جمهورية العراق
جامعة بغداد
كلية التربية للعلوم الصرفة ابن الهيثم
قسم الرياضيات

التحليل الطيفي والقيم الذاتية مفاتيح فهم الأنظمة المعقدة

بحث مقدم الى قسم الرياضيات في كلية التربية أبن الهيثم للعلوم الصرفة كجزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس تربية في الرياضيات

أعداد الطالب

اية احمد علي

الشعبة

(مسائي)

بأشراف

ا.د. رشا ناصر مجيد

م.م. زينب صبحي مصطفى

2026-2025

إقرار المشرف

أؤيد بان مشروع البحث الموسوم

"التحليل الطيفي والقيم الذاتية مفاتيح فهم الأنظمة المعقدة"

المعد من قبل الطالب /

"اية احمد علي "

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات في كلية التربية للعلوم الصرفة – ابن الهيثم – قسم الرياضيات – المرحلة الرابعة – دراسة (مسائية) – شعبة – مسائي – انجز بأشرافي واوصي اللجنة العلمية المكلفة بتقويمه.

التوقيع

المشرف:

التاريخ:

المحتويات

Abstract i
Introduction ii

الفصل الأول الأسس الرياضية للقيم الذاتية والتحليل الطيفي
Introduction1.1 1
1.2التحويلات الخطية والمصفوفات 1
1.3تعريف القيم الذاتية والمعادلة الأساسية 1
1.4 التفسير الهندسي للقيم الذاتية 2
1.5 التحليل الطيفي للمصفوفات 3
1.6نظرية المصفوفات المتماثلة والتحليل الطيفي الحقيقي 3

الفصل الثاني: التحليل الطيفي من منظور رياضي متقدم
Introduction 2.1 4
2 .2 التحليل الطيفي للمؤثرات الخطية في الفضاءات المتجهية 4
2.3 نظرية القيم الذاتية في المصفوفات المعقدة والهرمية 5
2.4 التحليل الطيفي الدالي (Spectral Theory of Operators) 5
2.5 العلاقة بين التحليل الطيفي والتفكيك المتعامد (Orthogonal Decomposition) 6-5
2.6 استقرار الحلول للأنظمة التفاضلية الخطية 7

الفصل الثالث: التطبيقات الفيزيائية للتحليل الطيفي والقيم الذاتية
Introduction -3.1 8
3.2 - القيم الذاتية في ميكانيكا الكم 8
3.3 - التحليل الطيفي في الأنظمة الاهتزازية 9
3.4 - التحليل الطيفي في الديناميكا الحرارية والفيزياء الإحصائية 10
3.5-التحليل الطيفي الكهرومغناطيسي 10
3.6- الطيف كأداة لفهم الأنظمة متعددة المستويات 11

الفصل الرابع: التطبيقات الهندسية والحاسوبية للقيم الذاتية والتحليل الطيفي
Introduction 4.1 12
4.2 القيم الذاتية في تحليل الأنظمة الهندسية والتحكم 13-12
4.3 -التحليل الطيفي في تحليل الصور والإشارات 14-13
4.4 - التحليل الطيفي في الذكاء الاصطناعي وتعلم الآلة 14
4.5- التحليل الطيفي في الرسومات الحاسوبية وتحليل الشبكات 15
4.6- الخلاصة الهندسية والحاسوبية 15
الخاتمة 16
المصادر الأجنبية 17
المصادر العربية 18

Abstract

يهدف هذا البحث إلى دراسة مفهومي التحليل الطيفي والقيم الذاتية من منظور يجمع بين الجانب النظري والتطبيقي، بوصفهما من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في تحليل الأنظمة المعقدة.

تم في البداية عرض الأساس الرياضي لهذين المفهومين ضمن إطار الجبر الخطي ونظرية المصفوفات، ثم تم الانتقال إلى تطبيقاتهما في مجالات الفيزياء والهندسة وعلوم الحاسوب.

يُظهر البحث كيف تُستخدم القيم الذاتية في فهم استقرار الأنظمة الديناميكية وتحديد الترددات الطبيعية، وكيف يسهم التحليل الطيفي في تحليل البيانات الضخمة ومعالجة الصور، وتطوير خوارزميات الذكاء الاصطناعي.

