

الفرضية الثانية : المؤثرات

الفرضية الثانية : لكل متغير ديناميكي (ملحوظ فيزيائي كلاسيكي) يوجد مؤثر مناظر له في الميكانيك الكمي فمثلا يتم الحصول على مؤثر الزخم للنظام بمقارنة التعبير الكلاسيكي للطاقة الحركية المتضمن حد الزخم بالمؤثر الكمي لها فنحصل على

$$\frac{1}{2m} [P_x^2 + P_y^2 + P_z^2] = \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

$$\therefore \hat{T} = \frac{-\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \rightarrow \hat{T} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

$$\therefore P_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

ومثلها مركبات الزخم الخطي $(\hat{P}_y, \hat{P}_z)$

وكلمة مؤثر من الناحية الرياضية تماثل فعل الامر من ناحية اللغة اذا رمزنا الى مؤثر اشتقاق الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x$ بالنسبة الى x بالرمز $\hat{D}_x$ فيكون

$$\hat{D}_x f(x) = \hat{D}_x (2x^2 - 3x) = 4x - 3$$

كذلك اذا رمزنا الى مؤثر الجذر التربيعي بالرمز $(\hat{S})$ فان تأثيره على العدد ٦٤ مثلا يكون

$$\hat{S}64 = 8$$

وبصورة عامة كل العمليات الرياضية مثل حاصل الضرب والقسمة والجمع والطرح والتفاضل والتكامل يمكن تحويلها الى الصيغة المؤثرات ولأن المؤثرات ليست كميات جبرية اعتيادية لذلك فان تغيير ترتيب المؤثرات قد يؤدي الى عدم حصولنا على نفس الناتج في الحالة الاولى وتسمى هذه الصيغة التبادلية وتمثل رياضياً كالأتي: اذا كان لدينا مؤثرين $(\hat{A}, \hat{B})$ فان تبادليتهما تحسب من العلاقة

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

فاذا كان الناتج ٠ فالمؤثران $(\hat{A}, \hat{B})$ متبادلان

مثال/ احسب تبادلية المؤثرين $\left[\hat{x}, \frac{d}{dx} \right]$

ج/ $\hat{x}$ مؤثر بمعنى اضرب في x

$\frac{d}{dx}$ مؤثر بمعنى اشتق بالنسبة الى x

$$\left[\hat{x}, \frac{d}{dx}\right] f = x \cdot \frac{d}{dx}(f) - \frac{d}{dx}(x \cdot f) = x \cdot \frac{df}{dx} - x \cdot \frac{df}{dx} - f = -f$$

$$\therefore \left[\hat{x}, \frac{d}{dx}\right] f = -f \rightarrow \left[\hat{x}, \frac{d}{dx}\right] = -1$$

يكون المؤثران $\left[\hat{x}, \frac{d}{dx}\right]$ غير متبادلان و قيمة قوس التبادلية = -١.

القوانين العامة لتبادلية المؤثرات

- 1- $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
- 2- $[\hat{A}, \hat{A}] = -[\hat{A}, \hat{A}] = 0$
- 3- $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$
- 4- $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$
- 5- $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$
- 6- $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger]$

بالنسبة لمؤثرات الزخم و الموقع

- 1- $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0$
- 2- $[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$
- 3- $[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$

بواسطة مؤثرات الموقع $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ و مؤثرات الزخم الخطي يمكن اشتقاق المؤثرات الكمية من خلال كتابة التعبير الكلاسيكي للمحفوظ الفيزيائي بتعابير (الزخم و الموقع) ومن ثم استبدالها بمؤثرات الميكانيك الكمي

مثال/ اكتب التعبير الكمي للزخم الزاوي على المحور z علما ان تعبيره الكلاسيكي يعطى بالمعادلة

$$L_z = xP_y - yP_x$$

ج/

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{P}_y - \hat{y}\hat{P}_x$$

$$\hat{L}_z = \hat{x} * -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \hat{y} * -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

س/

$$L_x = yP_z - zP_y$$

$$L_y = xP_z - zP_x$$

هنالك صفتان للمؤثرات الكمية هي الخطية و الهرميتية

١- الخطية يقال عن مؤثر انه خطي اذا حقق شرطان الاول يكتب

$$\hat{A}(f_1 + f_2) = \hat{A}f_1 + \hat{A}f_2$$

بمعنى ان تأثير المؤثر على دالة حاصل جمع دالتين يساوي مجموع التأثير على كل دالة منهما فمثلا المؤثر التفاضلي هو مؤثر خطي لانه يتوزع على دالة مجموع دالتين

$$\frac{d}{dx}(f_1 + f_2) = \frac{d}{dx}f_1 + \frac{d}{dx}f_2$$

و مثله مؤثرات التكامل و حاصل الضرب ، بينما مؤثر الجذر التربيعي $\hat{S}$ لا يحقق هذا الشرط

$$\hat{S}(9 + 16) \neq \hat{S}9 + \hat{S}16$$

$$\hat{S}25 \neq \hat{S}9 + \hat{S}16$$

$$5 \neq 3 + 4 \rightarrow 5 \neq 7$$

اما الشرط الثاني لكي يكون المؤثر خطي فهو

$$\hat{A}(kf) = k\hat{A}f$$

حيث ان k هو عدد ثابت

مثال/ (١)

$$\frac{d^2}{dx^2}(5f) = 5 \frac{d^2f}{dx^2}$$

المؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$ يحقق الشرط الثاني

(٢) المؤثر $(+5)$ (اجمع مع ٥) ، الثابت = ٢ ، الدالة = ٦

$$5 + (2 * f) \neq 2 * (5 + f)$$

$$5 + (2 * 6) \neq 2 * (5 + 6)$$

٢- الهرميتية وشرطها هو

$$\int \Psi_1^* \hat{A} \Psi_2 d\tau = \int (\hat{A} \Psi_1)^* \Psi_2 d\tau$$

الجدول رقم (١) يوضح المؤثرات لبعض الملحوظات الفيزيائية

رمز المؤثر	المؤثر	الملحوظ الفيزيائي
$\widehat{p_{q_i}}$	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$	الزخم
$\hat{T}$	$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2$	الطاقة الحركية
$\hat{q}_i$	q_i	الموقع
$\hat{V}$	V	الطاقة الكامنة
$\hat{H}$	$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$	الطاقة الكلية
$\widehat{L_x}$	$-i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$	الزخم الزاوي (x)
$\widehat{L_y}$	$-i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right)$	الزخم الزاوي (y)
$\widehat{L_z}$	$-i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$	الزخم الزاوي (z)