**

ملاحظة: إذا ظهرت قيمة R في عمود (R.H.S) صفر فان الحل يعتبر حلاً امثلاً.

الحالة الرابعة: انحلال الحل

تظهر هذه الحالة عندما يكون هناك حالة تعادل بين اثنين او أكثر من القيود، ويعبر عن حالة التعادل بأن هناك أكثر من عنصر محوري عند استخدام قاعدة اقل النسب لتحديد العنصر المحوري، تتعادل العناصر المحورية عندما يكون قيد او أكثر فائض Redundant.

المثال الاتي يوضح الحالة الرابعة:

$$Max\ Z = 5X_1 + 10X_2$$

$$S.\text{to.}$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

جدول (1) **داخل** ↓

B.V	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**R.H.S**
Z	-5	-10	0	0	0
S1	1	3	1	0	6
S2	2	2	0	1	4

$$\frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

$$\frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

يلاحظ تساوي النسب حيث يكون الاختيار الحر بين المتغير الأساسي S_2, S_1 ويفضل ان يتم الاختيار الأول اما الثاني فان قيمته سوف تساوي صفر في الجدول اللاحق او الثاني حيث يلاحظ من الجدول الأول ان هناك تعادلاً بين قيمة S_2, S_1 وفي حالة اختيار S_1 فان قيمة S_2 في الجدول الثاني تساوي صفراً وينتج عنه حل أساسي منحل وان الحل الأمثل قد يمكن تحقيقه لاحقاً

جدول (2)

داخل ↓ X1

B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	$\frac{-5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	0	20
X2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2
S2	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1	0

خارج ← S2

جدول (3)

B.V	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	20
X2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	2
X1	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0

يلاحظ من الجدول الثاني والثالث ان قيمة دالة الهدف لم تتغير $(Z=20)$ وان الذي حدث هو إعادة التكرار فقط وتعرف هذه الحالة بحالة الدوران (Loop).

لا يفضل التوقف عن الحل عند ظهور حالة الانحلال، حيث قد يكون انحلال الحل مؤقتاً أي لا يمكن الحكم على هذه الحالة الا بعد حل الانموذج أي لا يتوقف الحل بمجرد تساوي النسب (حاصل القسمة لتحديد المتغير الخارج) وانما التطرق الى الجدول الثاني والثالث على سبيل المثال الى ان يتم التأكد من حالة الانحلال وظهور حالة الدورانية في الحل، أو الوصول الى الحل الأمثل من خلال حصول تطور او تحسن في قيمة (Z) كما في المثال الاتي:

جد الحل الأمثل لأنموذج البرمجة الخطية الاتي ان وجد:

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S.\text{to.}$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$4X_1 - X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: يتم تحويل الأنموذج أعلاه الى الصيغة القياسية Standard form

$$Max\ Z - 3X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 12$$

$$4X_1 + X_2 + S_2 = 8$$

$$4X_1 - X_2 + S_3 = 8$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

أكبر معامل بالسالب ↓ جدول (1)

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	R.H.S	النسبة
Z	-3	-2	0	0	0	0	
S1	4	3	1	0	0	12	$\frac{12}{4}=3$
خارج ← S2	4	1	0	1	0	8	$\frac{8}{4}=2$
S3	4	-1	0	0	1	8	$\frac{8}{4}=2$

معادلة المتغير الداخل او معادلة X_1 $\left[\ 1,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0,2\right]$

معادلة Z الجديدة= معادلة Z القديمة-[معادلة المتغير الداخل (X1) مضروبة في العنصر المقابل للعنصر المحوري في معادلة Z القديمة]

معادلة Z القديمة $[\,-3,-2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$

—

معادلة المتغير الداخل X_1 $(-3)\times\left[\ 1,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0,2\right]$

معادلة Z الجديدة $\left[\ 0,\ \frac{-5}{4},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ 6\right]$

لإيجاد معادلة S_1 الجديدة

معادلة S_1 القديمة $[\,4,3,1,0,0,12\,]$

—

معادلة المتغير الداخل X_1 $(4)\times\left[\ 1,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0,2\right]$

معادلة S_1 الجديدة $[\ 0,2,1,-1,0,4]$

لإيجاد معادلة S_3 الجديدة

$$\text{معادلة } S_3 \text{ القديمة } [4 \ -1, 0, 0, 1, 8]$$

—

$$\text{معادلة المتغير الداخل } X_1 \left[1, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ 2\right] \times (4)$$

$$\text{معادلة } S_3 \text{ الجديدة } [\ 0, -2, 0, -1, 1, 0\ ]$$

وعليه يكون الجدول (2) كما يأتي:

داخل ↓

B.V	X1	X2	S1	S2	S3	R.H.S	النسبة
Z	0	$\frac{-5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	6	-
S1	0	2	1	-1	0	4	$\frac{4}{2} = 2$
S2	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	2	$\frac{4}{1} \times 2 = 8$
S3	0	-2	0	-1	1	0	∞

خارج ← S1

اذن معادلة المتغير الداخل او معادلة X2 $\left[0, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{-1}{2}, \ 0, \ 2\right]$

لإيجاد معادلة Z الجديدة

$$\text{معادلة } Z \text{ القديمة } \left[\ 0, \frac{-5}{4}, 0, \frac{3}{4}, 0, 6\right]$$

—

$$\text{معادلة المتغير الداخل } X_2 \left[\ 0, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{-1}{2}, \ 0, \ 2\right] \times \left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$\text{معادلة } Z \text{ الجديدة } \left[\ 0, 0, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}, 0, \frac{17}{2}\right]$$

لإيجاد معادلة X_1 الجديدة

معادلة X_1 القديمة $\left[\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 2\right]$

$-$

معادلة المتغير الداخل X_2 $\left(\frac{1}{4}\right)\times\left[\ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 2\right]$

معادلة X_1 الجديدة $\left[\ 1, 0, \frac{-1}{8}, \frac{3}{8}, 0, \frac{3}{2}\right]$

لإيجاد معادلة S_3 الجديدة

معادلة S_3 القديمة $[\ 0, -2, 0, -1, 1, 0]$

$-$

معادلة المتغير الداخل $X2$ $(-2)\times\left[\ 0, 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ 0,\ 2\right]$

معادلة S_3 الجديدة $[\ 0, 0, 1, -2, 1, 4]$

وعليه يكون الجدول (3) كما يأتي:

B.V	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**R.H.S**
Z	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{17}{2}$
S1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	2
S2	0	$\frac{-1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{2}$
S3	0	1	0	-2	1	4

يلاحظ ان هناك تحسناً في قيمة دالة الهدف حيث كانت قيمة Z=6 في الجدول الثاني فيما أصبحت تساوي 8.5 في الجدول الثالث وان حالة الانحلال المؤقتة قد تم تجاوزها حيث كانت قيمة S_3 في الجدول الثاني تساوي صفراً الا انها أصبحت قيمة موجبة وتساوي 4 في جدول الحل الأمثل.