

الميكانيك الكمي / ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤

الفصل الاول /

الاسس الفيزيائية لميكانيك

الفصل الثاني /

الصفات الأولية لميكانيك الكمي

الفصل الثالث /

الجسيم الحر

الفصل الرابع /

التذبذب التوافقي الخطي

الفصل الخامس /

الذرة اهدية الالكرون

الفصل السادس /

طرق التقريب

المصادر /

١- الميكانيك الكمي

د. جاسم الحسيني و د. عبد السلام عبد الحميد

٢- اثبات ميكانيك الكم

د. سالم مسعود الشاع و د. انجد عبد الرزاق كرجه

٣- مقدمة في الميكانيك الكمي

د. هاشم عبد قاسم و د. ضياء احمد

الفصل الأول

الأسس الفيزيائية للميكانيك الكمي

- ١-١ ملاحم الميكانيك الكمي
- ١-٢ لماذا الميكانيك الكمي ضروري
- ١-٣ الظواهر التي فشل الميكانيك الكلاسيكي بتفسيرها
 - إشعاع الجسم الأسود
 - الظاهرة الكهروضوئية
 - تأثير كومبتون
 - استقرار الذرة
 - توليد طول موجة الإشعاع لشيء أصغر
 - توليد زوج (الالكترون - بوزيترون)
- ١-٤ ازدواجية الجسيم والموجة للإشعاع والكهروضوئية
- ١-٥ المظهر الموجي للجسيمات المادية
- ١-٦ حيود وتداخل الآتريونات
- ١-٧ مبدأ التماثل
- ١-٨ مبدأ اللوحة لهايزنبرغ

مقدمة

اهم الفيزياء الكلاسيكية شملت حتى عام ١٩٥٩ على ثلاثة مواضيع رئيسية :-

① الميكانيكا الكلاسيكية :- وهو العلم الذي يدرس حركة الاجسام لظاهرة

② الترموديناميك :-

وهو العلم الذي يدرس العمليات ذات التفاعلات الحرارية .

③ الكهرومغناطيسية :-

وهو العلم الذي يهتم بدراسة المجالات الكهربائية والمغناطيسية والعلاقة فيما بينها وبين الشحنات والتيار .

ناتج المادة كثال صم وجهة نظر الفيزياء الكلاسيكية

④ أنها تتكون من جسيمات نقطية



④ تتحرك هذه الجسيمات تحت تأثير قوى التفاعل المتبادلة

عنها بينها طبقاً لمتوازيين نيوتن :-

① قانون الحركة

$$F = m \times a$$

② قانون الجاذبية

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

④ تحميت هذه النظرية فيما وصف حركة الكواكب (توليف كبلر)

فيما وصف الانظمة الجمرية ذات السرع

المحدودة ($v \ll c$)

٤

① في وصف حركة جسم P برلالة
ملاحظة E وزخمه P

② الميكانيك الكلاسيكي

يحدد بدقة :-

- موقع الجسم

- وزخمه

- والقوى المؤثرة عليه

لكم ③

مبدأ اللادقة يدل على انه طبيعة الكميات باللاحظة
تختلف في العالم الذري.

حيث لا يمكن تحديده

موقع الجسم وزخمه بنقطة واحدة

من هنا

أنتشي مفهوم الميكانيك الكمي

١ - ١ ما هو الميكانيك الكمي

وهو ذلك التخصص من الفيزياء
الذي يتناول دراسة الأنظمة المجهرية (الفرقة) كجور
لعنسل الميكانيك الكلاسيكي فاحل بعض المشكلات
مثل توليد الكرون - بولترون الر طاهرة كوميستن ا...

بذن

الميكانيك الكمي



* يعالج الظواهر التي
لا ترى بالعين المجردة
microscopic
system

الميكانيك الكلاسيكي



* يعالج الظواهر التي
تري بالعين المجردة
Macroscopic
system

* ان الميكانيك الكمي

يقول :-
 وقتاً للتقارب تتفتح فجأةً
 مختلفة لنفس القطر في
 ذرة الهيدروجين اما الأكبر
 التواضع من $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$
 والكم القوية الانبعاثية
 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$

* ان الميكانيك الكلاسيكي

يقول :-
 انه نصف قطر مدار الالكترون
 في الحالة الارضية في ذرة
 الهيدروجين هو
 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$
 كما تنص نظرية بور

* معتم الوصف الدقيق لمختلف الظواهر في ميكانيك الكم

* ان الدقة في ميكانيك الكلاسيكي عليها نوع من الرهيم وذلك بسبب :-

اهم الاجسام الانتمادية
 تحتوي عدداً كبيراً من الذرات
 حيث يكون عدم الدقة في
 معدل تغيراتها غير ملحوظاً

١- لماذا الميكانيك الكمي ضروري

يعتبر الميكانيك الكمي ضروري لانه يحتاج
 الظواهر التي يحجز الميكانيك الكلاسيكي عن تفسيرها ومنها :-

- استعاع الجسم الاسود
- الظاهرة الكهروضوئية
- تأثير كومبتون
- استقرار الذرة
- وجود ومداخل الالكترونات
- توليد حلول موجية الاشعة الصفراء
- توليد الزوج (الالكترون - بوزيترون)

١- ٣ الظواهر التي فشل الميكانيك الكلاسيكي بتفسيرها

• اشعاع الجسم الاسود

✳ برتبة القصة كانت مع العالم بلانك الذي كشف

عندما سئل بالجسم الاسود

وهو الجسم الذي يمتص كل الاشعاع
والكهر ومغناطيسي الساطع عليه مهما كان تردده لم يجر افضل
منشع للطاقة من أي جسم آخر عند نفس درجة الحرارة مهما
تباين تردد الاشعاع.

✳ تم الاعتراض كلاً ميكانيكياً

• أن أي اشعاع يتردد زاوي ما

لكيه ان يعطى أي مقدار من الطاقة عند الامتصاص ،
وحذا اعداد تبعه بالتقدير على صورة طاقة الاشعاع .

بعض

ام التبادل يتم بصورة متصلة

ملاحظة

التبادل للطاقة يكون بين المادة و الاشعاع

• ام قانون ريلي وجينز للاشعاع

$$w = 2\pi \frac{v^2}{c^2} kT$$

لا يتسجم مع الترددات العالية ولا درجات الحرارة العالية

❖ افترض بلانك

بأن الطاقة تتبدل بين المادة والإشعاع
بكمية صغيرة متقطعة

وحداً زائفاً :-

الم أي إشعاع يتزود زاوي ω
يعتبر يتبادل الطاقة مع المادة بوحدة $h\omega$

وحداً يؤدي إلى :-

فرضية بلانك :-

وهي تنص على أن :-

الم يتصرف كجسيم وحدات الطاقة صلبة متبادلة
بالفوتونات .

• وكل فوتون يحمل طاقة مقدارها $E = h\omega$
• الم هذه الطاقة يكفي أن تبعث أو تقبض من
قبل المادة .

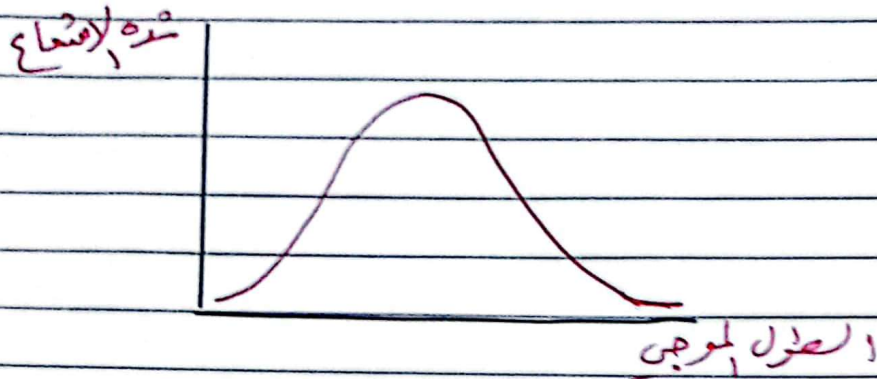
• صيغة قانون بلانك للجسم الأسود :-

$$\omega = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/KT) - 1}$$

س/ واجب

ما الفرق بين $h\omega$ و $h\nu$

• رسم بلائكة العلاقة بين سرعة الاستماع واطول الموجة لكل استماع



عرجة ما يلي (الجمالية) :-
 ١ - تزداد سرعة الاستماع بزيادة الطول الموجي الى حد معين .

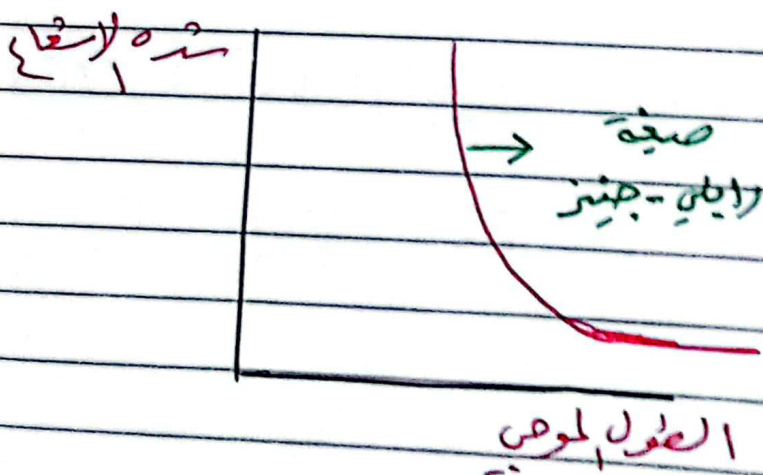
٢ - بعد ذلك تقل سرعة الاستماع الى الحد .

السرعة الاستماع تقترب من الصفر عند الاطوال الموجية الكبيرة جداً والصغيرة جداً

• ما وحيده بلائكة مخالف للسكانية الكلاسيكية

حيث يقول :-
 ١ - سرعة الاستماع تزداد بنقصان الطول

الموجي



س/ لماذا نلج بلانك

لانه بلانك لم يعتبر الاشعاع مجرد موجات
ولكن اعتبر انه الاشعاع مؤلف من جسيمات تسمى فوتونات.

وإحصائياً
من عدد الفوتونات ذات التردد الكبير يكون
قليلاً وبالتالى طاقه شدة الاشعاع ليست
الاشعاع متناهي مع عدد الفوتونات

عدد الفوتونات $\propto$ عندة الاشعاع
طردية

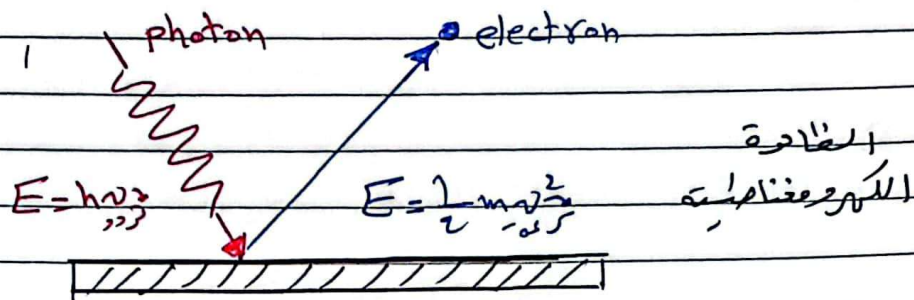
ولهذا
من استطاع بلانك ان يوضح لنا تفسير ظاهرة
الخطية لانه
اعتبر ان الضوء يتكون من جسيمات (كمات)
يحملها مفهوم الفوتون

ملاحظة مهمة :-

- ① شدة الاشعاع مرتبطة بعدد الفوتونات وليس
بتردد الاشعاع
- ② انه سبب فشل النظرية الكلاسيكية انها
اعتبرت :-
انه شدة الاشعاع مرتبطة بطاقته (اي بالتردد)

• الظاهرة الكهروضوئية

هي ظاهرة انبعاث الإلكترونات من سطح فلز نتيجة إضاءته بإشعاع كهرومغناطيسي ذي تردد موثّر.



ملاحظات لنواحي انبعاث الإلكترونات

1- إن الإلكترون لا ينبعث عندما تردد الفوتون أقل من تردد العتبة.

2- عندما يكون تردد الفوتون أكبر من تردد العتبة $(\nu > \nu_0)$ فإن كل فوتون يبعث الإلكترون بطاقة حركية تساوي

$$K.E = h(\nu - \nu_0)$$

h ثابت بلانك

ν تردد الفوتون و ν_0 تردد العتبة

3- تنبعث بعض الإلكترونات من سطح خلال 10^{-8} ثانية بعد سقوط الإشعاع.

