الفصل الرابع

الجهد الكهربائي The Electric Potential

4-1 مقدمة

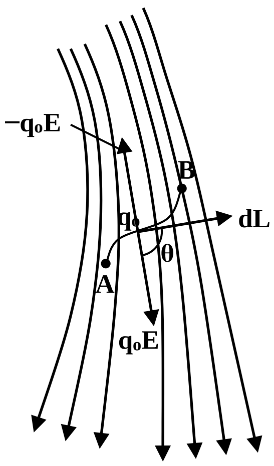
من المعلوم أنه لو وضعت شحنة كهربائية في مجال كهربائي لتأثرت بقوة وهذا يعني أن تحريك هذه الشحنة من نقطة لأخرى يتطلب إنجاز شغل وبدلالة هذا الشغل يعرّف الجهد الكهربائي (ويرمز له بالحرف V) حيث يساعد في وصف ودراسة المجالات الكهربائية جنباً إلى جنب مع شدة المجال (E). والجهد (V) كمية عددية (Scalar) وهذا يجعل التعامل مع رياضياً أسهل بكثير من التعامل مع الكمية الاتجاهية (E).

4-2 فرق الجهد بين نقطتين واقعتين في مجال كهربائي

لإيجاد فرق الجهد بين نقطتين A و B الواقعتين في مجال كهربائي (E) كما في الشكل (1)، لابد من حساب W_{AB} حيث:

W_{AB} = الشغل اللازم إنجازه من قبل عامل خارجي لتحريك الشحنة الاختبارية q_o من النقطة A إلى النقطة B بحيث تبقى q_o في حالة اتزان.

$(V_B - V_A) = V_{AB} =$ فرق الجهد بين النقطتين A و B.



شكل -1-

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_o} \quad .... (1)$$

وقد اصطلح أن يكون الجهد عند بداية أي نقطة بعيدة بعداً كبيراً (لا نهائياً) عن كل الشحنات يساوي صفراً.

ولو أخذنا النقطة (A) في المالانهاية

$$\therefore V_A = 0$$

∴ تصبح معادلة (1) كما يلي:

$$V_B = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

وبصورة عامة يكون الجهد الكهربائي عند أية نقطة واقعة في المجال الكهربائي

$$V = \frac{W}{q_o} \quad .... (2)$$

∴ الجهد الكهربائي عند أية نقطة

هو الشغل المنجز لوحدة الشحنة الواجب إنجازه لنقل شحنة موجبة اختبارية صغيرة من المالانهاية إلى تلك النقطة.

لا بد من الإشارة إلى نقطتين متعلقتين بتعريف الجهد الكهربائي:

1. إن الشحنة الاختبارية q_o يجب أن تكون صغيرة بحيث أن تحريكها من نقطة لأخرى لا يغير من المجال الكهربائي الأصلي.
2. لقياس الجهد عند أية نقطة يجب اختيار نقطة مرجع (Reference Point) يتفق على قيمة الجهد عندها مسبقاً.

$V_\infty = 0$

$V_{th} = 0$ – جهد الأرض (V_{th})

من معادلة (2)

1. يكون الجهد بالقرب من شحنة موجبة يكون موجباً، وذلك لأنه يجب أن يؤثر عامل خارجي بقوة لنقل الشحنة الاختبارية الموجبة باتجاه معاكس للمجال من المالانهاية إلى تلك النقطة. أي أن الشغل الذي يبذله العامل الخارجي يكون موجب.
2. يكون الجهد بالقرب من الشحنة السالبة المعزولة سالباً، لأنه يجب أن يؤثر عامل خارجي بقوة معوقة على الشحنة الاختبارية الموجبة أثناء مجيئها من المالانهاية وتحريكها باتجاه المجال.

∴ الشغل المنجز يكون سالباً.

وحدة الجهد هي جول/كولوم = فولت (Volt).

والجهد كمية عددية $\quad \text{Volt} = \dfrac{\text{Joule}}{\text{Coulom}}$

4-3علاقة الجهد بشدة المجال

من الشكل (1)

W_{AB} = الشغل المنجز من قبل عامل خارجي لنقل الشحنة q_o من A إلى B في مجال كهربائي غير منتظم.

θ = الزاوية بين المجال (E) وعنصر المسار dL.

q_oE = القوة المؤثرة على q_o باتجاه المجال.

القوة التي يسلطها العامل الخارجي لتحريك الشحنة بدون تعجيل = $-q_oE$

$$\therefore W_{AB} = \int_A^B \overline{F}\cdot d\overline{L} = \int_A^B -q_o\overline{E}\cdot d\overline{L} \quad .... (3)$$

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

$$\therefore W_{AB} = q_o\,(V_B - V_A) \quad .... (4)$$

ومن التعويض عن قيمة W_{AB} في معادلة (4) من معادلة (3) ينتج:

$$q_o(V_B - V_A) = -q_o\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L}$$

$$\boxed{\therefore V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L}} \quad .... (5)$$

من معادلة (5) نحصل على تعريف آخر للجهد الكهربائي يتمثل في التكامل الخطي لشدة المجال على طول المسار بين النقطتين A و B.

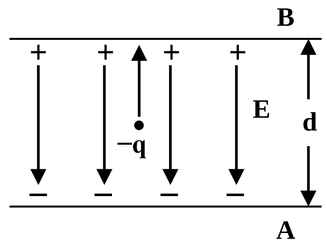
وإذا فرضنا أن النقطة (A) تقع في المالانهاية

$$\therefore V_A = 0$$

$$\therefore V_B = -\int_\infty^B \overline{E}\cdot d\overline{L} \quad .... (6)$$

هذه المعادلة تعطي الجهد عند أي نقطة بدلالة شدة المجال.