وفي الختام، يناقش البحث الاتجاهات الحديثة والتحديات التي تواجه هذا المجال، مع الإشارة إلى آفاق دمج التحليل الطيفي بالذكاء الاصطناعي لابتكار أدوات تحليل أكثر تطورًا في المستقبل.

Introduction

يُعَدُّ الجبر الخطي أحد أهم فروع الرياضيات التي تؤسس لفهم العديد من الظواهر في العلوم الطبيعية والهندسية. ومن بين مفاهيمه المحورية تبرز القيم الذاتية (Eigenvalues) والتحليل الطيفي (Spectral Analysis) باعتبارهما أدوات قوية لتحليل الأنظمة المعقدة وتحويلها إلى صيغ أبسط يمكن التعامل معها رياضيًا وحاسوبيًا.

تنبع أهمية هذين المفهومين من كونهما يسمحان بتوصيف خصائص النظام الداخلية عبر الأعداد والمتجهات التي تعبّر عن سلوك هذا النظام عند تعرّضه لتحويلات أو مؤثرات معينة. فالقيم الذاتية تعبّر عن مدى استجابة النظام للتحويلات الخطية، بينما يتيح التحليل الطيفي تفكيك النظام إلى مكونات أساسية مستقلة، تشبه في طبيعتها عملية تحليل الصوت أو الضوء إلى تردداته المختلفة.

يتناول هذا البحث دراسة متكاملة للجانب النظري والتطبيقي للتحليل الطيفي والقيم الذاتية، فيبدأ من الأسس الرياضية الدقيقة ثم ينتقل إلى التطبيقات العملية في الفيزياء، والهندسة، وعلوم البيانات، والذكاء الاصطناعي.

يهدف البحث إلى إظهار كيف يمكن لمفاهيم رياضية مجردة أن تتحول إلى أدوات عملية لفهم العالم الواقعي، وكيف يلتقي التجريد الرياضي بالتطبيق العلمي لتفسير الأنظمة المعقدة.

الفصل الأول: الأسس الرياضية للقيم الذاتية والتحليل الطيفي

Introduction1.1

يُعتبر فصل الأسس الرياضية للقيم الذاتية (Eigenvalues) والتحليل الطيفي (Spectral Analysis) بمثابة الجسر الذي يربط بين الجبر الخطي المجرد والتطبيقات الفيزيائية والهندسية الواقعية.

هذا الفصل لا يتعامل مع المصفوفات كأرقام جامدة، بل كـ "مؤثرات" تغير في الفضاء، ويبحث عن النقاط التي يظل فيها النظام مستقراً أو محافظاً على اتجاهه.

ويشمل بعض الأسس الرياضية للقيم الذاتية والتحليل الطيفي.

1.2التحويلات الخطية والمصفوفات

في الجبر الخطي، تُعَدُّ التحويلات الخطية (Linear Transformations) الأساس الذي يبنى فهم العلاقات بين الفضاءات المتجهة.

يمكن تمثيل أي تحويل خطي بين فضائيين متجهين بواسطة **مصفوفة**، وهذه المصفوفة تختزن جميع المعلومات الخاصة بكيفية تغيير المتجهات في الفضاء

إذا كانت Aمصفوفة تمثل تحويلا خطيا فان ضربها في متجه v يعطي متجها جديدا

v A يمثل صورة المتجه بعد التحويل.

في بعض الحالات الخاصة، يكون هناك متجهات تتغير فقط في طولها دون أن يتغير اتجاهها - وهذه المتجهات تسمى متجهات ذاتية.(Eigenvalues)

أما نسبة التغير في طولها فتسمى القيم الذاتية (Eigenvectors).

1.2التحويلات الخطية والمصفوفات

القيمة الذاتية λ لمصفوفة A تُعرَّف بأنها عدد يحقق المعادلة التالية:

$$\upsilon A = \lambda \upsilon$$

حيث υ متجه غير صفري يُسمّى **المتجه الذاتي المقابل لـλ .**

ولكي يكون لهذا النظام حل غير صفري، يجب أن يكون محدد المصفوفة $(A-\lambda I)$ مساوي للصفر:

$$\det (A-\lambda I) = 0$$

هذا المعادلة تعرف باسم **المعادلة المميزة (Characteristic Equation)، وحلولها هي القيم الذاتية للمصفوفة.**

تمثل القيم الذاتية خصائص جوهرية للنظام الذي تصفه المصفوفة، فهي ثابتة تحت أي تغيير في أساس الفضاء المتجهي، وتستخدم لتوصيف خصائص التحويل بشكل مستقل عن طريقة تمثيله.