تبعاً للنظرية الكلاسيكية

الإلكترون يمتص الطاقة تدريجياً حتى يكتسب طاقة كافية ليهرب من المعدن. ولكن الإلكترون يحتاج طاقة إضافية (تعتمد على نوع المعدن) للهروب من المعدن، ونتيجة لذلك سيكون من المستبعد أنه عندما يمتص الإلكترون هذه الطاقة سوف يتجاوز المعدن بطاقة

حركية مقدارها صفر - وتكون طاقة الشغل بأنها مقدار الطاقة التي يمتصها الإلكترون ليصل إلى سطح المعدن بطاقة حركية وهو $h\nu$ **سواء واجب**
لذا مقدار الإلكترون المعدن بطاقة حركية مقدارها صفر

وبذلك

لأنكم تغير خواص الظاهرة الكهروضوئية للامواج
الآتية :-

1 - ليس بالإمكان التنبؤ بوجود التردد المخرج $h\nu$ جميعاً إذا كان تردد الشعاع الساقط على سطح الفلز أعلى منه $h\nu$ فأن الانبعاث الإلكتروني سيحدث.

2 - أم النظرية الكلاسيكية تتنبأ أنه الإلكترونات تخاطر بطاقة حركية مقدارها صفر لكل الترددات الممتصة الساقطة.

3 - تتنبأ النظرية الكلاسيكية أنه الزمن اللازم لامتصاص الإلكترون طاقة مقدارها $h\nu$ لها لدالة الشغل ϕ الكبير من 10 eV.

نتائج للنظرية الكمية

في عام 1905 وكتيم لزمعة بلانك

اقترح أينشتاين العدة إلى النظرية الجمعية للصوت عام الصوت ليس لها صفة مترافعة الاضواء ، لكنه سيكون صر إذا ذهبه الدقائق.

(أي أنه فعلاً صر صر تردد لا يتكونه صر ترددات كل منها طاقته $h\nu$).

وبين أنه إدخال فكرة الفوتون يكمل أنه تغير الخصائص غير المترافعة مع التأثير الكهروضوئي.

وأن انبعاث الإلكترون يحدث نتيجة اصطدام

الإلكترون بالفوتون وامتصاصه لطاقته.

أهم حيزه لطاقة تتمثل في عملتين :-
 ١- الطاقة المطلوبة لإزالة الإلكترون من المعدن
 وهي دالة العمل W_0 .

٢- طاقة الإلكترون الحركية $\frac{1}{2} m v^2$

$$\text{أو } E = h\nu = W_0 + \frac{1}{2} m v^2$$

وهذا يعني :-
 ١- الإلكترون يجب أن إذا كانت :-
 دالة العمل $\rightarrow$ الطاقة التي امتصها
 مع الفوتون
 وهذا يحصل عندما
 $\nu > \nu_0$

٢- الإلكترون يجب أن بطاقة حركية مقدارها

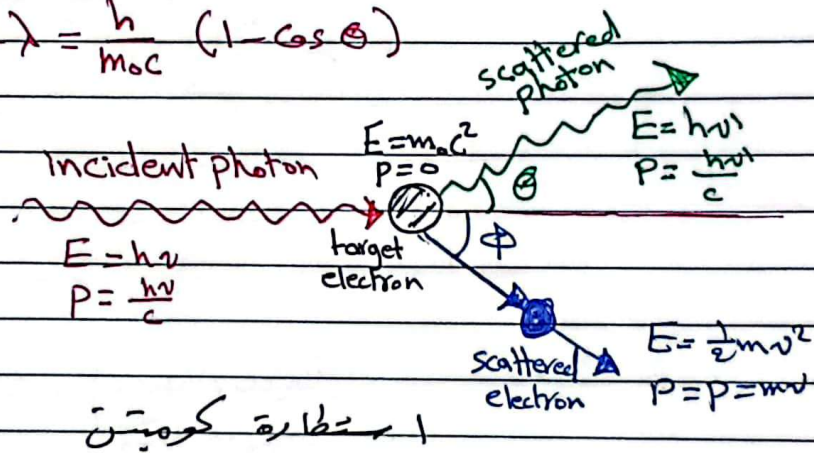
$$K.E = h\nu - W_0 = h(\nu - \nu_0)$$

٣- كما لا يوجد تأخير في الزمن بين سقوط الإشعاع
 وإنبعاث الإلكترون لأن بعض الإلكترونات تتأثر بالفوتونات
 فالتأثير تأخر الإشعاع لا يقطر.

• تأثير كومبتن

وجد كومبتن عام ١٩٢٣ ، أثناء دراسته
الاشعة المستطارة مع قبل ذرات الكربون عندما أُرسلت
مجموعة من الاشعة لشيء الاحادية الموجهة عليها ، ثم
الكمية المستطارة تحتوي على ذرويتين احدهما نفس طول
وجه الاستماع الساطع والاخرى المحول منها بقليل بغير $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta)$$



استطارة كومبتن

نتيجة للنظرية الكلاسيكية

تقول النظرية الكلاسيكية ان
الاشعة الكهرومغناطيسية المستطارة من الجسيمات المشحونة لها نفس
الطول الموجي للاشعة الساطعة وفي جميع الاتجاهات .
في الحقيقة فشلت النظرية الكلاسيكية في تفسير
الملاحظة أعلاه

نتيجة للنظرية الكمية

ان عملية الاستطارة يمكن معاملة ك تصادم مرئي بين
فوتون والكترون حر . يمكن وتنتج لقانوني حفظ الطاقة وحفظ
الزخم . (وهو ما افترضه كومبتن) .

- أم الفوتونات تتلوه لون كجيات ، أم الفوتون ذو طاقة مكمية قيمتها $h\nu$
- تستطيع الفوتونات أم تتفاعل مع المادة دون أم نقص .

- مع صبه الكافز الكتلة والطاقة ($E=mc^2$)
- أم طاقة الفوتون تعادل كتلة مقدارها $(h\nu/c^2)$
- بما أم الفوتون يتحرك بسرعة الضوء طانه زخمه يكون به

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

س/ واجب

$$p = \frac{h}{\lambda} \text{ أثبت أم}$$

- تكون طاقة الإلكترون الهدف الكونية مقدار $E = m_0 c^2$

- بعد المضاحم
- سظهار الفوتون بزاوية مقدارها θ مع اتجاه الفوتون الساقط

$$E = h\nu \quad \text{نصيح طاقة}$$

$$p = h\nu/c \quad \text{زخمه}$$

- يرتد الإلكترون باتجاه يصنع زاوية ϕ مع اتجاه الفوتون الساقط

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{نصيح طاقة}$$

$$p = p = m v \quad \text{زخمه}$$

كنتيجة

- أم التغير في طول الموجه لا يعتمد على طول الموجه للفوتون الساقط ، بل على زوايا استقارة الفوتون فقط .

• وانه لكل انتقال إلكترون هناك انبعاش للفوتون المنفرد

• استقرارية الذرة

فنل الميكانيك الكلاسيكي في تفسير استقرارية الذرة وفي الوقت الذي نجح فيه الميكانيك الكمي في تفسيرها.

تبعاً للميكانيك الكلاسيكي

ان الإلكترون في الذرة يدور

حول النواة مغزلاً اتجاه حركته باستمرار ولذلك فهو جسم معجل . وطبقاً للنظرية الكهرومغناطيسية الكلاسيكية :-
 ((ان اي شحنة كهربائية متحركة بتعجيل تبعث اشعاعاً كهرومغناطيسياً))
 ولذلك يجب ان يفقد الإلكترون الدائر حول النواة داخل الذرة جزءاً من طاقته أثناء الدوران .

ولهذا الحضي :-

ان الإلكترون يخسر طاقة بصورة مستمرة ما دامت الحركة مستمرة وبالتالي فبجهد ان ينتهي بحركة هارضية مستقرية في النواة .



ملاحظة :-

ان الذرة تحت الظروف الطبيعية تقبل تركيباً مستقراً لا يبعث اي اشعاع .

تبعاً للميكانيك الكمي

اقترح بور فرضياته مستخدماً ذرة الهيدروجين التي يعتبر ابط الذرات في تركيبها حيث تتكون من (1) بروتون و (1) إلكترون حول الإلكترون والفرضيات هي :-

• توليد طول موجية الاسعة السينية لصفر

من المعروف ان الالكترونات ذات الطاقة العالية
في الأنبوب الاسعة السينية تستطيع
[ان تولد فوتونات اسعة

سينية بطاقة عظمى محددة]
وهي ظاهرة لا يمكن تفسيرها الا

على اساس

[ان الاشعاع الكهرومغناطيسي يتصرف كجسيمات
عند تفاعله مع المادة

$$h\nu_{\max} = eV$$

$$\nu_{\max} = \frac{eV}{h} \quad \text{--- (1)}$$

$$\because \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \nu_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} \quad \text{--- (2)}$$

هذه تساوي المعادلة (1) و (2) ينتج

$$\frac{eV}{h} = \frac{c}{\lambda_{\min}}$$

$$\therefore \lambda_{\min} = \frac{c}{\frac{eV}{h}} = \frac{ch}{eV}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Coul}$$

$$\therefore \lambda = \frac{12376}{V} \text{ \AA}$$

V فرق الجهد

• توليد الزوج (الالكترون - بوزيترون)

تعتبر ظاهرة توليد الزوج (e⁻, e⁺) دمج آخر
للمفردية الكلية للإشعاع

* يتولد الزوج عندما تزيد طاقة الإشعاع السينية
على ضعف طاقة الالكترون والبوزيترون المكونة
أي

$$E_{\gamma} > 2m_0c^2$$

الطاقة المكونة

$$h\nu \gg 2m_0c^2$$

أي أن :-

* أما أقل طاقة فوتون للإشعاع السينية لتوليد
زوج e⁻ e⁺

$$\begin{aligned} E_{\gamma} &\approx 2m_0c^2 \\ &\approx 1.02 \text{ MeV} \end{aligned}$$

* تعتمد الظاهرة العكسية لتكوين الزوج فناء الزوج
حيث يتم بتكوين فوتونين طاقة كل منهما $h\nu$

$$2h\nu \rightarrow \text{فناء الزوج } e^- e^+$$

١-٤ ازدواجية الجسيم والموجة للإشعاع الكهرومغناطيسي

أهم الإشعاع الكهرومغناطيسي مكون من جسيمات (دقائق الحركات) تتحرك بالترددات مع جانب آخر.

أهم النتائج الخاصة بالداخل والخارج لا يمكن تفسيرها إلا بافتراض الصفة الموجبة للإشعاع الكهرومغناطيسي.

أخذنا كيف يمكن للذين الرأيين المتناقضين ظاهرياً أن يكونا مترافقين

* أهم تجارب الدداخل والخارج تحتاج إلى التفسير الموجي وهي تجارب تتحرك فيها كيف ولين يسير الضوء.

* بينما تجارب الظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتون وتوليد الأشعة السينية لا يمكن تفسيرها إلا بتوليد الزوج تحتاج إلى التفسير الجسيم حيث يتفاعل الإشعاع الكهرومغناطيسي مع المادة.

لذلك نفترض أن الإشعاع الكهرومغناطيسي يمكن أن يكون إما من فوتونات (كمات) لا تسير بخطوط مستقيمة وهو افتراض مختلف عن نظرية نيوتن للدقائق.

* من ناحية أخرى نتعامل مع الفوتونات كقطعة على نقطة مع خلال محرز الحيود

بناءً على هذا التفسير يمكن اعتبار لترجات الضوء بعبارة عن لترجات تردد (guide) الفوتونات بحيث أن شدة الموجة في أي نقطة تتناسب مع احتمال وجود فوتون في تلك النقطة

أهم هذا الوصف يختلف عن الوصف الكلاسيكي

٢٠ النظرية الكلاسيكية

تقدم وصفاً بسيطاً (Gaussian) من حيث انزياحها من مساراً معيناً وعلى درجة كبيرة من الدقة لحركة الجسيم في مجال القوة

٢١ اما الوصف اعلاه

ما هو الا وصف احتمال للحصول على لغزوتون في محل ما ويعطي فقط احتمالية وجوده في ذلك المحل أو النقطة

وعند التعامل مع عدد كبير من لغزوتونات فانها تكون
من الخصائص
الميكانيكية الكمية

وهذا يعني في
سلسلة ان النظرية تغطي الاحتمالية فقط
بالنسبة لجسيم واحد.

ملاحظات مهمة جداً

- ① عندما $\hbar = 0$ معناها نحن في الميكانيكا الكلاسيكية
- ② اسم السلوك الجسيمي يسود خلاله التفاعل مع المادة.
- ③ اسم السلوك الموجي يسود أثناء انتشار الشعاع
- ④ اسم الموجة الكهرومغناطيسية تنتمي إلى أحد هذين السلوكين فنحن في رأي تجربة ولا تنتمي السلوكين معاً
طيفر الظاهرة

١ - المظهر الموجي للجسيمات المادية

* في عام ١٩٢٤

اقترح لويس دي بروي :-

ان الخاصية

الازدواجية لا تكون محصورة بالاشعة الكهرومغناطيسية بل تشمل الالكترونات وباقي الجسيمات الاخرى كالذرات والجزيئات.