حالة خاصة



1. عندما يكون المجال منتظم
2. موازي لمسار الشحنة
3. له نفس المقدار لجميع نقاط المسار

عند هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة

$$V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L}$$

بشكل مبسط بدون الحاجة إلى إجراء التكامل الخطي لشدة المجال، حيث في هذه الحالة $\theta = 180°$

$$\therefore V_B - V_A = \int_A^B E dL$$

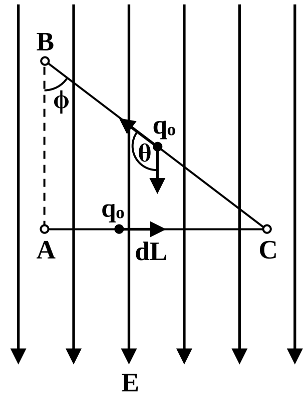
$$V_B - V_A = E\int_A^B dL = Ed \quad .... (7)$$

إذ إن d = المسافة بين النقطتين A و B

من هذه المعادلة يتضح أن وحدة شدة المجال هي $\frac{V}{m} = \frac{Volt}{Meter}$ = فولت/متر.

مثال

شحنة اختبارية (q_o) نقلت بدون تعجيل من النقطة A إلى النقطة B في مجال كهربائي منتظم وعلى المسار (ACB) كما هو مبين في الشكل المجاور. احسب فرق الجهد بين النقطتين A و B.



1. نأخذ المسار AC ونجد فرق الجهد بين النقطتين A و C

$$\therefore V_C - V_A = -\int_A^C E dL$$

لأن θ = 90°

$$\therefore V_C = V_A$$

∴ لا ينجز شغل لنقل الشحنة من A إلى C

2. إيجاد فرق الجهد بين النقطتين C و B

$$V_B - V_C = -\int_C^B \bar{E} \cdot d\bar{L} = -\int_C^B -E\cos\theta dL = -E\cos\theta \int_C^B dL$$

$$V_B - V_C = -E\cos\theta L \;\; .... \; (8)$$

حيث L تمثل المسافة بين النقطتين B و C

$$\cos\phi = \frac{d}{L}, \quad d = L\cos\phi$$

$$\therefore d = -L\cos\theta \;\; .... \; (9) \qquad (\theta + \phi) = 180°$$

من التعويض عن قيمة ($-L\cos\theta$) من معادلة (9) في معادلة (8) ينتج:

$$V_B - V_C = Ed$$

بما إن $V_A = V_C$ $\quad \therefore V_B - V_A = Ed$

يمكن الحصول على نفس النتيجة مباشرة من المعادلة (7) وذلك لو سلكنا المسار مباشرة بين النقطتين A و B.

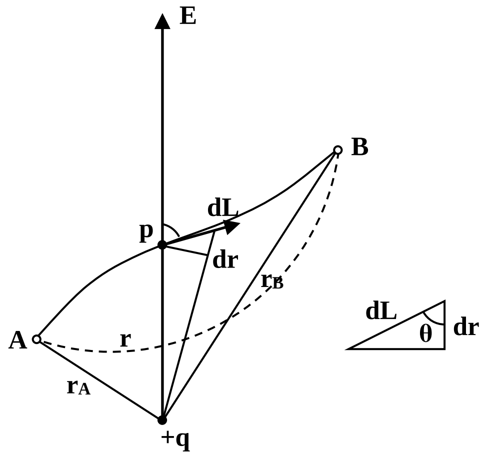
4-4التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي

يمثل قانون كاوس إحدى الخواص الأساسية للمجالات الكهروستاتيكية، وينص على **أن التكامل السطحي لشدة المجال الكهربائي على أي سطح مغلق يتناسب طردياً مع كمية الشحنة الموجودة ضمن السطح.**

والخاصية الأخرى أو الثانية للمجالات الكهروستاتيكية والتي ترتبط بالتكامل الخطي لشدة المجال تنص على ما يلي:

إن التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي حول أي مسار مغلق يساوي صفر، ولإثبات هذه الخاصية نلاحظ الشكل التالي، حيث يبين مجالاً شعاعياً ناشئاً عن شحنة نقطية (+q).

$$\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L} = \int_A^B E\cos\theta dL \text{ .... (1)}$$



حيث dL = عنصر المسار

θ = تمثل الزاوية المتكونة عند نقطة p التي تبعد (r) عن الشحنة النقطية.

ومن الشكل المجاور

$$\cos\theta = \frac{dr}{dL}$$
$$\therefore dr = dL\cos\theta$$

حيث dr يمثل التغير في بعد الشحنة عن النقطة المراد إيجاد المجال فيها.