1.4 التفسير الهندسي للقيم الذاتية

من الناحية الهندســـية، تمثل القيم الذاتية مقاييس التمدد أو الانكماش التي يحدثها التحويل الخطي في اتجاهات معينة من الفضاء.

فعلى سبيل المثال، في حالة التحويلات ثنائية الأبعاد يمكن اعتبار المصفوفة A كمجموعة من القوى أو التأثيرات التي تعمل على متجهات في الفضاء

إذا وجد متجه υ لا يتغير اتجاهه بعد التحويل، فان التحويل في هذا الاتجاه.

يمثل اتجاها مميزا للنظام وλ هو مقدار تأثر في هذا الاتجاه

تستخدم هذه الفكرة في مجالات متعددة: في الفيزياء تصف القيم الذاتية **الطاقة في الأنظمة الكمية**، وفي الهندسة تصف **استقرار الأنظمة والترددات الطبيعية للاهتزازات**

1.5 التحليل الطيفي للمصفوفات

التحليل الطيفي هو عملية تفكيك المصفوفة إلى مكونات بسيطة على أساس قيمها الذاتية ومتجهاتها الذاتية.

إذا كانت المصفوفة A قابل للقطرية أي يمكن كتابتها على صورة ($A=PDP^{-1}$)

فان:

مصفوفة قطرية تحتوي على القيم الذاتية D.

مصفوفة أعمدتها هي المتجهات الذاتية المقابلة P.

يُعرف هذا الشكل باسم **التحليل الطيفي (Spectral Decomposition)**

وهو مفيد جدًا لأنه يبسط العمليات الرياضية المعقدة مثل رفع المصفوفة الى قوى عالية او

حل المعادلات التفاضلية الخطية.

1.6نظرية المصفوفات المتماثلة والتحليل الطيفي الحقيقي

المصفوفات **المتماثلة (Symmetric Matrices)**، التي تتحقق فيها العلاقة $A=A^T$ لها خصائص مميزة في التحليل الطيفي

1- جميع قيمها الذاتية **حقيقية**

2- المتجهات الذاتية المقابلة لقيم مختلفة تكون **متعامدة.**

هذه الخاصية تجعل التحليل الطيفي للمصفوفات المتماثلة أداة قوية في التطبيقات الفيزيائية والهندسية لأن معظم الأنظمة الطبيعية يمكن تمثيلها بمصفوفات متماثلة (مثل مصفوفة الكتلة او مصفوفة الطاقة)

الفصل الثاني: التحليل الطيفي من منظور رياضي متقدم

Introduction2.1

هذا الفصل سوف يتطرق الى التحليل الطيفي للمؤثرات الخطية في الفضاءات المتجهية، والى نظرية القيم الذاتية في المصفوفات المعقدة والهرمية، وتوضيح التحليل الطيفي الدالي (Spectral Theory of Operators) والعلاقة بين التحليل الطيفي والتفكيك المتعامد

(Orthogonal Decomposition).

في الجزء الأخير من الفصل يوضح استقرار الحلول للأنظمة التفاضلية الخطية

2 .2 التحليل الطيفي للمؤثرات الخطية في الفضاءات المتجهية

يتوسع التحليل الطيفي في المستوى المتقدم ليتناول المؤثرات الخطية (Linear Operates)

في الفضاءات المتجهية، وليس فقط المصفوفات.

ففي الفضاء بمتجهي V يمكن التعريف مؤثر خطي $T: V\rightarrow V$ بحيث يربط كل متجه في الفضاء بمتجه اخر.

تكون القيمة الذاتية λ والمعادلة الذاتية:

$$T(\nu) = \lambda \upsilon$$

حيث $\upsilon \neq 0$

إذا كانت الأبعاد منتهية، فإن هذا المؤثر يمكن تمثيله بمصــفوفة، أما في الفضــاءات غير المنتهية (مثل فضــاءات الدوال)، فيأخذ التحليل الطيفي شــكلاً أكثر عمومية ويُعرف بـــــ التحليل الطيفي الدالي (Analysis Functional Spectral) .