وهذا يمكن تطبيق المعادلة

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

على الفوتونات وعلى الجسيمات الاخرى

*

فاذا كان جسيم ذا كتلة m يتحرك بسرعة v فان طول المرحية المرافقة لحركة الجسيم (والفوتون) بمرحلة دي بروي) يعبر عنها بالصيغة

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

لحساب طول موجية ذرة بوريوم للألكترون بسير بسرعة
 $1.5 \times 10^6 \text{ m/s}$ في تم قارننا مع جسم آخر يسير بسرعة
 (10 m/s) وكتلته (سواء) ؟
 على ان كتلة الإلكترون $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

للإلكترون

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$mv = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$$

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 1.5 \times 10^6}$$

$$\lambda = 3.6 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$= 3.6 \text{ \AA}$$

للبجسم

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{6.6 \times 10^{-34}}{1 \times 10^{-3} \times 10}$$

$$= 6.6 \times 10^{-32} \text{ m}$$

$$= 6.6 \times 10^{-32} \text{ \AA}$$

هـ الجسيمات التي كتلتها كبيرة لا تظهر صفتها الموجية

لذلك هـ
 ان الإلكترونات صفتها الموجية تكون واضحة

ملاحظة مهمة جداً

~~~~~

① عندما  $\neq$  معناه نحن في الجسيمات  
 الكلاسيكية

٢) ابر المجسيمات الكبيرة في كتلتها وذات سرعة صغيرة، لا تظهر صفتها الموجبة لصيرة موجزة

٣) بينما تظهر الصفة الموجبة بوضوح في الاجسام صغيرة الكتلة وذات سرعة كبيرة كالالكترونات

٤) محاولة دي بروي هو التي تجميع فكرة الجسيم والموجة

٥) افترض انه ما يكون للموجة معرفتها ما يكون للموجزات

ذلك انه الاحتمالية للجمعية الماوية تكون في اي نقطة تتناسب مع مربع الـ (العدة) في تلك النقطة للموجة التي تلك تردد وطول موجة

٦) كذلك مدار الالكترون على ذرة الهيدروجين وطبقاً لنظرية دي بروي يمكن ان يعرف بـ (المدار المفلق يجب ان يكون مساوي لعدد صحيح مضروب في  $\lambda$ )

$$2\pi r = n\lambda$$

$$= n \cdot \frac{h}{p} = n \cdot \frac{h}{mv}$$

التحقق  
uuuu

$$\therefore r = \frac{n}{2\pi} \cdot \frac{h}{mv} \quad ] \times mv$$

$$mvr = \frac{n}{2\pi} \cdot \frac{h}{mv} \cdot mv$$

$$L = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad \text{الزخم الزاوي}$$

$$L = n\hbar$$

فالتدوير البالي ←



## ٦-١ هيدرو وندراغل الالكترونات

\* فمار عام ١٩٢٧

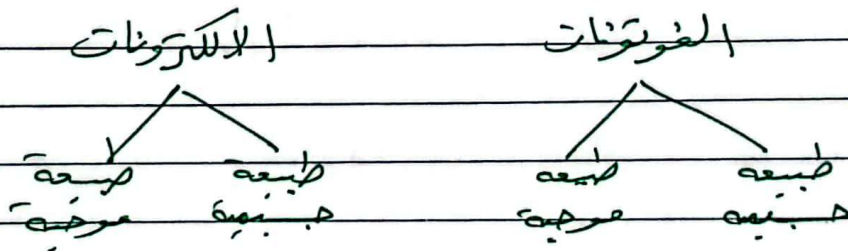
المحاضرات عن تجربتين

- ١- تجربة دافنبروك كيرمر
- ٢- تجربة تومسون وفريش

وفاقتن التجربتين تكملان التأثير الكهروضوئي ، لانه  
بينما تفسر حقيقة التأثير الكهروضوئي على الطبيعة الموجية للضوء ،  
تفسر هذه التجارب اعتمادا على الطبيعة الموجية للجسيمات  
(الالكترونات)

وهذا جعل

من الواضح انه نفس الازدواجية المزدوجة  
التي تربط المرتبطة بالفوتونات موجودة للجسيمات المادية



## ١-٧ مبدأ التقابل

هذا المبدأ اقترحه العالم بور وينص على أن:

(حركة منظومة كما توصف بواسطة الميكانيك الكلاسيكية تتفق مع حركتها التي توصف بواسطة الميكانيك الكلاسيكية في الغالبية التي فيها يمكن إهمال ثابت بلانك  $h$ ).

إذا كانت المنظومة كبيرة بما فيه الكفاية ولم تكن ناهية لدرجة القياس كبيرة، فإن الميكانيك الكلاسيكية يزودنا لتقريب جيد لحركة المنظومة.  
هذا المبدأ سيساعد أيضاً بالخاطبة الكلاسيكية للميكانيك الكمي.

أمثلة للتحقق من صحة هذا المبدأ

- \* حركة المتذبذب التوافقي
- \* الجسم الحر في صندوق الجهد



١- مبدأ اللادقة لهاينزبرك

لا يمكن قياس زوج كل آتني ودقتي كلاً منهما  
عوضاً عن الجسم (X) وزخمه (P) لجسم متحرك .

إن عدم الدقة في قياس عزم الزخم في  
الزخم يكون أكبر أو مساوياً لـ  $\frac{h}{4\pi}$ .

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{h}{4\pi}$$

كذلك

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

ويتضح أنه الدقة في تحديد زخم جسيم يحدث  
على حساب تحديد طاقة الجسيم

كذلك

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

ويتضح أنه الدقة في تحديد الزخم الزاوي للجسيم تكون  
على حساب تحديد الطاقة في عزم الزاوي .

الميكانيك الكمي  
الفصل الثاني / المبادئ الأساسية للميكانيك الكمي

- 1-2 مقدمة
- 2-1-1 الموجات الواقفة
- 2-2 دالة الموجة وتفسيرها
- دالة الموجة
- كثافة الاحتمالية
- 3-2 العيارية
- 4-2 التمثيل الرياضي لدالة الموجة
- 5-2 اشتقاق معادلة شرودنجر
- 2-5-1 معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن
- 2-5-2 معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن
- 6-2 شروط دالة الموجة
- 7-2 حل معادلة شرودنجر
- 8-2 المؤثرات
- 9-2 خواص المؤثرات
- 2-9-1 المؤثرات الخطية
- 2-9-2 المؤثرات السيارية
- 10-2 المؤثر الهيرميتي
- 11-2 التمام
- 12-2 القيم الذاتية والدوال الذاتية
- 13-2 القيم المتوقعة
- 14-2 التباين
- 15-2 الدوال الذاتية ولوازم الحركة
- 16-2 نظرية إيرنشت
- 17-2 حفظ الاحتمالية
- 18-2 صيغ الاحتمالية
- 19-2 التحلل مستويات الطاقة
- 20-2 مبدأ التراكب الخطي

يتبع



- 2- 21 حالات الملكية  
2- 22 التماس  
2- 23 رسوم ديوان  
2- 24 تمثيل هاتيز نيك

## 2-1 مقدمة Introduction

في الفصل السابق تم تناول ان الميكانيك الكلاسيكي فشل في وصف مسار الجسيم الذري وذلك بسبب عدم الدقة في تحديد موقعه

إذن :- كيف يمكن وصف حركة الجسيم الذري ؟

180

بالاتحاد على ① فرضية دي بروي  
② تفسير أينشتاين للظاهرة الكهروضوئية

يمكن القول :- ان كل جسيم متحرك يرافقه مجال مادي

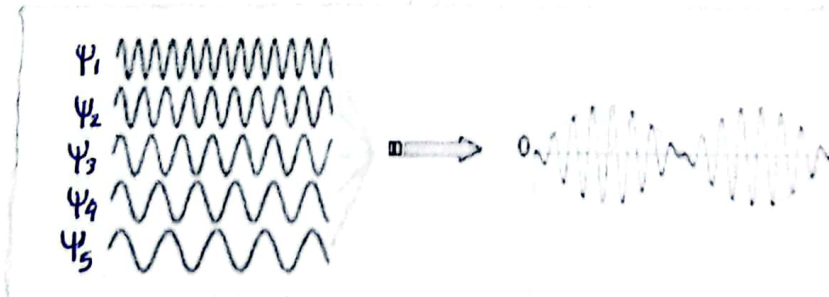
مثال

ان الالكترون في الذرة لا يتحرك بعيداً ولا يقترب الى مسافة قصيرة جداً من النواة، وهذا يعني :-

ان الالكترون متحدد في منطقة من فضاء الذرة البعداها تقدر بحدود  $10^{-14}$  م ، لذلك فان المجال المادي المصاحب له يمكن ان يعتبر منه بدلالة موجبة واقفة standing waves

## 2-1-1 الموجات الواقفة

من خلال دراسة سرعة المجموعة ، ان الموجة المرافقة للجسيم ليست جيبية بل تراكب عدة موجات جيبية متقاربة التردد لتعطي دالة مركبة



ويمكن كتابته ذلك بالشكل الآتي :-

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5 + \dots + \psi_n$$



٥٥ يمكن تعريف الموجة الواقفة

هي الموجة البعيدة في منطقة محدودة  
 كالموجة المتولدة في سلك مربوط الطرفين متمركز بهذه المنطقة بسعة  
 صغيرة من منطقة إلى الأخرى وتكون السعة = صفر خارج هذه المنطقة.

ملاحظة مهمة : .

ان سعة هذا المجال المادي تعرف بـ (دالة الموجة)

wave function ويرمز لها بالرمز  $\psi$

## ٢-٢ دالة الموجة وتفسيرها

## The wave function and its interpretation

تعتبر معادلة الموجة في الميكانيكا الكمية أساساً للموجات، وقد صوّرت هذه المعادلة في العام 1925 من قبل العالم شرودنجر وأستاذاً لها مهنياً دي - بروي :-

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

وكما بينا سابقاً، هذه العلاقة صحيحة لكل الفوتونات والجسيمات، فإذا كان الضوء يملك في بعض الأحيان كمية واهياناً (أطرت كجسيم)، كذلك فإن الجسيمات المادية يجب أن تتصرف بطريقة مماثلة (أي يجب أن تراففها خاصية موجية).

ملاحظة مهمة

❗ لوصف الحركة الموجية، فإن شدة الموجة تتعين بمربع سعة الموجة

❗ الوصف الجسيمي، فإن الشدة تتعين بعدد الفوتونات التي تمر خلال وحدة المساحة في وحدة الزمن

☺

## دالة الموجة :-

هي سعة المجال المادي المصاحب لجسيم متحرك ويرمز لها بالرمز  $\psi$ ، وتعتبر الاداة التي التي تحدد المستقرات الدنناميكية لأنس هيسم ذري.

لتصور عامة دالة الموجة تكون :-

- ١- دالة معقدة Complex Function
- ٢- دالة لكل من الموقع  $(x, y, z)$  والزمن  $(t)$  أو للموقع فقط
- ٣- تكتب بالصورة  $\psi(\vec{r}, t)$  أو  $\psi(\vec{r})$
- ٤- تحتوي وصف كامل لتصرف الجسم الذري



0

لو افترضنا جسماً كتلة  $m$  يسير باتجاه محور  $x$  تحت تأثير قوة  $F(x, t)$  فإن الميكانيك التقليدي يعبر عنها بواسطة

$$F = ma \quad \text{قانون نيوتن الثاني}$$

$$E = T + V \quad \text{طاقة الجسم تكون}$$

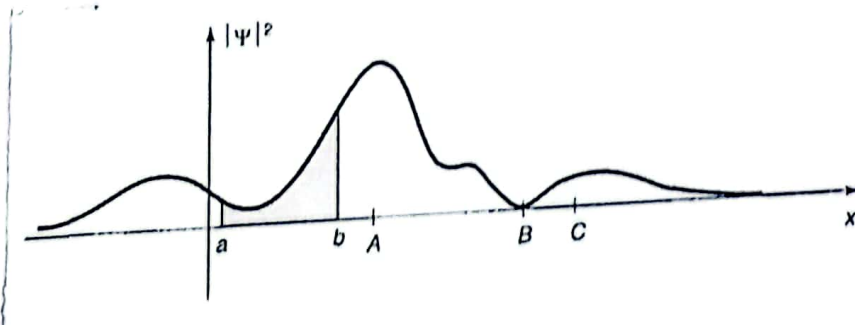
أما في الميكانيك الكمي لنفس المسألة فإنه يعبر عنها بصورة مختلفة تماماً، حيث يعبر عنها بدلالة

دالة الموجة  $\psi(x, t)$  وهي كوي معلومات عن الحالة المكانية للجسيم عند الزمن  $t$ .

أن مربع القيمة المطلقة لدالة الموجة  $|\psi(x, t)|^2$  هو احتمالية تواجد الجسيم في نقطة  $x$  في زمن  $t$  كما يلي

$$\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{احتمالية إيجاد الجسيم بين النقطتين} \\ a \text{ و } b \text{ عند الزمن } t \end{array} \right\} \quad \text{--- (1)}$$

فإن الاحتمالية هي مساحة تحت المنحنى  $|\psi|^2$ .



من الشكل :-

١- أنه من المحتمل جداً إيجاد الجسيم قرب النقطة  $A$  عندما تكون  $|\psi|^2$  كبيرة.

٢- أنه من المستبعد إيجاد الجسيم قرب نقطة  $B$  (لماذا؟)

٣- أن المقدار  $|\psi(x, t)|^2$  هو عبارة عن الكثافة العددية للجسيمات في وحدة الحجم

٤- هذا المقدار هو مركب من مقدار حقيقي وآخر مخد

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t) \psi(x, t) \quad \text{--- (2)}$$

7

حيث  $\psi(x, t)$  الدالة المرافقة للدالة  $\psi(x, t)$

• تأخذ دالة الموجة الصيغة التالية :-

$$\psi(x, t) = A e^{i(k \cdot x - \omega t)} = A e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t\right)}$$

(3)

ملاحظة هامة:  $\psi(x, t)$

\*  $\psi(x, t)$  هي دالة صيغة أي كوي على المقدار  $\sqrt{-1}$

$\psi^*(x, t)$  هو المرافق المعقد

\* لا يمكن قياسها مباشرة ولا يمكن استنتاجها لتمثيل الجسيمات

مباشرة لأنها عدد صيغة وهذا يختلف المألوف لدينا في التجارب ليومية من أن الكميات كموقع الجسم وزخمه وطاقته هي مقادير حقيقية

\* بالتالي طانه دالة الموجة ليس لها معنى فيزيائي مباشر

\* الطريقة الأنسب لمعرفة القيمة الحقيقية هي قياس كثافة الاحتمالية  $|\psi(x, t)|^2$  كما ذكرنا سابقاً.

حول العلاقة  $\psi^*(x) \psi(x) = |\psi(x)|^2$

\* نعرف هذه العلاقة بـ **بُعد الجال المادي**، وتقدم بتحديد افعال وجود الجسم في أي نقطة من الفضاء يمكن للجسم لتواجد بها.

\* تم تفسير هذه العلاقة مع قبل العالم الألماني ماكس بورن

Max Born

• إذا كان الجسم يتحرك على امتداد محور  $x$  فإن الاحتمالية وجود

الجسيم في المنطقة  $x$  و  $x+dx$  هي  $\psi^*(x) \psi(x) dx$

$$\int \psi^*(x) \psi(x) dx = \int |\psi(x)|^2 dx \quad \text{على المحور } x$$

$$= 1$$

• انه قيمة التكامل تساوي (1) وذلك لاننا فرضنا وجود

الجسيم على المحور  $(x)$  حيث **يسير** الى احتمالية وجود الجسم



✓

## - وفي الحالة العامة

يمكن التعبير عن الحركة المرحية للجسيم في الفضاء  
بـ ثلاثة الإحداثيات المتعامدة  $(x, y, z)$  ، ماذا أردنا إحصائية  
تواجد الجسيم عند الحجم  $dV$  فيمكن التعبير عن الاحتمالية بالشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (4)$$

- ماكس بورن بين أن مربع الدالة المرحية يحل معنى فيزيائياً  
رائعاً ألا وهو:

الم شدة مجال المادة تمثل عدد الجسيمات لكل وحدة طول  
عندما نصف دالة الموجة أكثر من جسيم واحد.

أما إذا كانت شدة مجال المادة نصف دالة الموجة  
جسيمياً واحداً فقط، فإنها تمثل كثافة الاحتمالية

كثافة الاحتمالية

Probability density

هو احتمالية إيجاد الجسيم لكل وحدة طول  
عند نقطة  $x$  خلال فترة  $\Delta x$  أي أن:

$$P_d = |\psi(x)|^2$$

وللابعاد الثلاثة

$$P_d = |\psi(x, y, z)|^2$$

لذلك فإن معرفة احتمالية تواجد جسيم في مكان ما مع إقصاء  