شدة المجال الكهربائي عند نقطة (p) التي تبعد (r) عن الشحنة هو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\frac{q}{r^2}$$

ومن التعويض عن قيمة (E) و $dL\cos\theta$ بما يساويه في معادلة (1) ينتج:

$$\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$\therefore \int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] \text{ .... (2)}$$

من هذه المعادلة يتضح أن التكامل الخطي لشدة المجال وكذلك فرق الجهد بين النقطتين (A و B) لا يعتمدان على شكل المسار الواصل بين النقطتين بل يعتمد على بعدهما عن الشحنة النقطية (+q) وهذا يصح لكل المجالات الكهروستاتيكية مهما كان شكلها، ولو وصل بين النقطتين (A و B) بهيئة خط متقطع

∴ التكامل الخطي لشدة المجال على هذا المسار باتجاه معاكس أي من B إلى A

$$\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

∴ التكامل الخطي لشدة المجال على المسار المغلق من A إلى B ثم إلى A

$$\oint \overline{E}.d\overline{L} = \int_A^B \overline{E}.d\overline{L} + \int_B^A \overline{E}.d\overline{L}$$

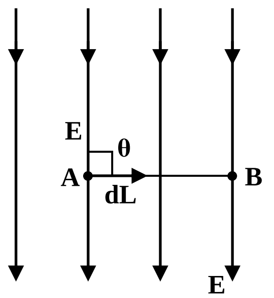
$$\oint \overline{E}\cdot d\overline{L} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right] + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

$$\boxed{\therefore \oint \overline{E}\cdot d\overline{L} = 0}$$

ويمكن الاستفادة من هذه العلاقة وذلك لإثبات أن الشغل المنجز لنقل شحنة اختبارية q_o بدون تعجيل حول أي مسار مغلق يجب أن يكون صفر.

مثال

افرض أن شحنة اختبارية نقلت بدون تعجيل من النقطة A إلى النقطة B في مجال كهربائي منتظم



$$V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E}.d\overline{L}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dL$$

θ في هذه الحالة = (90°) المجال عمودي على المسار

$\cos(90°) = 0$

(أي أن الجهد في نقطة B يساوي الجهد في نقطة A) $\therefore V_B - V_A = 0$

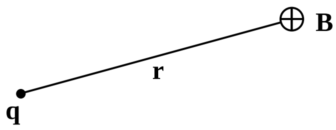
$\therefore V_B = V_A$

4-5 حساب الجهد الكهربائي

1. إن الجهد الكهربائي الناشيء عن الشحنة النقطية (q) عند أية نقطة واقعة على بعد قدره (r) عنها

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}}$$

إن الجهد يكون موجب في حالة الشحنة الموجبة ويكون سالب في حالة الشحنة السالبة



2. إذا كانت لدينا مجموعة من الشحنات النقطية (q_1، q_2، ....، q_n) التي تقع على أبعاد قدرها (r_1، r_2، ....، r_n) من النقطة المطلوب إيجاد الجهد عندها.

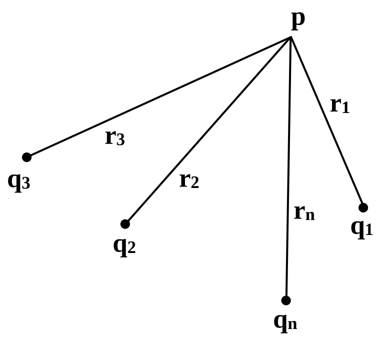
يحسب الجهد (V_1، V_2، ....، V_n) لكل شحنة على حدة كما لو كانت الشحنة الوحيدة الموجودة

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2}{r_2}$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_n}{r_n}$$



ثم يحسب المجموع الجبري لجميع هذه القيم

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

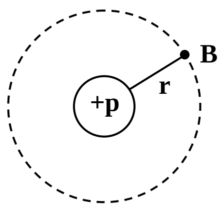
$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{n=1}\frac{q_n}{r_n}$$

مثال (1)

احسب الجهد الكهربائي الناتج عن نواة ذرة الهيدروجين عند نقطة تقع على بعد قدره $r = 5.3 \times 10^{-11}$ m (وهو معدل نصف قطر دورة الإلكترون في ذرة الهيدروجين)

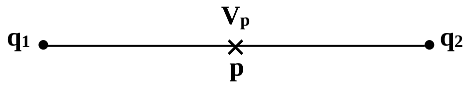
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1.6\times10^{-19}}{5.3\times10^{-11}} = 27 \text{ V}$$



مثال (2)

شحنتان نقطتيان مقدارهما ($+10 \times 10^{-8}$) و (-5×10^{-8}) تفصلهما مسافة قدرها (20 cm) جد مقدار الجهد الكهربائي عند منتصف المسافة بينهما.



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_1}$$

$$= \frac{Kq_1}{r_1}$$

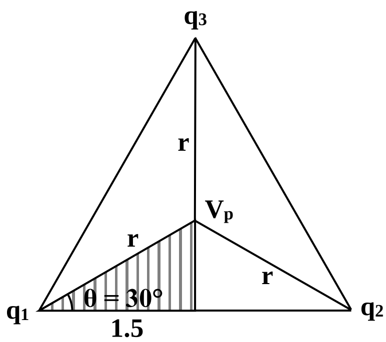
$$V_1 = \frac{9\times10^9 \times 10\times10^{-18}}{(10\times10^{-2})} = 9\times10^3 \text{ Volt}$$

$$V_2 = \frac{9\times10^9 \times -5\times10^{-8}}{(10\times10^{-2})} = -4.5\times10^{-3} \text{ Volt}$$

$$V_p = V_1 + V_2 = V_1 - V_2 = 9\times10^3 - 4.5\times10^3 = 4.5\times10^3$$

مثال (3)

ثلاث أجسام صغيرة كل منها يحمل شحنة موجبة قدرها (2×10^{-6} C) وضعت على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (3 cm). جد مقدار الجهد الكهربائي في مركز المثلث.