في هذا السياق، يُنظر إلى المؤثرات ككيانات مستمرة يمكن تحليلها باستخدام نظرية هيلبرت

(Hilbert Space Theory) ، حيث يُستخدم التحليل الطيفي لوصف سلوك الأنظمة الفيزيائية مثل الأنظمة الكمية والموجات.

2.3 نظرية القيم الذاتية في المصفوفات المعقدة والهرمية

في كثير من التطبيقات تكون المصفوفات غير حقيقية أي تحتوي على أعداد مركبة، أو تكون غير متماثلة. في هذه الحالة، قد تكون القيم الذاتية معقدة أو حتى متعددة.

المصفوفات الهرمية ((Hermitian Matrices وهي المصفوفات التي تحقق فيها

$A = A^*$

(اي تساوي مرافقها المترافق) لها خصائص مهمه جدا:

*جميع قيمها الذاتية حقيقية.

*متجهاتها الذاتية متعامدة.

هذه الخصائص تجعل المصفوفات الهرمية حجر الأساس في الفيزياء، خاصة في ميكانيكا الكم، حيث تمثل المؤثرات الهرمية كميات فيزيائية يمكن قياسها (observables)

2.4التحليل الطيفي الدالي (Spectral Theory of Operators)

يعد التحليل الطيفي الدالي من أكثر المواضيع عمقًا في الرياضيات الحديثة، ويُستخدم لوصف المؤثرات الخطية في الفضاءات اللانهائية الأبعاد

في هذا الإطار، يُعرف طيف المؤثر (Operator Spectrum of an) بانه مجموعة القيم λ التي لا يكون عندها المؤثر ($T-\lambda I$) قابلاً للعكس

يتضمن هذا الطيف ثلاثة أنواع رئيسية:

1.**الطيف النقطي(Point Spectrum):** حيث توجد قيم ذاتية محدد

2.**الطيف المتصل (Continuous Spectrum)** : حيث لا توجد قيم ذاتية صريحة ولكن النظام بالقرب من قيم معينة.

3. **الطيف المتصل (Residual Spectrum) :** وهو مجموعة القيم التي لا يغطيها النوعان السابقان

يستخدم هذا النوع من التحليل في معادلات شرود نغر الكمية، وفي التحليل الطيفي للموجات وديناميكيات الأنظمة المستمرة.

2.5العلاقة بين التحليل الطيفي والتفكيك المتعامد (Orthogonal Decomposition)

من الجوانب النظرية المهمة أن التحليل الطيفي يتيح تفكيك الفضاء المتجهي إلى مجموعات فرعية متعامدة بحيث يعمل كل مكون من المصفوفة أو المؤثر على جزء محدد من الفضاء.

هذا يُعرف باسم التفكيك المتعامد للطيف (Decomposition Theorem Spectral) الذي ينص على ان اي مؤثر هرمي يمكن كتابته على صورة:

$$T = \sum \lambda i P i$$

حيث λi هي القيم الذاتية، وPi هي مؤثرات الإسقاط المتعامدة على الفضاءات الذاتية المقابلة.

يسمح هذا الشكل بتحليل الأنظمة الرياضية المعقدة إلى مكونات بسيطة قابلة للفهم، تماما كما يتم تحليل الصوت الى تردداته الاساسية.

2.6 استقرار الحلول للأنظمة التفاضلية الخطية

في التحليل الرياضي، تُستخدم القيم الذاتية أيضا لتحديد استقرار الأنظمة الديناميكية الموصوفة بمعادلات تفاضلية خطية من الشكل

$$\dot{X} = AX$$

يظهر الحل العام ان

$$\mathbf{X}(t) = e^{At}X(0)$$

إذا قمنا بتحليل A طيفيًا (أي بإيجاد قيمها الذاتية λ) فإن سلوك النظام يُحدّد من إشارات الأجزاء الحقيقية لهذه القيم

- إذا كانت جميع القيم الذاتية ذات أجزاء حقيقية سالبة→ النظام مستقر.

-إذا كانت هناك قيم ذات أجزاء حقيقية موجبة→ النظام غير مستقر.