حول النواة يمكننا من معرفة احتمالية تواجده في الأماكن المختلفة  
المحيطة بالنواة من خلال العلاقة الآتية:

$$P_v = \int_v |\psi(\vec{r})|^2 d^3r = \int_v \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \quad (5)$$

أو بالصيغة

$$P_v = \int_v |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = \int_v \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) d^3r \quad (5')$$

ملاحظة :-

$$d^3r \text{ هو عنصر الحجم}$$

$$dx dy dz = d^3r$$

## 2 - 3 العيارية Normalization

\* نقرض الاحتمالية تواجد الجسم في زمن  $t$  في عنصر  $d^3r$  المحيط بالنقطة  $(r)$  تعطى بالعلاقة

$$dP(r, t) = C |\psi(r, t)|^2 d^3r \quad \text{--- (6)}$$

$C$  : ثابت العيارية

Normalization constant

\* ان الاحتمالية الكلية لاجداد الجسم في مكان في الفضاء في زمن  $t$  مساوية لـ (1)، ولذلك :-

$$\int dP(r, t) = 1 \quad \text{--- (7)}$$

\* هذه الاحتمالية تأخذ متجهاً حقيقياً دوماً، لذا فان احتمال تواجد الجسم سيكون 100% اي 1

\* من المعادلتين (6) و (7) نستنتج ان :-

$$\frac{1}{C} = \int |\psi(r, t)|^2 d^3r$$

$$= \int \psi^*(r, t) \psi(r, t) d^3r$$

\* عندما  $C = 1$  نستطيع القول ان الدالة الموجية قد أصبحت عيارية، اي انها صارت دالة طبيعية تدل على وجود مخلي للجسيم وليس مجرد احتمال، ولكن هذا الوجود يخضع لمبدأ الارادة



9

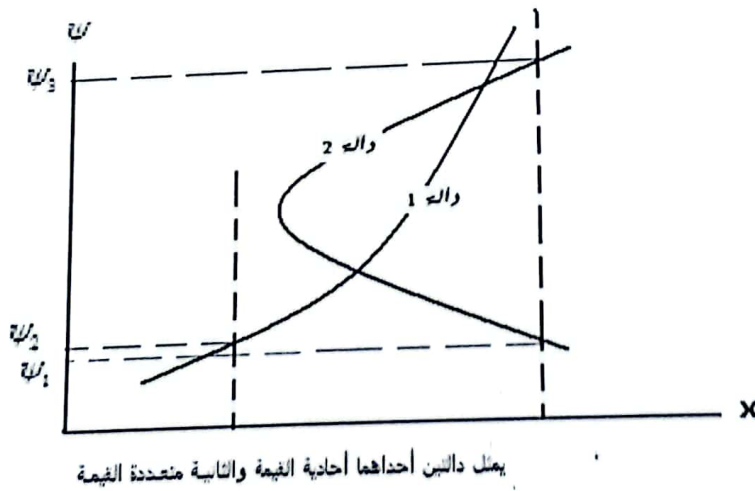
\* انه دالة الموجة التي تحقق الشرط ستسمى  
بالدالة العيارية normalization function

وستسمى العلاقة التي يحققها ناتج التكامل بـ (1) :-  
شرط العيارية normalization condition

\* اذا كانت دالة الموجة  $\psi$  او  $\psi(x,t)$  غير معيرة ، لتضرب  
بثابت المعيرة لتصبح معيرة .

يسمى بالدالة الموجية التي تحقق شرط المعيرة بـ :-

٢/ أن تكون الدالة الموجية أحادية القيمة ، أي أن كل قيمة محددة  
للموضع تقابلها قيمة وحيدة للدالة الموجية فقط وليس أكثر ، وهذا شرط  
أساسي لان الدالة أحادية القيمة تعطي الاحتمال واحد لتواجد الجسيم بين  
المتعددة القيمة تعطي أكثر من احتمال لتواجد الجسيم وهذا مرفوض لانه  
الجسيم لا يمكن ان يتواجد في أكثر من مكان في نفس اللحظة والعكس  
أيضا لا يمكن له دالتان مختلفتان في نفس المكان ،



٣/ أن تكون الدالة الموجية مستمرة (Continuous) وكذلك مشتقاتها  
لان الدالة غير المستمرة لتمتلك انقطاع عند مكان ما ) يجعل الجسيم غير محدد  
في منطقة الانقطاع

٤/ يجب على الدالة ان تكون محدودة finite ولا يجوز ان تكون قيمتها  $\infty$   
لان احتمال تواجده الجسيم يصبح  $\infty$  وهو امر غير مقبول فيزيائيا .

).

مثال / حدد قيمة الثابت  $A$  في الدالة  $\psi = A e^{-kx}$  بحيث تكون الدالة  
عيارية ضمن المنطقة  $(0 \leq x < \infty)$

الحل / يجب توفّر شرط العيارية

$$\int_0^{\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} (A e^{-kx})^* (A e^{-kx}) dx = 1$$

$$A^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{-A^2}{2k} [e^{-2kx}]_0^{\infty}$$

$$= \frac{-A^2}{2k} [0 - 1]$$

$$= \frac{A^2}{2k} = 1$$

$$\therefore A^2 = 2k \rightarrow A = \pm \sqrt{2k}$$



## 2- التمثيل الرياضي لدالة الموجة

Mathematical representation of wave function

يمكن تمثيل دالة الموجة بالصيغة الرياضية التالية :-

$$\psi(x, t) = A e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right)} \quad \text{--- (8)}$$

$$E = h\nu$$

$$E = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2\pi}{\lambda} x &= \frac{2\pi p}{h} x \quad \left[ \times \frac{2\pi}{2\pi} \right] = \frac{p}{\frac{h}{2\pi}} x \\ &= \frac{p}{\hbar} x \end{aligned}$$

$$\therefore \psi(x, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \quad \text{--- (9)}$$

## 2-5 اشتقاق معادلة شرودنجر

## Derivation of Schrödinger wave equation

معادلة شرودنجر في ميكانيك الكم تشبه قانون نيوتن الثاني في (ميكانيك الكلاسيكي) ، لذلك فان هذه المعادلة نصف حالة فيزيائية لنظام مثير.

## 2-5-1 معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن

## Time Dependent Schrödinger equation TDSE

نأخذ دالة الموجة

$$\psi(x,t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(P_x x - Et)}$$

نشتق معادلة (10) بالنسبة لـ  $x$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(P_x x - Et)})$$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = (A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(P_x x - Et)}) \times \frac{i}{\hbar} P_x$$

نضرب طرفي المعادلة بـ  $(-i\hbar)$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) (-i\hbar * \frac{i}{\hbar} P_x)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = P_x \psi(x,t) \quad (11)$$

نشتق المعادلة (11) بالنسبة لـ  $x$  ، نحصل على :-

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = P_x^2 \psi(x,t) \quad (12)$$

نشتق المعادلة (12) بالنسبة لـ  $t$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(P_x x - Et)})$$



13

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left( A_0 e^{\frac{i}{\hbar} (P_x x - E t)} \right) * \frac{i}{\hbar} (-E)$$

نضرب طرفي المعادلة بـ  $(i\hbar)$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \Psi(x,t) (i\hbar * \frac{i}{\hbar} (-E))$$

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = E \Psi(x,t) \right\} \text{----- (13)}$$

مع قانون حفظ الطاقة

$$E = T + V$$

T هي الطاقة الحركية وتساوي

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

هذه قانون حفظ الطاقة يصبح :-

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \text{----- (14)}$$

نضرب طرفي معادلة (13) بـ  $\Psi(x,t)$

$$E \Psi(x,t) = \frac{p_x^2 \Psi(x,t)}{2m} + V \Psi(x,t) \text{----- (15)}$$

مستخرج كل من  $E \Psi(x,t)$  و  $p_x^2 \Psi(x,t)$  من معادلة (15) بالمعادلات (12) و (13) على التوالي نجد :-

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t) \text{----- (16)}$$

وهي معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن لسجل واحد

إما لثلاثة المتغيرات فمن الممكن وصف تصرف الجسيمات وفقاً لـ :-

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r,t) + V(r) \Psi(r,t) \text{----- (17)}$$

حيث  $\nabla^2$  هو مؤثر لابلاس

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

## 2-5-2 معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن Time Independent Schrödinger Equation TISE

لإيجاد معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن يمكن كتابة المعادلة الواقعة على الشكل الآتي :-

$$\Psi(x, t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} (P_x X - E t)}$$

أو  $\Psi(x, t) = \Psi(x) \Phi(t)$    
 دالة مكانية دالة زمنية

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \Phi(t) \quad \text{----- (1)}$$

$$\therefore A e^{\frac{i}{\hbar} (P_x X - E t)} = A e^{\frac{i}{\hbar} (P_x X)} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (-E t)}$$

$$\therefore \Psi(x, t) = \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad \text{----- (2)}$$

معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن (TDSE) :-

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

بإدخال المعادلة (2) في معادلة TDSE :-

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} + V(x) \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

بأخذ الاشتقاق بالنسبة للزمن بالطرف الأيسر

$$i\hbar \left(-\frac{i}{\hbar} E\right) \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} + V(x) \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

بأختصار الحد  $e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$  من الطرفين ينتج :-

$$E \Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) + V(x) \Psi(x) \quad \text{----- (3)}$$

وهذه معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن لحد واحد (TISE)



ولشأنه أن يجد نصيح المعادلة :-

$$E \psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) + V(r) \psi(r) \quad \text{--- (4)}$$

بإعادة الصياغة للمعادلة (4) نصيح :-

$$\nabla^2 \psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi(r) = 0$$

عند  $E$  معادلة TDSE

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = E \psi(r, t)$$

or

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r) = E \psi(r) \quad \text{--- (5)}$$

ببعض معادلة (5) في معادلة (4)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) + V(r) \psi(r)$$

## 2 - 6 شروط دالة الموجة Conditions of Wave Function

اقترح 2 ماكس بورن Max Born سنة 1926 ان مربع القيمة المطلقة لدالة الموجة  $|\psi(x,t)|^2$  يمثل كثافة الاحتمالية للجسيم في حالة معينة في زمن محدد.

مع ذلك :-  
اقترح 2 ايضا اربعة شروط لقبول الدالة الموجية التي تستخدم في حل معادلة شرودنجر وهي :-

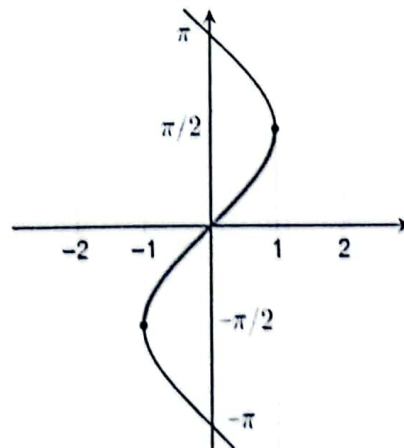
1) ان تكون الدالة الموجية احمادية القيمة single value اي ان الدالة  $\psi(x,t)$  لها قيمة واحدة فقط لكل قيمة من قيم المتغيرات التي تعتمد عليها  $(x,t)$ .  
وهذا يعني :-

ان كل قيمة محددة للموضع لها بها قيمة واحدة للدالة الموجية

س / لماذا توجد قيمة محددة للموضع لها بها قيمة واحدة للدالة الموجية ؟  
وذلك لضمان وجود قيمة واحدة للاهتئالية في النظام للحالة المعطاة

س / ماذا لو كانت الدالة الموجية متعددة القيمة ؟  
في هذه الحالة نعطى اكثر من احتمال لتواجد الجسيم في نفس الحالة ، وهذا امر مرفوض لان الجسيم لا يمكنه ان يتواجد في اكثر من مكان في نفس اللحظة ولا ان يكون له دالتان مختلفتان في نفس المكان كدالة  $(\sin^{-1} x)$  التي تأخذ قيمًا متعددة

$$\sin^{-1} 0 = n\pi \text{ at } x=0 \text{ where } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



الدالة  $(\sin^{-1} x)$  متعددة القيم.



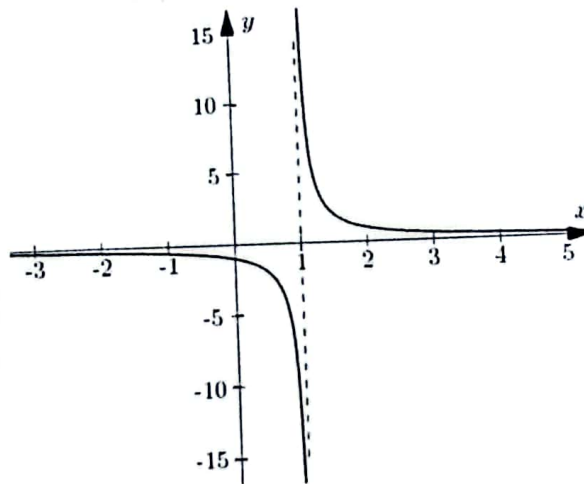
(٢) ان يكون مربع الدالة الموجية قابلاً للتكامل

أي ان يكون تكامل  $|\psi|^2$  على كل الفضاء محدوداً . وهذا يعني  
بجبريته أكثرى إمكانية استخدام  $|\psi|^2$  كثافة الاحتمالية لأن أي  
كثافة احتمال يجب ان تكامل على كل الفضاء لاىطاء قيمة 1

$$\int |\psi|^2 d^3r < \infty$$

(٣) ان تكون الدالة الموجية متصلة (مستمرة) continuous

لان كون الدالة غير متصلة الدالة  $(y = \frac{1}{x-1})$  حيث يصبح  
المخرج غير متصل عند النقطة  $x=1$  .  
ويجب ايضا ان تكون الدالة الموجية قابلة للاشتقاق دوماً



$$y = \frac{1}{x-1} \text{ الدالة غير المتصلة}$$

(٤) - يجب ان تكون جميع المشتقات من الدرجة الاولى للدالة الموجية  
متصلة (مستمرة) .

مثال : اذا كانت لدينا دالتان  $\psi$  و  $\phi$  معرفتان عند الحدود  $0 \leq x < \infty$  بين لماذا لا يمكن ان تكون الدالة  $\psi(x) = x$

دالة مربعة بينما يمكن ان تكون الدالة  $\phi(x) = e^{-x}$  دالة مقبولة ؟

الحل : لكي تكون الدالة مقبولة يجب توفر الشروط الاربعة المذكورة آنفاً أعينها . وهنا نلاحظ ان كلا الدالتين ايجابية القيمة ومستمرة خلال المدة المفروضة وقابلة للاستعاق ، ومستقة كل منهما متصلة ولكن هل ان مربع كل منهما قابل للتكامل ؟