$$V_p = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{Kq}{r}$$

الشحنات متساوية والمسافات متساوية

$$\therefore V_p = 3V_1 = \frac{3Kq}{r}$$

$\cos30° = \dfrac{1.5}{r}$ في المثلث المظلل

$$\therefore r = \frac{1.5}{\cos30°} = 1.73 \text{ cm}$$

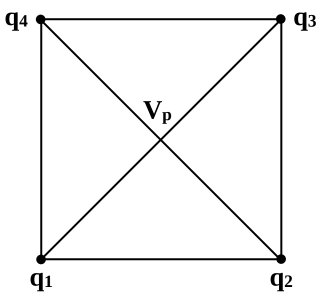
$$\therefore V_p = \frac{3\times9\times10^9 \times 2\times10^{-6}}{1.732\times10^{-2}} = 31.5\times10^5 \text{ Volt}$$

مثال (4)

مربع طول ضلعه (10 cm) وضعت على أركانه أربع شحنات قيمها:

$q_1 = +10 \times 10^{-9}$ C، $q_2 = -20 \times 10^{-9}$ C، $q_3 = +30 \times 10^{-9}$ C،

$q_4 = +20 \times 10^{-9}$ C، احسب الجهد في مركز المربع



$$V_p = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_p = \frac{Kq_1}{r} - \frac{Kq_2}{r} + \frac{Kq_3}{r} + \frac{Kq_4}{r}$$

$$V_p = 9 \times 10^9 \left[\frac{q_1 - q_2 + q_3 + q_4}{r} \right]$$

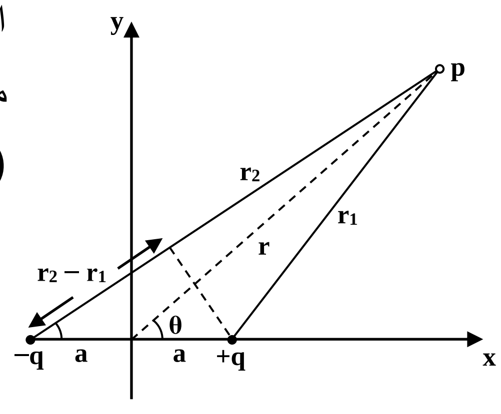
$$2r = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore r = 5\sqrt{2}$$

$$\therefore V_p = 9 \times 10^9 \left[\frac{10 \times 10^{-9} - 20 \times 10^{-9} + 30 \times 10^{-9} + 20 \times 10^{-9}}{5\sqrt{2} \times 10^{-2}} \right]$$

$$V_p = \frac{9 \times 10^9 \times 40 \times 10^{-9}}{5\sqrt{2} \times 10^{-2}} = ???\ \text{Volt}$$

3. الجهد الناشيء عن ثنائي القطب



المطلوب: إيجاد قيمة الجهد الكهربائي عند أية نقطة في مجال ثنائي القطب والتي حدد موقعها بالإحداثيات القطبية (r، θ)

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{-q}{r_2}$$

∴ الجهد الكلي (V) لتلكما الشحنتين هو:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r_2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right] \text{ .... } (1)$$

عندما يكون بعد النقطة (p) كبيراً بالنسبة إلى (2a)

$$r >>> 2a$$

$$\therefore r_1 r_2 \approx r^2 \text{ .... } (2)$$

$$\cos\theta = \frac{r_2 - r_1}{2a}$$

$$\therefore r_2 - r_1 \approx 2a\cos\theta \text{ .... } (3)$$

ومن التعويض عن قيمة (r_1r_2) أو $(r_2 - r_1)$ في معادلة (1) بما يساويه من معادلة (2) و (3) ينتج:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right]$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q\,2a\cos\theta}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\rho\cos\theta}{r^2}$$

حيث ρ = (2aq) = عزم ثنائي القطب الكهربائي.

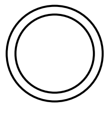
من هذه المعادلة نلاحظ أن الجهد الكهربائي يساوي صفراً عند جميع النقاط الواقعة على الخط العمودي المقام من منتصف المسافة بين شحنتي ثنائي القطب، أي عندما تكون $(\theta = 90^\circ)$.

4.الجهد الكهربائي الناشيء عن التوزيع الشحني المتصل

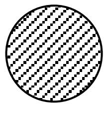
إذا كان لدينا شحنة موزعة توزيعاً متصلاً مثل:

1. السلك المشحون.

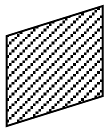
2. الحلقة المشحونة.



3. القرص المشحون.



4. الصفيحة المستوية.



يمكن حساب الجهد الناشيء عن هذا النوع من الشحنة وذلك بأن نتصور هذه الشحنة مقسمة إلى عدد كبير من الأجزاء المتناهية في الصغر (تسمى عناصر تفاضلية) بحيث يمكن اعتبار كل جزء بمثابة شحنة نقطية.

$\therefore$ الجهد dV الناشيء عن أحد العناصر التفاضلية الذي تبلغ شحنته (dq) عند نقطة تقع على بعد r عن العنصر

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{r}$$

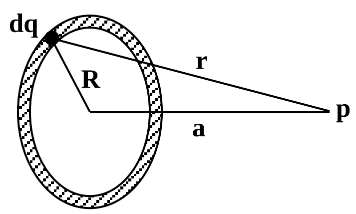
ولإيجاد الجهد الكلي الناشيء عن الشحنة بأكملها:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{r}$$

الجهد الناشيء عن حلقة مشحونة

شحنة مقدارها (q) موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرا (R).

المطلوب – إيجاد الجهد عند النقطة (p) الواقعة على محور الحلقة وعلى بعد مقداره (a) من مركزها.



نأخذ عنصراً تفاضلياً من الحلقة شحنته dq الذي يمكن اعتباره شحنة نقطية تبعد مسافة قدرها (r) عن النقطة (p).