- وإذا كانت جميعها خيالية بحتة →النظام متذبذب دوريا.

وبذلك، يصبح التحليل الطيفي أداة مركزية في تحليل استقرار الأنظمة في كل من الفيزياء والهندسة والتحكم الآلي.

الفصل الثالث: التطبيقات الفيزيائية للتحليل الطيفي والقيم الذاتية

Introduction3.1

يُعد التحليل الطيفي من أهم الأدوات الفيزيائية التي يستخدمها العلماء لفهم البنية الداخلية للذرات والجزيئات، حيث يتيح دراسة التفاعلات بين المادة والإشعاع الكهرومغناطيسي. يعتمد هذا التحليل على مبادئ ميكانيكا الكم، وخاصة مفهوم **القيم الذاتية** و**المتجهات الذاتية**، التي تمثل حلولًا رياضية لمعادلات تصف الطاقة المسموح بها للنظم الفيزيائية.

في هذا الفصل يتم التركيز على بعض التطبيقات الفيزيائية المهمة للتحليل الطيفي والقيم الذاتية.

3.2القيم الذاتية في ميكانيكا الكم

يُعد التحليل الطيفي والقيم الذاتية من المفاهيم الجوهرية في ميكانيكا الكم، إذ ترتبط مباشرة بفكرة الطاقة المقايسة (Quantization of Energy) في هذا الإطار، يُمثل النظام الفيزيائي بواسطة دالة موجية ψ تصف حالته بينما تمثل الكميات الفيزيائية مثل الطاقة والزخم مؤثرات (Operators)تعمل على هذه الدالة.

المعادلة الأساسية التي تحكم سلوك الجسيمات هي معادلة شرود نغر

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

حيث

$\hat{H}$: يمثل (Hamiltonian Operator) مؤثر هاملتوني ، الطاقة الكلية للنظام

E : القيمة الذاتية وتمثل الطاقة المسموح بها للنظام

ψ : المتجه الذاتي أو الدالة الموجية المقابلة لتلك الطاقة

يمثل هذا الشكل أحد أوضح الأمثلة على التحليل الطيفي في الفيزياء، حيث يمكن تفسير الأطياف المرصودة للذرات مثل طيف الهيدروجين كنتائج مباشرة لقيم ذاتية محددة لمعادلة شرود نغر

3.3 - التحليل الطيفي في الأنظمة الاهتزازية

تســتخدم القيم الذاتية أيضــا في دراســة الأنظمة الاهتزازية الميكانيكية، مثل الأوتار والأغشــية، والهياكل الهندسية. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل اهتزاز وتر مشدود بمعادلة تفاضلية جزئية من الشكل

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

بافتراض الحلول على الصورة $y(x,t) = X(x)\,T(t)$ نحصل على معادلتين تفاضليتين تفصلان الزمان والمكان، وتظهر القيم الذاتية من معادلة الحدود المكانية:

$$X''+\lambda\ X=0$$

تحدد قيم λ هنا الترددات الطبيعية للاهتزاز، وتمثل الطيف المميز للنظام.

في الهندسة الإنشائية، يُستخدم هذا المفهوم لتحديد الترددات الحرجة التي قد تؤدي إلى الرنين، أي تضخيم الاهتزازات حتى مستويات خطيرة، كما في حالة جسر تاكوما ناروز الشهير الذي انهار عام 1940 بسبب الرنين الطيفي.

3.4 - التحليل الطيفي في الديناميكا الحرارية والفيزياء الإحصائية

في الفيزياء الإحصائية، تستخدم القيم الذاتية في تحليل مصفوفات الانتقال التي تصف حركة الجسيمات أو الجزيئات داخل الأنظمة الحرارية.

على سبيل المثال، في نظرية المصفوفات العشوائية (Random Matrix Theory) يُستخدم توزيع القيم، الذاتية لتمثيل المستويات الطاقية في الأنظمة المعقدة مثل النوى الذرية أو الجسيمات دون الذرية.

كما يعد التحليل الطيفي أداة أساسية في فهم ظواهر الانتقال الطوري(Phase Transition) ، إذ تظهر القيم الذاتية تغيرات حادة عند النقاط التي يتحول فيها النظام من حالة إلى أخرى مثل التحول من الحالة الصلبة إلى السائلة.