أولاً : تكامل مربع الدالة الاولى :

$$\int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |x|^2 dx = \int_0^{\infty} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\infty} = \frac{\infty}{3} - \frac{0}{3} = \infty$$

مبين ان مربع الدالة  $\psi(x) = x$  غير قابل للتكامل ضمن حدود التكامل المفروضة ( $0 \rightarrow \infty$ ) لذا فهي دالة غير مقبولة

ثانياً : تكامل مربع الدالة الثانية

$$\int_0^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |e^{-x}|^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$

اي ان مربع الدالة  $\phi(x) = e^{-x}$  قابل للتكامل ، لذا فهي دالة مقبولة



## 7-2 حل معادلة شرودنجر Solution of TDSE

نكتب معادلة شرودنجر المعقدة على الزمن TDSE

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r,t) + V(r) \psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} \quad (1)$$

باستخدام فصل المتغيرات

$$\psi(r,t) = \psi(r) \psi(t) \quad (2)$$

حيث  $\psi(r)$  هو دالة للموقع  
 $\psi(t)$  هي دالة للزمن

نخوض معادلة (2) في معادلة (1)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) \psi(t) + V(r) \psi(r) \psi(t) = i\hbar \frac{\partial (\psi(r) \psi(t))}{\partial t}$$

$$\therefore \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(t) \nabla^2 \psi(r) + V(r) \psi(r) \psi(t) = i\hbar \psi(r) \frac{d\psi(t)}{dt}$$

بالتقسيم على  $\psi(r) \psi(t)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \psi(r)}{\psi(r)} + V(r) = i\hbar \frac{1}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (3)$$

نلاحظ من المعادلة

• الطرف الايسر هو دالة للموقع فقط  $(r)$ .

• الطرف الايمن هو دالة للزمن فقط  $(t)$ .

لهذا

فانه اي تغير في الزمن سوف لا يغير الطرف الايسر لانه لا يعتمد عليه،  
وبالتالي لا يغير الطرف الايمن نفسه لانه يجب ان يساوي الطرف الايسر  
لجميع قيم  $(t)$ .

• انه كل طرف يجب ان يبقى ثابتاً لكي تكون المعادلة صحيحة

\* يمكن ان نفرض انه قيمة كل منها تساوي مقداراً ثابتاً هو  $E$ .

$$i\hbar \frac{1}{\psi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt} = E$$

اذن - الطرف الايمن

٢.

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{d\psi(t)}{\psi(t)} = -\frac{i}{\hbar} E dt$$

$$\frac{1}{i\hbar} = -\frac{i}{\hbar} \quad \text{حيث أن}$$

$$\int \frac{d\psi(t)}{\psi(t)} = -\frac{i}{\hbar} E \int dt$$

نجرى التكامل من 0 إلى t

$$\int_0^t \frac{d\psi(t)}{\psi(t)} = -\frac{i}{\hbar} E \int_0^t dt$$

$$\ln \psi(t) \Big|_0^t = -\frac{i}{\hbar} E t \Big|_0^t$$

$$\ln \psi(t) - \ln \psi(0) = -\frac{i}{\hbar} E (t - 0)$$

$$\ln \frac{\psi(t)}{\psi(0)} = -\frac{i}{\hbar} E t$$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(0)} = e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

$$\boxed{\psi(t) = \psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}} \quad \text{--- (4)}$$

$$\therefore \psi(r, t) = \psi(r) \psi(t)$$

$$\therefore \boxed{\psi(r, t) = \psi(r) \left\{ \psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \right\}} \quad \text{--- (4')}$$

$$\text{Let } \psi(0) = 1$$

$$\psi(r, t) = \psi(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

5



٢١

نجد المرافق للمعادلة (5)

$$\psi^*(r, t) = \psi^*(r) e^{\frac{i}{\hbar} E t}$$

----- (6)

نضرب الدالة (5) في مرافقها (6)

$$\psi^*(r, t) \psi(r, t) = \psi^*(r) e^{\frac{i}{\hbar} E t} \psi(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \text{ ----- (7)}$$

بتكامل معادلة (7)

$$\int \psi^*(r, t) \psi(r, t) d\tau = \int \psi^*(r) e^{\frac{i}{\hbar} E t} \psi(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} d\tau$$

$$= 1$$

H.W كيف نتايج التكامل = 1

$$\int \psi^*(r) \psi(r) d\tau = 1$$

ومن هنا نستنتج

أي أن الدالة  $\psi(r)$  يجب أن تكون عيارية أيضاً (1)

(2) كانت احتمالية الحصول على الجسيم في نقطة تتناسب مع

$$\psi^*(r, t) \psi(r, t)$$

وأن الأخيرة ستأوى :-

$$\psi^*(r) \psi(r)$$

وهذا يعني :-

أن الاحتمالية لا تتغير على الزمن

(3) أن الجسيم الذي دالته الموجية (5) يقال عنه في حالة مستقرة

stationary state

## operators

\*  $n$  الكميات التي يمكن عنا سها تجريبياً مثل ١.

الموضع والزخم والطاقة

ستعنى بالكميات الملاحظة أو الظاهرة

(observable) وتمثل هذه الكميات في الميكانيك الكلاسيكي

بالمستغيرات الاعتيادية مثل  $r$  ,  $p$  ,  $T$  .

\* أخاصي الميكانيك الكمي ما لكميات ذاتها تُقَلُّ بمؤثرات

المؤثر :-

هو الكمية التي اذا أُثرت على دالة الموجة حولتها الى

دالة موجية جديدة .

\* يمكن التمييز بين الكمية الملاحظة (ويرمز لها  $A$  مثلاً)

والكمية التي يعبر عنها كمؤثر في ميكانيك الكمي (ويرمز لها

ب  $A_{op}$  أو  $\hat{A}$  وكما موضح في الآتي

① مؤثر الموضع  $\hat{r}$

$$\hat{r} = r$$

$$\text{or } \hat{x} = x , \hat{y} = y , \hat{z} = z$$

② مؤثر الزخم  $\hat{p}$

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla$$

$$\text{or } \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} , \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} , \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

③ مؤثر الزخم الزاوي  $\hat{L}$

$$\hat{L} = -i\hbar \nabla \times r$$



④ مؤثر الطاقة الحركية  $\hat{T}$

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

⑤ مؤثر الجهد  $\hat{V}$

$$\hat{V} = V$$

⑥ مؤثر الطاقة  $\hat{E}$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

⑦ مؤثر الطاقة الكلية (الهاملتونيّة)  $\hat{H}$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \end{aligned}$$

\* نأخذ مثال لكيفية مراقبتها

مثال / الزخم

$$\hat{p} \psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t)$$

تقرأ هكذا :-

إذا أثر المؤثر  $\hat{p}$  على دالة الموجة  $\psi$   
فالناتج هو دالة جديدة تساوي العدد الثابت  
( $-i\hbar$ ) مضروباً في البسطة الجزئية  $\psi$  بالبنية

لـ  $x$ .

مع معادلة شرودنجر TDSE

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, t) + V(r) \psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)\right)}_{\hat{H}} \psi(r, t) = i\hbar \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_E \psi(r, t)$$

المقدار  $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)\right)$  هو المؤثر الهاملتوني  $\hat{H}$  ٥٥  
والذي يتقابل فيه الميكانيك الكلاسيكي المقدار  $(H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V)$

$$\begin{aligned} \text{٥٥} \quad \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(r) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \end{aligned}$$

$$\text{٥٥} \quad \boxed{\hat{H} \psi(r, t) = E \psi(r, t)}$$

## Properties of Operator

للمؤثرات خواص يمكن تصنيفها الى صنفين :-

## ١-٢-٣ المؤثرات الخطية

## Linear Operators

نسمي المؤثر  $\hat{F}$  مؤثراً خطياً اذا حقق الشرطين التاليين :-

$$I / \hat{F} (\psi_1 + \psi_2) = \hat{F} \psi_1 + \hat{F} \psi_2$$

$$II / \hat{F} (c\psi) = c \hat{F} \psi \quad \text{where } c \text{ is constant}$$

\* كمال على المؤثر الخطي هو المؤثر التفاضلي :-

$$\hat{F} = \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (\psi_1(x) + \psi_2(x)) = \frac{d}{dx} \psi_1(x) + \frac{d}{dx} \psi_2(x)$$

وهو حقق الشرط الاول

\* مما يجدر ذكره ليست جميع المؤثرات خطية  
كمال هو مؤثر الجذر التربيعي :-

$$\hat{F} = \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\psi_1 + \psi_2} \neq \sqrt{\psi_1} + \sqrt{\psi_2}$$

\* كما أن المؤثرات الخطية تخضع للعمليات الجبرية (جمع، طرح، ضرب)  
نفرض ان  $\hat{F}$  و  $\hat{G}$  مؤثران على الدالة  $\psi$  فان

$$I / (\hat{F} + \hat{G}) \psi = \hat{F} \psi + \hat{G} \psi$$

$$II / (\hat{F} - \hat{G}) \psi = \hat{F} \psi - \hat{G} \psi$$

$$III / \hat{F} \hat{G} \psi = \hat{F} (\hat{G} \psi)$$

والحالة الأخيرة (الضرب) :- \* ان المؤثر  $\hat{F}$  مؤثر على الدالة  $\psi$  \* ان المؤثر  $\hat{G}$  مؤثر على نتيجة تأثير  $\hat{F}$  على  $\psi$



## Commutator Operator

\* لنفرض ان المؤثرين  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  يؤثران بصورة متتالية على الدالة  $\psi$ . ويسميان متبادلين اذا حققا الشرط التالي :-

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{B}\hat{A}\psi$$

$$\hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi = 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

وتكتب بالصيغة :-

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

\* من الناحية الرياضية :-

عنه هذا يعني انه يمكن ايجاد مجموعة من

الدوال المسماة بالآنية  $\psi_n$  لكل من  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$

يعني :-

انه بالامكان قياس كميتين ملاحظتين آنياً وبدقة

مطلوبة.

\* في حالة لم يكن المؤثران متبادلين أي كانا بالصيغة :-

$$\hat{A}\hat{B}\psi \neq \hat{B}\hat{A}\psi \Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

فان هذا يعني :-

لا يمكن قياس  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  آنياً وبدقة متناهية ،

وحتى ما يتوافق مع مبدأ اللادقة لهايزنبرك

المسألة على المؤثرات  
غير المتبادلة

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \neq 0$$

$$[\frac{d}{dx}, x^2] \neq 0$$

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] \neq 0$$

$$[\hat{V}_x, \hat{p}_x] \neq 0$$

المسألة على المؤثرات  
المتبادلة

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = 0$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$$

$$[\hat{p}_x, \hat{T}] = 0$$

\* هناك بعض القواعد التي لا يمكن استخدامها للمؤثرات المتبادلة وهي:-

$$1 - [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

$$2 - [\hat{A}, \hat{A}] = 0$$

$$3 - [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

$$4 - [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$$

$$5 - [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

$$6 - [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$$

$$7 - [\hat{A}^2, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{A} + \hat{A}[\hat{A}, \hat{C}]$$

$$8 - [\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$$

$$9 - [\hat{A}, b] = 0$$

حيث  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  مؤثرات خطية

$b$  ثابت

أمثلة:

(١) جد ناتج  $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]$  ، ويُن فيما إذا كان المؤثران تبادليين.

الحل:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right] \psi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi - \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \psi - \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \psi = 0$$

∴ المؤثران تبادليان commute .

(٢) جد ناتج  $\left[\frac{d}{dx}, x^2\right]$  ، ويُن فيما إذا كان المؤثران تبادليين.