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{r}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

أما الجهد الناشيء عن الحلقة بأكملها فيكون:

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o \sqrt{R^2 + a^2}} \int dq$$

لكن $\int dq = q$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

4-6 جهد الجسم الكروي المشحون عندما يكون في حالة اتزان كهروستاتيكي

سبق وأن وجد أن شدة المجال الكهربائي خارج جسم موصل كروي يحمل شحنة مقدارها (q) هي

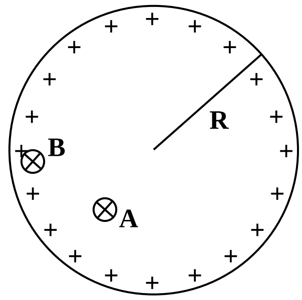
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}}$$

وهي نفس النتيجة كما لو كانت الشحنة متمركزة في مركز الكرة.

لذلك يكون الجهد الكهربائي عند أية نقطة خارج الموصل الكهربائي وعلى بعد (r) من مركزه، وهذا يساوي الجهد الذي تولده شحنة نقطية (q) عند تلك النقطة

$$\boxed{\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}}$$

ولإيجاد الجهد الكهربائي عند أية نقطة في داخل الكرة



نأخذ إحدى النقطتين A أو B في داخل الموصل والأخرى على سطحه كما في الشكل المجاور، وطبقاً للمعادلة التالية:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E}\cdot d\overline{L}$$

ولما كان مقدار شدة المجال (E) داخل الموصل يساوي صفر

$$\therefore V_B - V_A = 0$$

$\therefore$ الجهد عند النقطة (A) يساوي الجهد عند النقطة (B) $\quad \therefore V_B = V_A \Rightarrow$

وبصورة عامة فإن قيمة الجهد عند جميع النقاط الواقعة داخل الموصل تكون متساوية وتساوي قيمة الجهد على سطحه. أي أن

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{R}$$

حيث R = نصف قطر الموصل الكروي

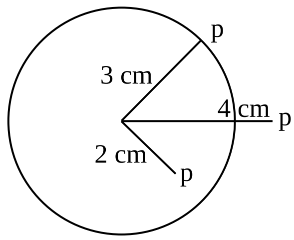
ملاحظة:

لو لم تكن جميع النقاط الداخلية متساوية الجهد لانتقلت الشحنات (الإلكترونات الحرة) من النقاط الأقل جهداً إلى النقاط الأعلى جهداً في الموصل، ولكن هذا لا يحدث نظراً لأن الشحنات مستقرة على سطح الموصل الخارجي.

مثال

كرة معدنية موصلة نصف قطرها (3 cm) تحمل شحنة موجبة قدرها (1×10^{-9} C)، احسب الجهد عند النقاط التي تبعد مسافات قدرها 1) 2 cm, 2) 3 cm, 3) 4 cm.

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r} = V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{R}$$

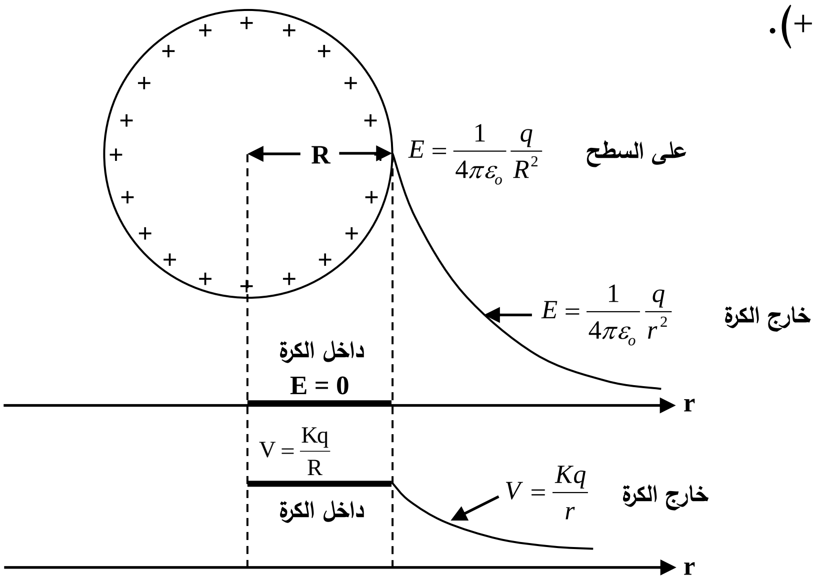


$$1.\ V_{(2cm)} = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-2}} = 3 \times 10^2 \text{ Volt}$$

الجهد في جميع النقاط الواقعة داخل الجسم الموصل الكروي يكون متساوي ويساوي الجهد على سطح الموصل

$$V_{(4cm)} = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-2}} = 2.25 \times 10^2 \text{ Volt}$$

والشكل التالي يبين الرسم البياني لكل من مقدار شدة المجال والجهد داخل وخارج كرة موصلة نصف قطرها (R) وتحمل شحنة قدرها (+q).

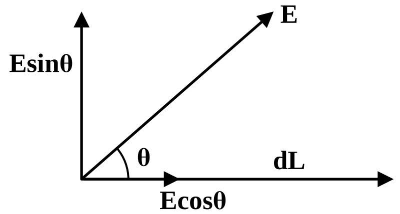


إن هذه النتيجة هي نفسها سواء أكانت الكرة صلدة أم مجوفة.