3.5-التحليل الطيفي الكهرومغناطيسي

يستخدم التحليل الطيفي في الفيزياء الكهرومغناطيسية لتحليل استجابة المواد عند تعرضها لموجات ضوئية أو إشعاعية.

فمن خلال دراسة أطياف الامتصاص أو الانبعاث، يمكن تحديد مستويات الطاقة الداخلية للذرات والجزيئات.

- تعتبر تقنيات مثل: التحليل الطيفي بالأشعة تحت الحمراء ((IR Spectroscopy .

- التحليل الطيفي بالرنين النووي المغناطيسي(NMR) .

- التحليل الطيفي بالأشعة السينية (X-ray Spectroscopy) .

من التطبيقات العملية المباشرة لمفهوم القيم الذاتية في دراسة البنى الإلكترونية والجزيئية.

ويستخدم هذا النوع من التحليل في الكيمياء الفيزيائية وعلم المواد للكشف عن البنية الدقيقة للمركبات ودراسة الخصائص الإلكترونية للمواد الجديدة

3.6- الطيف كأداة لفهم الأنظمة متعددة المستويات

تعتبر القيم الذاتية بمنزلة "بصمة" للنظام الفيزيائي، إذ يمكن من خلالها تحديد خصائصه الأساسية دون فحص مباشر لجميع مكوناته.

ففي أنظمة معقدة مثل البلورات أو الشبكات الكمومية يمكن استخدام الطيف الطاقي لتحديد التماثلات الداخلية والخصائص الموجية دون تحليل النظام بأكمله.

هذا ما يجعل التحليل الطيفي أداة مركزية في الفيزياء النظرية والتجريبية على حد سواء.

الفصل الرابع: التطبيقات الهندسية والحاسوبية للقيم الذاتية والتحليل الطيفي

Introduction4.1

الفصل الرابع يربط بين النظرية والتطبيق، ليُظهر أن القيم الذاتية والتحليل الطيفي ليسا مجرد أدوات رياضية، بل هما لغة مشتركة لفهم الأنظمة في مختلف المجالات: من الهندسة الكهربائية والميكانيكية، إلى الذكاء الاصطناعي وتحليل البيانات، وصولاً إلى الرسومات الحاسوبية والشبكات. إنه فصل يفتح آفاقاً واسعة أمام القارئ لفهم كيف يمكن للرياضيات أن تكون قلب التكنولوجيا الحديثة.

4.2 القيم الذاتية في تحليل الأنظمة الهندسية والتحكم

في الهندسة الميكانيكية والكهربائية، تُستخدم القيم الذاتية كأداة حاسمة لفهم استقرار الأنظمة الديناميكية. فالنظام الديناميكي الخطي يُمثَّل عادةً بالمعادلة التفاضلية:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

حيث:

- A : مصفوفة تصف ديناميكية النظام
- B : مصفوفة الإدخال
- u **:**متجه المتغيرات المدخلة
- x :متجه الحالة

إن تحليل القيم الذاتية للمصفوفة A يكشف سلوك النظام مع الزمن:

- إذا كانت جميع القيم الذاتية تمتلك أجزاء حقيقية سالبة ← النظام مستقر .
- إذا وُجدت قيمة ذاتية ذات جزء موجب ← النظام غير مستقر وسينفجر بمرور الوقت .

من هنا تأتي أهمية مفهوم **تحليل الطيف (Eigenvalue Analysis)** في تصميم أنظمة التحكم الحديثة، إذ يُستخدم لتحديد ما إذا كان النظام سيصل إلى حالة توازن أو يتذبذب أو يخرج عن السيطرة.

كما تُســتخدم تقنية **تغذية راجعة للحالة (State Feedback)** لتعديل القيم الذاتية وجعل النظام مستقراً من خلال تغيير مواقعها في المستوى المركب، في عملية تُعرف باسم **التحكم في الموقع الطيفي.(Pole Placement Control)**

4.3 - التحليل الطيفي في تحليل الصور والإشارات

في هندسة الحاسوب ومعالجة الصور والإشارات الرقمية، أصبحت القيم الذاتية أحد أهم المفاهيم المستخدمة في خوارزميات التحليل الإحصائي وتقليل الأبعاد.