الحل:

$$\left[\frac{d}{dx}, x^2\right] \psi = \frac{d}{dx} x^2 \psi - x^2 \frac{d}{dx} \psi = \left(2x\psi + x^2 \frac{d\psi}{dx}\right) - x^2 \frac{d\psi}{dx} = 2x\psi$$

$$\therefore \left[\frac{d}{dx}, x^2\right] = 2x \neq 0$$

إذن، المؤثران ليسا تبادليين not commute .

(٣) جد ناتج  $[\hat{x}^n, \hat{p}_x]$  ، ويُن فيما إذا كان المؤثران تبادليين.

الحل:

$$[\hat{x}^n, \hat{p}_x] \psi = x^n \hat{p}_x \psi - \hat{p}_x x^n \psi$$

$$\because \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore [\hat{x}^n, \hat{p}_x] \psi = x^n \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) x^n \psi = -i\hbar \left(x^n \frac{\partial}{\partial x} \psi - \frac{\partial}{\partial x} x^n \psi\right)$$

$$= -i\hbar \left(x^n \frac{\partial}{\partial x} \psi - \left(nx^{n-1} \psi + x^n \frac{\partial}{\partial x} \psi\right)\right) = -i\hbar \left(x^n \frac{\partial}{\partial x} \psi - nx^{n-1} \psi - x^n \frac{\partial}{\partial x} \psi\right)$$

$$= i\hbar nx^{n-1} \psi \Rightarrow [\hat{x}^n, \hat{p}_x] = i\hbar nx^{n-1} \neq 0 \quad (\text{not commute})$$

(٤) برهن أنه لجسيم كتلته  $m$  يتحرك باتجاه محور  $x$

$$[\hat{H}, \hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$$

الحل: الطريقة الأولى، بالاستناد إلى القواعد الرياضية للمؤثر المستبدل التي ذكرناها آنفاً:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \Rightarrow [\hat{H}, \hat{x}] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}, \hat{x}\right]$$

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}, \hat{x}\right] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x}\right] + [\hat{V}, \hat{x}] \quad \dots 1 \quad (\text{حسب القاعدة ٤})$$



ولكن:

$$[\hat{V}, \hat{x}] \Psi = \hat{V} \hat{x} \Psi - \hat{x} \hat{V} \Psi = 0 \Rightarrow [\hat{V}, \hat{x}] = 0 \quad \dots 2$$

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x} \right] = \frac{1}{2m} ([\hat{p}, \hat{x}] \hat{p} + \hat{p} [\hat{p}, \hat{x}]) \quad \dots 3 \quad (\text{حسب القاعدة (v)})$$

$$\because \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore [\hat{p}, \hat{x}] \Psi = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x} x \Psi - x \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) = -i\hbar \left( \left( \Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = -i\hbar \Psi$$

$$\therefore [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar \quad \dots 4$$

Sub. eq.4 in eq.3  $\Rightarrow$

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x} \right] = \frac{1}{2m} (-i\hbar \hat{p} - \hat{p} i\hbar) = \frac{1}{2m} (-2i\hbar \hat{p}) = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p} \quad \dots 5$$

$$\text{Sub. eq. 2 and eq. 5 in eq. 1} \Rightarrow [\hat{H}, \hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}$$

الطريقة الثانية :

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{x}] \Psi &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V} \right) x \Psi - x \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V} \right) \Psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} x \Psi + \hat{V} x \Psi + x \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi - x \hat{V} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} x \Psi + x \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} x \Psi \right) - x \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \Psi \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d}{dx} \left( \Psi + x \frac{d\Psi}{dx} \right) - x \frac{d}{dx} \frac{d\Psi}{dx} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d\Psi}{dx} + x \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d\Psi}{dx} - x \frac{d^2\Psi}{dx^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( 2 \frac{d\Psi}{dx} \right) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dx} \Psi \end{aligned}$$

$$\therefore [\hat{H}, \hat{x}] = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dx} \quad \dots 6$$

$$\because \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$\Leftarrow$   $\frac{i\hbar}{m}$  ، نضرب الطرف الأيمن للمعادلة 6 بالمقدار

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dx} \cdot \frac{i\hbar}{m} = \frac{\hbar^2}{mi\hbar} \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) = \frac{\hbar^2}{mi\hbar} \hat{p}_x = \frac{\hbar}{mi} \hat{p}_x = \frac{-i\hbar}{m} \hat{p}_x$$

$$\therefore [\hat{H}, \hat{x}] = \frac{-i\hbar}{m} \hat{p}_x$$

## Hermitian Operator

نطلق على المؤثر  $\hat{F}$  بالمؤثر الهرميتي الخطي إذا حقق العلاقة الآتية :-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{F} \psi_2 dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{F}^* \psi_1^* dV$$

وهناك خاصيتان تصنف بها المؤثرات الهرميتية وهي :-  
 (١) القيمة المسجوعة لأي مؤثر هي قيمة حقيقية  
 (٢) الحالات المسجوعة للمؤثر الهرميتي هي حالات متعامدة

البيانات الخاصة الأولى

Let  $\hat{F}$  Hermitian operator

$$\hat{F} \psi = f \psi \quad \text{--- (1)}$$

$$\hat{F}^* \psi^* = f^* \psi^* \quad \text{--- (2) Complex Conj. مرافق معقد}$$

نضرب المعادلة (١) من اليسار بالدالة  $\psi^*$   
 نضرب المعادلة (٢) من اليسار بالدالة  $\psi$

$$\psi^* \hat{F} \psi = \psi^* f \psi \quad \text{--- (3)}$$

$$\psi \hat{F}^* \psi^* = \psi f^* \psi^* \quad \text{--- (4)}$$

بتكامل المعادلتين (٣) و (٤)

$$\int \psi^* \hat{F} \psi dV = f \int \psi^* \psi dV$$

$$\int \psi \hat{F}^* \psi^* dV = f^* \int \psi \psi^* dV$$

وبمساوي طرفي المعادلتين الأيسر وحسب تعريف المؤثر الهرميتي

$$\int \psi^* \hat{F} \psi dV = \int \psi \hat{F}^* \psi^* dV$$

١١

وهذا يعني انه طرفي المعادلتين لايمن متساويان

$$\int \psi^* \psi dV = \int \psi \psi^* dV$$

$$\therefore \int \psi^* \psi dV = 1 \quad (\text{شرط العيارية})$$

$$\therefore f = f^*$$

وهذا يدل على انه التيمر المسوغة للمؤثر الهرمعي هو متيم حقيقي.

إثبات الخاصية الثانية

انه شرط التعاضد بين الدوال سيكون :-

$$\int \psi_1^* \psi_2 dV = 0$$

$\therefore$  let

$$\hat{A} \psi_1 = a_1 \psi_1 \quad \text{--- (1)}$$

$$\hat{A} \psi_2 = a_2 \psi_2 \quad \text{--- (2)}$$

نضرب المعادلة (1) بـ  $\psi_2^*$  و

$$\psi_2^* \hat{A} \psi_1 = \psi_2^* a_1 \psi_1 \quad \text{--- (3)}$$

تكامل المعادلة (3)

$$\int \psi_2^* \hat{A} \psi_1 dV = a_1 \int \psi_2^* \psi_1 dV \quad \text{--- (4)}$$

نأخذ المرافق المعقد للمعادلة (2)

$$\hat{A}^* \psi_2^* = a_2^* \psi_2^* \quad \text{--- (5)}$$



٢٢

نضرب طرفي المعادلة (5) بـ  $\psi_1$

$$\psi_1 \hat{A}^* \psi_2^* = \psi_1 a_2^* \psi_2^* \quad \text{--- (6)}$$

ياخذ التكامل للمعادلة (6)

$$\int \psi_1 \hat{A}^* \psi_2^* dV = \int \psi_1 a_2^* \psi_2^* dV$$

$$\int \psi_1 \hat{A}^* \psi_2^* dV = a_2^* \int \psi_1 \psi_2^* dV \quad \text{--- (7)}$$

نطرح معادلة (4) من معادلة (7) ننتج

$$\int \psi_2^* \hat{A} \psi_1 dV - \int \psi_1 \hat{A}^* \psi_2^* dV = a_1 \int \psi_2^* \psi_1 dV - a_2^* \int \psi_1 \psi_2^* dV$$

هذه الصفر = 0  
من تعريف المؤثر الهرميتي

$$\therefore 0 = a_1 \int \psi_2^* \psi_1 dV - a_2^* \int \psi_1 \psi_2^* dV$$

$$0 = (a_1 - a_2^*) \int \psi_2^* \psi_1 dV$$

لا يمكن ان يساوي صفر  
لانها اعداد مختلفة القيمة

$$\therefore \left\{ \int \psi_2^* \psi_1 dV = 0 \right\}$$

وهو شرط لقاعدة

اذ  $n$  اثنيت هنا كخاصية الثانية

مثال: برهن أن  $\hat{p}_x$  هو مؤثر هرميتي.

الحل:

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \hat{p}_x \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \hat{p}_x^* \Psi_1^* dx \quad \text{Hermitian operator condition}$$

$$\because \hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi_2 dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{d}{dx} \Psi_2 dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* d\Psi_2 \quad \dots \dots 1$$

Integration by parts:  $\int u dv = uv - \int v du$

Let  $u = \Psi_1^*$  and  $dv = d\Psi_2 \rightarrow v = \Psi_2$

$$\therefore -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* d\Psi_2 = -i\hbar \left( \Psi_1^* \Psi_2 \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 d\Psi_1^* \right)$$

ولجسيم مقيد (محصور ضمن حيز) فإن الضرب  $\Psi_1^* \Psi_2$  يتجه للصفر عند كل نقطة نهاية لأن الدالة الموجية تقترب من الصفر عند المسافات الطويلة.

$$\therefore -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* d\Psi_2 = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 d\Psi_1^*$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi_2 dx = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 d\Psi_1^* \quad \left] \times \frac{dx}{dx} \right] \Leftrightarrow \text{وبالتعويض من المعادلة 1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi_2 dx = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \frac{d}{dx} \Psi_1^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \left( i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi_1^* dx$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \rightarrow \hat{p}_x^* = \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right)^* = \left( i\hbar \frac{d}{dx} \right)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \hat{p}_x \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \hat{p}_x^* \Psi_1^* dx$$

واجب بيتي: أثبت أن مؤثر الطاقة الحركية الذي يعطى بالعلاقة  $\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right)$  هو مؤثر هرميتي.

## Orthogonality of wave function

\* يمكن وصف حالة النظام الفيزيائي باستخدام دالة الموجة  $\psi$ ،  
والنظام له عدة حالات يمكن وصف كل منها بدالة موجية  $\psi_n$ .  
وهذا يعني:-  
مستقلة  $\psi_n$  تمثل مجموعة كاملة وعناصرها:-

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$$

\* \*  $\psi_1, n$  هي دالة الحالة (1) وهي تحتوي على المعلومات الخاصة  
بالنظام وهو في الحالة (1).

تلك هذه الدالة لا تحتوي معلومات عن النظام وهو في  
الحالة (2) التي يمكن وصفها بالدالة  $\psi_2$ ،

وهذا يعني:-  
مستقلة  $\psi_1, n$  مستقلة تماماً عن  $\psi_2$

\* \* \* يمكن التعبير عن هذه الاستقلالية رياضياً بالصيغة:-

$$\int \psi_n \psi_m dV = 0 \quad n \neq m$$

هذا التكامل يسمى شرط التعامد  
Orthogonality Condition

وهو يعبر عن استقلالية عناصر المجموعة  $\psi$  عن بعضها

~~عندما تكون الدوال متعامدة فهذا يعني أنها دوال مستقلة خطياً،~~  
أي لا تعتمد الواحدة على الأخرى.