7-4 انحدار الجهد **Potential Gradient**

$$V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E} \cdot d\overline{L}$$

وبأخذ مشتقة طرفي المعادلة نجد



$$dV = -\overline{E} \cdot d\overline{L} = -E\cos\theta dL$$

$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta$$

$\frac{dV}{dL} =$ معدل تغير الجهد مع المسافة باتجاه (dL)

$E\cos\theta$ = dL مركبة شدة المجال باتجاه = E_l

$$\therefore E_l = -\frac{dV}{dL}$$

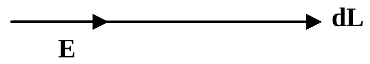
وهذه المعادلة تعني أن مركبة شدة المجال الكهربائي في اتجاه معين (dL مثلاً) تساوي معدل تغير الجهد مع المسافة بذلك الاتجاه بإشارة سالبة.

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه (E) هو باتجاه تناقص الجهد.

إذا كانت dL باتجاه شدة المجال كما في الشكل التالي

أي أن $\theta = 0$، $\cos\theta = 1$

E_l ستكون لها أقصى قيمة



$$\therefore E = -\left(\frac{dV}{dL}\right)_{max}$$

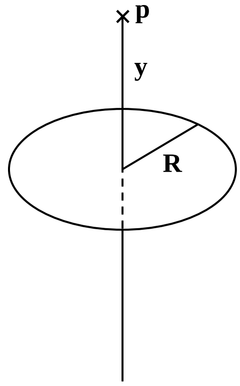
وتسمى هذه القيمة القصوى لمعدل تغير الجهد مع المسافة عند نقطة معينة بانحدار الجهد عند تلك النقطة.

إذا كان الجهد $V_{(x,y,z)}$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

مثال

شحنة مقدارها (q) موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها (R)، احسب شدة المجال الكهربائي عند النقطة (p) الواقعة على محور هذه الحلقة باستخدام معادلة انحدار الجهد $E = -\left(\frac{dV}{dL}\right)_{max}$



إن الجهد الناشيء عن هذه الحلقة المشحونة عند نقطة (p) التي تبعد (y) عن المركز هو

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

$$E = E_y = -\frac{dV}{dy} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{R^2 + y^2}}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qy}{\left(R^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

وهذه نفس النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة التكامل في الفصل الثاني مع ملاحظة الاختلاف في رمز البعد (y) الذي حل محله (a).

مثال

إذا علمت أن الجهد في منطقة معينة يساوي $V = \frac{K}{x^2 + y^2 + z^2}$

أوجد المركبات الثلاثة لشدة المجال الكهربائي بالاتجاهات (x، y، z).

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{K}{x^2 + y^2 + z^2}\right]$$

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x^2 + y^2 + z^2)\right]^{-1}$$

$$= -\left[-2xK(x^2 + y^2 + z^2)\right]^{-2}$$

$$\therefore E_x = \frac{2Kx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{+2}}$$

وبنفس الطريقة نجد E_y و E_z

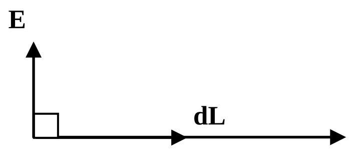
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2Ky}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{+2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2Kz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{+2}}$$

4-8سطوح تساوي الجهد Equipotential Surfaces

من المعادلة $E_l = -\frac{dV}{dL}$

لو كان المسار عمودي على E كما في الشكل التالي



لكانت $0 = E_l$

$$\therefore \frac{dV}{dL} = 0$$

$\therefore$ V = constant $\Rightarrow$ V = مقدار ثابت

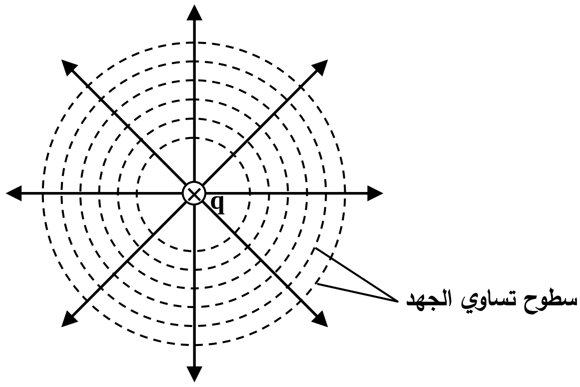
وهذا يعني أن جميع نقاط هذا المسار متساوية الجهد، والسطح الذي تكون جميع نقاطه متساوية الجهد يسمى سطح تساوي الجهد.

$\therefore$ سطوح تساوي الجهد تكون عمودية على المجال (E)

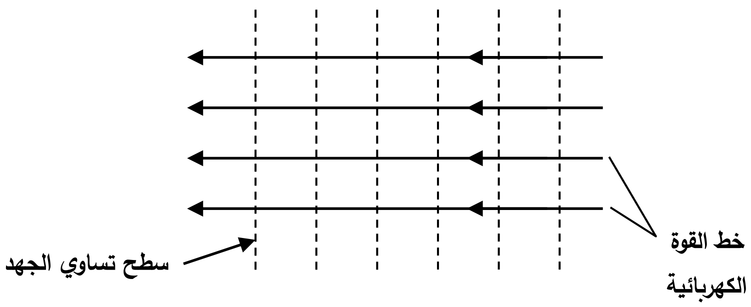
$\therefore$ الشغل اللازم لنقل شحنة اختبارية بين أية نقطتين على سطح تساوي الجهد = صفر

$\therefore$ سطوح تساوي الجهد يجب أن تكون عمودية على خطوط القوة الكهربائية [لأن خط القوة يمثل اتجاه المجال]

الشكل التالي يبين سطوح تساوي الجهد لمجال ناشيء عن شحنة نقطية.