ومن أبرز التطبيقات:

أولاً: تحليل المكونات الرئيسية(PCA - Principal Component Analysis)

وهو أسلوب يعتمد على تحليل القيم الذاتية لمصفوفة التغاير **(Covariance Matrix)** للبيانات.

الخطوات الأساسية هي:

1. بناء مصفوفة التغاير من البيانات .
2. إيجاد القيم والمتجهات الذاتية .
3. ترتيب القيم الذاتية تنازلياً لاختيار الاتجاهات الأكثر تأثيراً في البيانات .

يسمح هذا التحليل بتمثيل البيانات في أبعاد أقل دون فقدان كبير للمعلومات.

يُستخدم PCA في ضغط الصور، التعرف على الوجوه، وتحليل الأنماط في البيانات الضخمة.

ثانياً: تحليل القيم المفردة (SVD - Singular Value Decomposition)

تُستخدم طريقة SVD لتفكيك المصفوفة إلى ثلاث مكونات:

$$A = U\Sigma V^T$$

تُستخدم هذه $A^T A$:شكلاً من القيم الذاتية المكافئة للمصفوفةΣحيث تمثل القيم المفردة في الطريقة في ضغط الصور، استخراج السمات المميزة، وتحليل النصوص في محركات البحث.؟

ثالثاً: معالجة الإشارات

في تحليل الإشارات الزمنية، تُستخدم القيم الذاتية لتحديد الترددات الأساسية المكونة للإشارة، وهي ما يشكل **الطيف الترددي** لها.

من خلال هذا التحليل يمكن إزالة الضوضاء أو تضخيم الترددات المهمة، مما يجعل التحليل الطيفي جزءاً لا يتجزأ من هندسة الصوت والرادار والموجات اللاسلكية.

4.4 - التحليل الطيفي في الذكاء الاصطناعي وتعلم الآلة

في السنوات الأخيرة، أصبح التحليل الطيفي الرياضي أحد المكونات الأساسية في العديد من خوارزميات الذكاء الاصطناعي (AI)وتعلم الآلة (Machine Learning) .

ومن أهم تطبيقاته:

1. التجميع الطيفي(Spectral Clustering)

تُستخدم القيم الذاتية لمصفوفة التشابه أو مصفوفة لابلاسيان الرسومية (Graph Laplacian)لتقسيم البيانات إلى مجموعات.

الفكرة أن القيم الذاتية تكشف الروابط البنيوية داخل البيانات، مما يمكن من تجميع النقاط المتشابهة دون معرفة مسبقة بعدد المجموعات.

2. تحليل الشبكات العصبية

في التدريب العميق (Deep Learning)، يمكن استخدام التحليل الطيفي لتقدير استقرار الشبكات العصبية من خلال تحليل طيف مصفوفات الأوزان (Weight Matrices).

3. التعلم الطيفي في الأنظمة المعقدة

في تحليل الأنظمة المتعددة العوامل، مثل النماذج الاقتصادية أو البيولوجية، يُستخدم التحليل الطيفي للكشف عن أنماط مخفية في التفاعلات بين المكونات، وذلك عبر تحليل مصفوفات الترابط .(Correlation Matrices)

4.5- التحليل الطيفي في الرسومات الحاسوبية وتحليل الشبكات

في الرسومات الحاسوبية (**Computer Graphics**)، يُستخدم التحليل الطيفي لوصف الأشكال ثلاثية الأبعاد عبر تحليل طيف لابلاسيان الشكل (**Laplacian Spectrum of Shape**).

يسمح ذلك بـ:

- تصنيف الأشكال
- ضغطها
- التعرف عليها من زوايا مختلفة

أما في تحليل الشبكات المعقدة (**Complex Networks**)مثل شبكات التواصل الاجتماعي أو الأنظمة الكهربائية، فإن القيم الذاتية لمصفوفة الترابط (**Adjacency Matrix**)توفر معلومات مهمة حول:

- مراكز التأثير
- تجمعات المستخدمين
- قابلية الشبكة للانهيار أو الانقسام

4.6الخلاصة الهندسية والحاسوبية

من خلال هذا الفصـــل، يمكن القول إن التحليل الطيفي لم يعد محصـــوراً في المجال الرياضـــي فحسب، بل أصبح لغة مشتركة بين الفيزياء، والهندسة، والذكاء الاصطناعي.