لقد بينا ان الدالة اذا حققت الشرط الآتي :-

$$\int \psi^* \psi dV = 1$$

فانه الدالة عيارية وهذا الشرط هو الشرط العياري  
Normalization Condition

عندما تكون الدوال الموجية متعامدة مع بعضها البعض ، وكل منها عيارية ، فيطلق على مثل هذه الدوال بالـ دوال عيارية متعامدة ويحيز عنها بالصيغة الآتية

$$\int \psi_n^* \psi_m dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

والرمز  $\delta_{nm}$  يطلق عليه كرونكر دلتا Kronker delta

- عندما  $n = m$  فإن :-

$$\int \psi_n^* \psi_n dV = 1$$

$$\int \psi_m^* \psi_m dV = 1$$

اي اننا نشير الى نفس الدالة وتحقق شرط العيارية

- عندما  $n \neq m$  فإن :-

$$\int \psi_n^* \psi_m dV = 0$$

$$\int \psi_m^* \psi_n dV = 0$$

اي اننا نشير الى دوال مختلفة وتحقق شرط التقاعد

## 12-2 القيم الذاتية والدوال الذاتية Eigenvalues and Eigenfunctions

\* يوجد نوع من المعادلات الرياضية يسمى معادلات القيمة الذاتية ويتخذ الشكل العام التالي :-

$$\hat{A}f = af$$

حيث ان الدالة الذاتية للمؤثر الخطي هي الدالة  $f$

\* عندما نؤثر ب  $\hat{A}$  على  $f$  فانها تنتج هذه الدالة  $f$  مرة اخرى مضروبة بثابت يسمى القيمة الذاتية  $a$ .

\* عندما تكون الدالة الموجية  $\psi$  هي الدالة الذاتية للمؤثر  $\hat{A}$  <sup>وهو</sup> يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة :-

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$

$\psi_n$  الدالة الذاتية (eigenfunction) للمؤثر  $\hat{A}$

$a_n$  القيمة الذاتية (eigenvalue) للمؤثر  $\hat{A}$

\* يلعب هذا النوع من المعادلات الرياضية دوراً مهماً في ميكانيك الكم

\* التفسير الفيزيائي لمعادلة القيمة الذاتية :-  
الصفة الفيزيائية التي يملكها النظام المرصود بدالة الموجة  $\psi_n$  والمتواجد في الحالة الكمية  $n$ .

وهو نتيجة عملية القياس هي لقيمة الذاتية  $a_n$

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$

Make measurement

on a system  
in state  $n$

result of measurement

\* يمكننا ترميز ذلك بقول

بمفردا يرمز الزخم على النظام الموصوف بالدالة  $\psi$   
والمرجود في الحالة الكمية  $n$  ، نأخذ ليعبر بتماس الزخم للنظام  
في تلك الحالة -

$$\hat{P} \psi_n = P_n \psi_n$$

$$\hat{P}^2 \psi_n = P_n^2 \psi_n$$

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n$$

$$\hat{r} \psi_n = r_n \psi_n$$

إذا تذكرنا المعادلات

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = P \psi$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = P^2 \psi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = E \psi \\ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi = E \psi \end{array} \right.$$

على هذا الأساس يمكن إيجاد الصيغة الرياضية لأي مؤثر  
مقابل لصيغة فيزيائية معينة



أمثلة:

(١) إذا كان المؤثر  $(\hat{A} = \frac{d}{dx})$  فهل إن الدالة  $(\phi(x) = e^{2ix})$  هي دالة ذاتية لهذا المؤثر؟

$$\hat{A}\phi(x) = \frac{d}{dx} e^{2ix} = 2ie^{2ix}$$

الحل:

إذن بعد تطبيق تعريف الدالة الذاتية  $(\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n)$  يتبين أن الدالة  $(\phi(x) = e^{2ix})$  هي دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{A}$ ، والقيمة الذاتية له هي:  $2i$ .

(٢) إذا كانت الدالة  $(f = \cos x)$  دالة ذاتية للمؤثر  $(\hat{J} = \frac{d^2}{dx^2})$  فجد القيمة الذاتية للمؤثر.

$$\hat{J}f = \frac{d^2}{dx^2} \cos x = \frac{d}{dx} (-\sin x) = -\cos x \rightarrow \text{eigenvalue} = -1$$

الحل:

(٣) برهن أن الدالة الذاتية للمؤثر  $(\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2)$  هي  $(F(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2})$ ، ثم جد القيمة الذاتية.

$$\because \hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$

الحل:

$$\begin{aligned} \therefore \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 \right) e^{-\frac{1}{2}x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -xe^{-\frac{1}{2}x^2} \right) - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= -x \left( -xe^{-\frac{1}{2}x^2} \right) + e^{-\frac{1}{2}x^2} (-1) - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} = -F(x) \end{aligned}$$

إذن، القيمة الذاتية = -1

واجب بيتي:١- هل الدالة  $(\psi_k(x) = U_k(x)e^{ikx})$  هي دالة ذاتية لمؤثر الزخم  $(\hat{p} = -i\hbar \partial/\partial x)$ ؟٢- هل الدالة  $(\psi_n(x) = \sin 6x)$  هي دالة ذاتية للمؤثر  $(\hat{F} = -\partial^2/\partial x^2)$ ؟

## 2-13 القيم المتوقعة Expectation Values

\* نتعين حركة الجسم في الميكانيك الكلاسيكي اذا عرف متجه الموضع  $\vec{r}$  كدالة للزمن  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

• واذا كان  $\vec{r} = \vec{r}_1$  في الزمن  $t_1$ ، فان معادلات الحركة تزودنا بموضع ينتجه الموضع  $\vec{r} = \vec{r}_2$  في زمن لاحق  $t_2$ .

\* • في الميكانيك الكمي، ان حركة الجسم تصفها دالة الموجة  $\psi(r, t)$ .  
• لو تعرفنا على ① موضع الجسم ②  $\psi(r, t)$  في الزمن  $t$   
فان معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن ستطيع تزويدنا  
نقطة بدالة موجية تختلف من الصغر لاسيما مع  $\psi$  في زمن لاحق  $t$ .

وحذا يعني :-

الم الجسم يمكن ان يكون في اي مكان، وبالتالي فان معرفتنا بموضع الجسم في زمن معين لا يعني التعرف بدقة على موضعه في زمن لاحق.

\* للتغلب على هذه الصعوبة  
• نفرض انه قد اجريت قياسات كثيرة على اجهزة (٢)  
وحصلنا في كل مرة على قيم عديدة مختلفة

• لما كانت احتمالية تواجد الجسم في عنصر الحجم  $d^3r$  حول النقطة (٢)

$$\psi^*(r, t) \psi(r, t) d^3r \text{ بين } r \text{ و } r+dr$$

$$\text{or} \int |\psi(r, t)|^2 d^3r$$

فان معدل هذه القياسات سوف يعطي قيمة متوسطة  
لـ  $r$  وسنسمي القيمة المتوقعة  $\langle r \rangle$  وسنأري

$$\langle r \rangle = \int \psi^* r \psi d^3r$$

٤.

• حيث  $\langle \psi \rangle$  هي القيمة المتوقعة لمتجه الموضع  $\hat{p}$  للجسيم ،

وهي لا تحتوي :

أنها القيمة التي نتوقعها بعد إمرار قياس واحد فقط (أي القيمة الأكثر احتمالاً) ،

بل هي عبارة :-

عنه معدل عدد كبير وكاف من القياسات المتتالية التي أجريته على  $\psi$  لحسيمات مماثلة لها نفس دالة الموجة  $\psi(x,t)$  عند نفس الفترة الزمنية بحيث تسجل القيم الظاهرة لـ  $\psi$  متى ما وجدنا الجسيم .

أخر هي :-

معدل القياسات المتكررة على مجموعة من الأنظمة المتماثلة وليس معدل القياسات المتكررة على نظام واحد المر الأنظمة محدودة بنفسها .

\* وبالتالي مناه لميكانيك الكمي :-

لا يجوز بنتيجة قياس واحد لموضع الجسيم ، بل بتنبأ بنتيجة دقيقة لمعدل عدد كبير من القياسات .

\* يمكن تخيم هذه العلاقة الر متغيرات فيزيائية أخرى ،

$$\langle A \rangle = \frac{\int \psi^* \hat{A} \psi d^3r}{\int \psi^* \psi d^3r}$$

إذا كانت الدالة حيارية أي  $(\int \psi^* \psi d^3r = 1)$  فانه لقيمة المتوقعة تأخذ الشكل الآتي :-

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3r = \int \hat{A} |\psi|^2 d^3r$$



كأمثلة على أخذ القيمة المتوقعة لبعض المتغيرات

(١) الموضع لعدد واحد

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx = \int x |\psi|^2 dx$$

(٢) الزخم لعدد واحد

$$\langle P_x \rangle = \int \psi^* \hat{P}_x \psi dx$$

$$\therefore \hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore \langle P_x \rangle = \int \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi dx = -i\hbar \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

(٣) الطاقة لعدد واحد

$$\langle E \rangle = \int \psi^* \hat{E} \psi dx$$

$$\therefore \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\therefore \langle E \rangle = \int \psi^* (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) \psi dx = i\hbar \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$$

(٤) الطاقة الحركية لعدد واحد

$$\langle T \rangle = \int \psi^* \hat{T} \psi dx$$

$$\therefore \hat{T} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\therefore \langle T \rangle = \int \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \frac{d^2}{dx^2} \psi dx$$

الطاقة الحركية لثلاثة ابعاد

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

$$\langle T \rangle = \int \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi d^3r = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \nabla^2 \psi d^3r$$

٤٤

مثال: اكتب مؤثر السرعة  $\hat{v}$  وقيمته المتوقعة.

$$P = mv, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \quad \hat{v} = \frac{\hat{p}}{m} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{الحل :}$$

The expectation value would be:

$$\langle v \rangle = \int \Psi^* \left( -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx = -\frac{i\hbar}{m} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

نحسب على أنه مقدار الانحراف بقيمة القياس  
عن القيمة المتوقعة لذلك المؤثر  
أو

هو الجذر التربيعي لموسط مربع الانحراف لقياس  
عن القيمة المتوقعة

$$\Delta A = \left\{ \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \right\}^{\frac{1}{2}}$$

بترتيب الطرفين

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

$$= \int \psi^* (A - \langle A \rangle)^2 \psi dV$$

$$= \int \psi^* (A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2) \psi dV$$

$$= \int \psi^* A^2 \psi dV - \int \psi^* (2A\langle A \rangle) \psi dV + \int \psi^* \langle A \rangle^2 \psi dV$$

$$\therefore (\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2$$

$$= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2$$

$$\therefore \boxed{(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

قانون  
التباين



## ① Position

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad \text{--- --- ①}$$

$$\therefore \langle x^2 \rangle = \int \psi^* x^2 \psi dx$$

$$\langle x \rangle^2 = \left( \int \psi^* x \psi dx \right)^2$$

- ① نجد القيمة المتوقعة لـ  $\langle x \rangle$   
 ②  $\langle x^2 \rangle$   
 ③ نعوّض في المعادلة ①  
 ④ نحذف  $(\Delta x)^2$

## ② Momentum

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \quad \text{--- --- ②}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int \psi^* \hat{p}^2 \psi dx$$

$$\langle p \rangle^2 = \left( \int \psi^* p \psi dx \right)^2$$

- ① نجد القيمة المتوقعة لـ  $\langle x \rangle$   
 ②  $\langle x^2 \rangle$   
 ③ نعوّض في المعادلة ②  
 ④ نحذف  $(\Delta x)^2$

## Eigenfunctions and Constants of Motion

\* إذا كانت الدالة  $\psi$  دالة ذاتية للمشغل  $\hat{A}$  بقيمة ذاتية  $a$  كما في معادلة القيمة الذاتية :-

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

• وكانت القيمة المتوقعة للكمية الظاهرة  $\hat{A}$  هي :-

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3r$$

• وإذا أدخلنا معادلة القيمة الذاتية في معادلة القيمة المتوقعة فسنجد :-