الشكل التالي يبين سطوح تساوي الجهد للمجال المنتظم



تكون سطوح تساوي الجهد مستوية ومتوازية.

4-9طاقة الوضع الكهربائية Electric Potential Energy

تدعى طاقة الوضع الكهربائية بالطاقة الكهربائية الكامنة.

وتعرّف الطاقة الكهربائية الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية بالشغل اللازم إنجازه لتجميع هذه الشحنات، وذلك بجلب كل شحنة على حدة من المالانهاية.

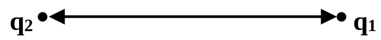
يفترض وجود هذه الشحنات في حالة السكون عندما تكون على أبعاد لا نهائية عن بعضها من البعض الآخر.

1. الطاقة الكامنة لمجموعة مكونة من شحنتين q_1 و q_2

الشغل اللازم إنجازه لنقل q_1 من المالانهاية ووضعها في مكانها = W_1

$W_1 = 0$

$W_2 = q_2 V_1$



V_1 = الجهد الكهربائي للشحنة q_1 على بعد (r)

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r}$$

$$\therefore W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

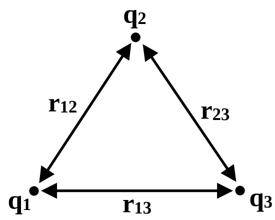
2.الطاقة الكامنة لمجموعة تتكون من ثلاث شحنات

$W_1 = 0$

الشغل اللازم لنقل q_2 من المالانهاية ووضعها على بعد r_{12} من q_1 = W_2

$$W_2 = q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$W_3 = q_3V_1 + q_3V_2$



الشغل اللازم لنقل q_3 من المالانهاية ووضعها على بعد r_{13} من q_1 و r_{23} من q_2

$$\therefore W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_3 q_2}{r_{23}}$$

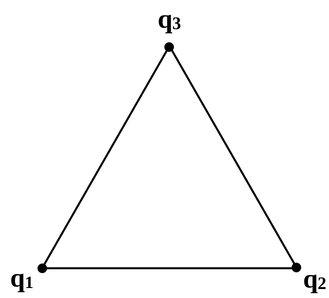
$U = W_1 + W_2 + W_3$

$$= 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_3 q_2}{r_{23}}$$

مثال

ثلاث شحنات نقطية مثبتة على رؤوس مثلث منتظم طول ضلعه (0.10 m). احسب الطاقة الكامنة لهذه المجموعة علماً أن:

$q_1 = +10 \times 10^{-6}$ C، $q_2 = +20 \times 10^{-6}$ C، $q_3 = -30 \times 10^{-6}$ C



$W_1 = 0$

$$W_2 = q_2 V_1 = \frac{Kq_1 q_2}{r_{12}}$$

$$W_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}}{0.1}$$

$W_2 = 18$ J

$W_3 = q_3 (V_1 + V_2) = q_3V_1 + q_3V_2$

$$W_3 = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-6} \times (-30 \times 10^{-6})}{0.1} + \frac{9 \times 10^9 \times (-30 \times 10^{-6}) \times 20 \times 10^{-6}}{0.1}$$

$W_3 = -81$ Joule

$\therefore U = W = 0 + 18 - 81 = -63$ Joule

إن الإشارة السالبة تعني أن الشغل الواجب إنجازه لتجميع هذه الشحنات يجب أن يكون سالباً، فلو تركت هذه الشحنات طليقة لوجدنا أنها تتحرك متجهة إحداهما نحو الأخرى في هذه الحالة.

مثال

مربع طول ضلعه (10 cm) وضعت على أركانه أربع شحنات قميها

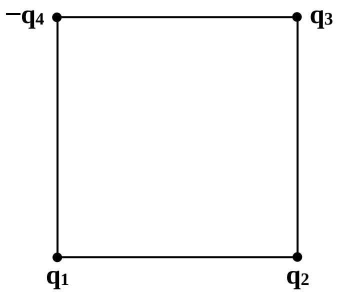
($q_1 = 10 \times 10^{-9}$ C)، ($q_2 = -20 \times 10^{-9}$ C)، ($q_3 = +30 \times 10^{-9}$ C)،

($q_4 = +20 \times 10^{-9}$ C)،

احسب الطاقة الكامنة لهذه المجموعة من الشحنات.

مثال

أربع شحنات متساوية مقدار كل منها يساوي (10^{-6} C)، جلبت من مسافات بعيدة ووضعت على رؤوس مربع طول ضلعه (1 m)، ثلاث من هذه الشحنات موجبة والأخرى سالبة. احسب الطاقة الكامنة لهذه المجموعة من الشحنات.



$W_1 = 0$

$$W_2 = q_2 V_1 = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}}$$

$$W_2 = \frac{Kq^2}{1}$$

$$W_3 = q_3V_1 + q_3V_2$$

$$W_3 = \frac{Kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{Kq_2q_3}{r_{23}} = \frac{Kq^2}{\sqrt{2}} + \frac{Kq^2}{1}$$

$$W_4 = -q_4(V_1 + V_2 + V_3) = -q_4V_1 - q_4V_2 - q_4V_3$$

$$W_4 = \frac{-Kq_1q_4}{r_{14}} - \frac{Kq_4q_2}{\sqrt{2}} - \frac{Kq_4q_3}{1}$$

$$W_4 = \frac{-Kq^2}{1} - \frac{Kq^2}{\sqrt{2}} - \frac{Kq^2}{1}$$

$U = W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$

$$W = 0 + \frac{Kq^2}{1} + \frac{Kq^2}{\sqrt{2}} + \frac{Kq^2}{1} - \frac{Kq^2}{1} - \frac{Kq^2}{\sqrt{2}} - \frac{Kq^2}{1}$$

$U = 0$

تمارين الفصل الرابع

4–1 شحنتان نقطتيان مقدارهما $(+10 \times 10^{-8}\ C)$ و $(-5 \times 10^{-8}\ C)$ تفصلهما مسافة قدرها $(20\ cm)$. جد مقدار الجهد الكهربائي عند منتصف المسافة بينهما.