ففي كل مجال من هذه المجالات، تلعب القيم الذاتية دور **البصمة الرياضية** التي تكشف خصائص النظام الداخلية، سواء كانت موجات، بيانات، إشارات، أو أنماط تعلم.

الخاتمة

لقد أظهر هذا البحث أن التحليل الطيفي والقيم الذاتية ليس مجرد مفاهيم رياضية تجريدية، بل يمثلان لغة مشتركة بين النظرية والتطبيق، تجمع بين جمال الرياضيات ودقة العلوم التجريبية.

من خلال الفصول السابقة، تبين أن الأساس النظري للتحليل الطيفي يوفر إطارًا قويًا لفهم سلوك الأنظمة الخطية والمعقدة.

.التطبيقات العملية تمتد من الفيزياء الكمية إلى الهندسة، ومن تحليل الصور إلى الذكاء الاصطناعي.

التطورات الحديثة في الذكاء الاصطناعي والحوسبة أعطت دفعة هائلة لقدرة التحليل الطيفي على التعامل مع البيانات الضخمة والأنظمة المعقدة.

إن القيم الذاتية تمثل الهوية الرياضية لأي نظام، بينما يمثل الطيف انعكاسا ديناميكيا لسلوكه.

ومع استمرار التقدم في تقنيات الحوسبة والتعلم الآلي يتوقع أن يصبح التحليل الطيفي أداة مركزية في فهم العالم المادي والرقمي على حد ســـواء، مما يجعل هذا المجال واحدا من أكثر المجالات الواعدة في الرياضيات التطبيقية والعلوم الحديثة

المصادر الأجنبية

1. Strang, G. (2016). Introduction to Linear Algebra (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

2. Trefethen, L. N., & Bau, D. (1997). Numerical Linear Algebra.

3. Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). Matrix Analysis (2nd ed.). Cambridge University Press.

4. Meyer, C. D. (2000). Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.

5. Saad, Y. (2011). Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems (2nd ed.).

6. Jolliffe, I. T., & Cadima, J. (2016). Principal Component Analysis: A Review and Recent Developments. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 374(2065), 20150202.

7. Van Loan, C. F., & Golub, G. H. (2013). Matrix Computations (4th ed.). Johns Hopkins University Press.

8. Bishop, C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.

9. Von Luxburg, U. (2007). A Tutorial on Spectral Clustering. Statistics and Computing, 17(4), 395-416.

10. Misra, A. K., & Singh, R. (2020). Spectral Methods in Engineering and Applied Science.

المصادر العربية

1-عبد الفتاح عبد الله عبد السلام (2018). مدخل إلى الجبر الخطي وتطبيقاته. دار الفكر العربي القاهرة.

2-خالد السالم (2020). التحليل الطيفي وتطبيقاته في الفيزياء والرياضيات جامعة الملك سعود.

3-أحمد الزهراني (2019) الذكاء الاصـــطناعي وتطبيقاته الرياضـــية في تحليل البيانات مكتبة الرشد الرياض.

Abstract

This research aims to explore spectral analysis and eigenvalues from both theoretical and practical perspectives, as they are among the most fundamental mathematical tools used to analyze complex systems.

The study begins with the mathematical foundations of these concepts within linear algebra and matrix theory, then moves to their applications in physics, engineering, and computer science.

It demonstrates how eigenvalues are used to determine system stability and natural frequencies, while spectral analysis is applied to big data processing, image analysis, and artificial intelligence algorithms.

Finally, the paper discusses recent trends and challenges, highlighting future prospects of integrating spectral analysis with AI to develop more advanced analytical methods.

University of Baghdad
College of Education for Pure Science Ibn- Al Haitham
Department of Mathematics

Spectral Analysis and Eigenvalues are key to understanding Complex Systems

التحليل الطيفي والقيم الذاتية مفاتيح فهم الأنظمة المعقدة

A project submitted to the department of Mathematics College of Education for Pure Sciences Ibn-Al Haitham in partial fulfillment for the requirement of the Bachelor of Education Degree in Mathematics

By the student

Aya Ahmed Ali

اية احمد علي

الشعبة

مسائي

Supervised by

Prof. Dr. Rasha Nasser Majeed

Assist. Lect. Zainab Subhi Mustafa

2026-2025