4–2 كرة معدنية موصلة نصف قطرها $(3\ cm)$ تحمل شحنة موجبة قدرها $(10^{-9}\ C)$ احسب الجهد عند النقاط التي تبعد مسافات قدرها $(2\ cm)$ و $(3\ cm)$ و $(4\ cm)$ من المركز.

4–3 ثلاثة أجسام صغيرة، كل منها يحمل شحنة قدرها $(2 \times 10^{-6}\ C)$ وضعت على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $(3\ cm)$. جد مقدار الجهد الكهربائي في مركز المثلث.

4–4 في تجربة مليكان، أمكن موازنة قطرة زيت بين اللوحين عندما كان مقدار شدة المجال الكهربائي $(2.32 \times 10^{5}\ N/C)$. احسب فرق الجهد بين اللوحين، علماً بأن المسافة بينهما تساوي $(1.6\ cm)$.

4–5 شحنتان نقطتيان مقدارهما $(+5 \times 10^{-6}\ C)$ و $(-15 \times 10^{-6}\ C)$ والمسافة بينهما تساوي $(100\ cm)$. عين موضع النقطة (أو النقاط) التي تقع على امتداد المسافة بينهما والتي يكون عندها الجهد الكهربائي صفراً.

4–6 إذا علم أن فرق الجهد بين قطبي بطارية هو $(6\ Volt)$. فما هو مقدار الشغل الواجب بذله لنقل شحنة كهربائية قدرها $(9\ coulombs)$ من أحد القطبين إلى الآخر؟

4–7 إذا علم أن فرق الجهد بين لوحين متوازيين المسافة بينهما $(1\ cm)$ هو $(100\ V)$. فاحسب:

أ. مقدار شدة المجال الكهربائي بينهما

ب. مقدار التعجيل الذي يتحرك به ايون الهيدروجين (كتلته $3.32 \times 10^{-27}\ Kg$) وشحنته $(1.6 \times 10^{-19}\ C)$ إذا وضع في هذا المجال.

4–8 قذف إلكترون طاقته الحركية $(3.2 \times 10^{-17}\ J)$ في مجال كهربائي شدته $(1000\ N/C)$ باتجاه المجال. احسب المسافة التي يقطعها الإلكترون حتى يتوقف عن الحركة.

4–9 اسطوانة معدنية طويلة، نصف قطرها a، تحمل شحنة موجبة كثافتها الخطية λ، موضوعة على محور اسطوانة معدنية مجوفة، نصف قطرها الداخلي b، وتحمل شحنة سالبة مساوية للشحنة الموجبة. بين أن فرق الجهد بين الاسطوانتين هو

$$V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \ln\frac{b}{a}$$

4−10 شحنة موزعة بانتظام خلال كرة عازلة نصف قطرها R وبكثافة حجمية $\rho\ C/m^3$، أوجد الجهد الكهربائي عند النقاط التي تبعد r عن مركز الكرة، عندما تكون: (أ) $r > R$ و (ب) $r < R$

4−11 احسب الجهد الكهربائي الناشيء عن الشحنة الكروية المبينة في المسألة (3−10) عند نقطة تبعد (أ) 4n عن المركز (ب) 2n عن المركز.

4−12 إذا علم أن قوة عزل الهواء هي (3×10^6 V/m). فما مقدار أقصى شحنة يمكن وضعها على كرة موصلة نصف قطرها (30 cm) موضوعة في الهواء؟ ما مقدار الجهد الكهربائي لهذه الكرة؟

4−13 إذا علم أن هناك مجالاً كهربائياً يحيط بالكرة الأرضية وأن اتجاهه عمودي نحو الأسفل ومقداره (ضمن مدى معين) هو $E_y = 300\text{-}0.1y$، حيث تمثل y الارتفاع عن سطح الأرض. أوجد الجهد الكهربائي على ارتفاع h عن السطح. اعتبر الجهد على سطح الأرض مساوياً إلى صفر.

4−14 ما مقدار الطاقة الحركية التي يكتسبها بروتون إذا تسارع خلال فرق جهد قدره (100 V) في الفرغ. (أ) بوحدات الجول. (ب) بوحدات الإلكترون−فولت.

4−15 عين سطح تساوي الجهد (الذي يكون بشكل مستوي) لثنائي القطب المبين في الشكل (4−4). ما مقدار الجهد عند هذا المستوى؟

4−16 أربع شحنات متساوية مقدار كل منها يساوي (10^{-6} C) جلبت من مسافات بعيدة ووضعت على رؤوس مربع طول ضلعه (1 m). ثلاث من هذه الشحنات موجبة والأخرى سالبة. احسب الطاقة الكامنة لهذه المجموعة من الشحنات.

4−17 إذا علمت أن الجهد الكهربائي في منطقة معينة هو $V = \dfrac{K}{x^2 + y^2 + z^2}$، أوجد المركبات الثلاثة لشدة المجال الكهربائي.