$$\langle A \rangle = \int \psi^* a \psi d^3r = a \int \psi^* \psi d^3r$$

• وبما أن الدالة عيارية أي  $\int \psi^* \psi d^3r = 1$

$$\therefore \langle A \rangle = a$$

\* ماذا يعني هذا ؟

• هذا يعني أنه كل القياسات التي أجريت لقياس المتغير  $A$  تعطي

نفس النتيجة  $a$ .

• يمكن القول أن الكمية  $A$  في هذه الحالة هي ثابتة الحركة

ويمكن أن يترتب ثابتة الحركة Constant of motion :-

هو الكمية الفيزيائية التي لا تتغير

مع الزمن ، أي أنه

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = 0$$

$$\therefore \langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dV$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi^* \hat{A} \psi dV$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \int \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{A} \psi + \psi^* \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dV \quad \text{--- (1)}$$

$$\therefore i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi \rightarrow \frac{d\psi}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}\psi$$

$$\text{--- (2)} \quad \left. \begin{aligned} & -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \hat{H}^* \psi^* \rightarrow \frac{d\psi^*}{dt} = \frac{i}{\hbar} \hat{H}^* \psi^* \end{aligned} \right\}$$

بافتراض معادلة 1 في 2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle &= \int \left( \frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi^* \hat{A} \psi - \psi^* \hat{A} \frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi \right) d^3r \\ &= \frac{i}{\hbar} \int (\hat{H}^* \psi^* \hat{A} \psi - \psi^* \hat{A} \hat{H} \psi) d^3r \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

ومن تطبيق ترتيب المؤثر الهرميتي

$$\int (\hat{H}^* \psi^*) \hat{A} \psi d^3r = \int \psi^* \hat{H} \hat{A} \psi d^3r \quad \text{--- (4)}$$

بافتراض معادلة 4 في 3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int (\psi^* \hat{H} \hat{A} \psi - \psi^* \hat{A} \hat{H} \psi) d^3r \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \psi^* (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) \psi d^3r = \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [\hat{H}, \hat{A}] \psi d^3r \end{aligned}$$

$$\therefore \left\{ \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle \right\}$$

هذه المعادلة هي معادلة الحركة ، و (A) هي ثابتة الحركة وثابتة

المؤثر الظاهر يكون ثابتة حركة اذا كان متبادلاً مع المؤثر الهرميتي  $\hat{H}$



٤٧

مثال: أثبت أن الزخم الخطي  $\hat{p}_x$  لجسيم حر هو ثابت حركة.

الحل: لكي يكون مؤثر الزخم ثابت حركة يجب أن يكون تبادلياً مع المؤثر الهاملتوني، أي يحقق الشرط:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p}_x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}_x] \rangle = 0$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (V = 0 \text{ for a free particle})$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right]$$

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] \Psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi$$

$$= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi$$

$$= \frac{i\hbar^3}{2m} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \Psi - \frac{i\hbar^3}{2m} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \Psi = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \langle \hat{p}_x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}_x] \rangle = 0 \quad \rightarrow \hat{p}_x \text{ is a constant of motion}$$

## ٢- ١٦ نظرية إيرنفست Ehrenfest's Theorem

تهدف هذه النظرية إلى إخراج معادلات ميكانيك الكم إلى شكلها التقليدي (الكلاسيكي) إذا استبدلنا القيم المتوقعة التي تخص مؤثر ما في الميكانيك الكم بما يقابلها في الميكانيك الكلاسيكي.

فمثلاً لدينا الحالتان الكلاسيكيتان الآتيتان اللتان تتسادل  $n$  كان بالإمكان الحصول عليهما مع إعتيم متوقعة في الميكانيك (الكمي) :

$$(1) \quad m \frac{dr}{dt} = p$$

$$(2) \quad \frac{dp}{dt} = -\nabla V \quad (\text{الطاقة الكامنة})$$

الحالات  $n \leftarrow$

١ - العلامة الأولى تمثل الصيغة الكلاسيكية لقانون نيوتن الثاني في الحركة، وفي الميكانيكا الكمية فإنه القيمة المتوقعة للزخم تسمى حاصل ضرب الكتلة بالمعدل الزمني لتغير القيمة المتوقعة للموقع

$$\langle p_x \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

From equation of motion (1):  $\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{x}] \rangle \quad \dots 1$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

$$[\hat{H}, \hat{x}] = \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}(x), \hat{x} \right] = \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{x} \right] + [\hat{V}(x), \hat{x}] \quad \dots 2$$

But  $[\hat{V}(x), \hat{x}] = 0 \quad \dots 3$

$$\left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{x} \right] = \frac{1}{2m} ([\hat{p}_x, \hat{x}] \hat{p}_x + \hat{p}_x [\hat{p}_x, \hat{x}]) \quad \dots 4$$

$$\therefore \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore [\hat{p}_x, \hat{x}] \Psi = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x} x \Psi - x \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) = -i\hbar \left( \left( \Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = -i\hbar \Psi$$

$$\therefore [\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar \quad \dots 5$$

Sub. eq.5 in eq.4  $\Rightarrow$

$$\left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{x} \right] = \frac{1}{2m} (-i\hbar \hat{p}_x - \hat{p}_x i\hbar) = \frac{1}{2m} (-2i\hbar \hat{p}_x) = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x \quad \dots 6$$

Sub. eq. 3 and eq. 6 in eq. 2  $\Rightarrow [\hat{H}, \hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$

$$\therefore \text{eq. 1} \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x \rangle = \frac{\langle p_x \rangle}{m} \Rightarrow \langle p_x \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

وهو المطلوب حيث أنه بهذه المعادلة نحصل على التعريف الكلاسيكي لها  
لأنها تتضمن القيمة المتوقعة.



٥٠

٢ - ما يتناول العلاقة الثانية هي التماثل الكمي هو المبدأ الأخير في  
القيمة المتوقعة للزخم بالنسبة إلى الزمن متساوية و-  
بما أن القيمة المتوقعة للطاقة الكلية وليست واحدة.

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = - \left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{p}_x] \rangle \quad \dots 1$$

From equation of motion

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] = \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}, \hat{p}_x \right] = \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{p}_x \right] + [\hat{V}, \hat{p}_x] \quad \dots 2$$

$$\text{But } \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{p}_x \right] \Psi = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 \hat{p}_x \Psi - \hat{p}_x \hat{p}_x^2 \Psi) = 0 \quad \dots 3$$

$$\text{And } [\hat{V}, \hat{p}_x] \Psi = \hat{V} \hat{p}_x \Psi - \hat{p}_x \hat{V} \Psi$$

$$\therefore \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \therefore [\hat{V}, \hat{p}_x] \Psi &= -i\hbar \left( V \frac{\partial}{\partial x} \Psi - \frac{\partial}{\partial x} V \Psi \right) \\ &= -i\hbar \left( V \frac{\partial \Psi}{\partial x} - V \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial V}{\partial x} \right) = i\hbar \Psi \frac{\partial V}{\partial x} = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \Psi \end{aligned}$$

$$\therefore [\hat{V}, \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \quad \dots 4$$

Sub. eq. 3 and eq. 4 in eq. 2  $\Rightarrow$

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0 + i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \quad \dots 5$$

$$\text{Sub. eq. 5 in eq. 1} \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

هذه المعادلة تماثل أيضاً التفسير التقليدي عند إجراء مقياس  
القيمة المتوقعة

٥١

مثال: أثبت أن  $\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$ . وما هو المعنى الفيزيائي للنتيجة؟

الحل: من معادلة '  $ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$  T.D.S.E.

بدلالة المؤثرات :  $\hat{E} = ih \frac{\partial}{\partial t}$  ,  $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$  ,  $\hat{V} = V$

$\therefore$  T.D.S.E.  $\rightarrow \hat{E}\Psi = \hat{T}\Psi + \hat{V}\Psi$  ] \*  $\Psi^*$  from left

$$\int \Psi^* \hat{E}\Psi d^3r = \int \Psi^* \hat{T}\Psi d^3r + \int \Psi^* \hat{V}\Psi d^3r$$

$\therefore \langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$  (from expectation value ( )

ويلاحظ أن هذه النتيجة تقابل نتيجة الميكانيك التقليدي  $E = T + V$  ، ولكن نتيجة الميكانيك الكمي توصف بدلالة القيم المتوقعة.

## Conservation of Probability

\* بينا سابقاً ان الاحتمالية الكلية لجسيم بدالة موجية  $\Psi(r,t)$  محفوظة ضمن حيز عدد = 1 . أي :-

$$P = \int \Psi^*(r,t) \Psi(r,t) d^3r = 1$$

تكون هذه الاحتمالية صحيحة لكل قيم  $t$  ، أي تكون الاحتمالية محفوظة

\* لا بد ان الاحتمالية يجب ان لا تتغير مع الزمن  
يجب أن تكون مستقلة  $P$  بالزمن (  $\frac{dP}{dt}$  ) يجب ان يكون صفر

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int \Psi^* \Psi d^3r$$

$$\frac{dP}{dt} = \int \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) d^3r$$

$$\therefore \hat{H} \Psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r,t)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Psi$$

ياخذ المرافق المعقد

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \Psi)^*$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{i}{\hbar} \int \left( (\hat{H} \Psi)^* \Psi - \Psi^* (\hat{H} \Psi) \right) d^3r$$

حيث  $\hat{H}$  هو المؤثر الهرميتي

$$\therefore \int (\hat{H} \Psi)^* \Psi d^3r = \int \Psi^* (\hat{H} \Psi) d^3r$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = 0$$

وهذه النتيجة تؤكد ان الصفة الهرميتية لها تسوجب بقاء الاحتمالية الكلية ثابتة مع الزمن وان لا يتغير في دالة الموجة  $\Psi$  بتماس مع حفظ الاحتمالية



## Probability Current

\* مع معادلات ماكسويل من الكهروديناميكية تنتج معادلة لاستمرارية continuity equation وتأخذ في الحسبان الشكل التالي :-

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

ولذا نأخذ المعادلة للجهد واحد :-

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

$\rho(x, t)$  : هي كثافة الشحنة عند موقع  $x$  والزمن  $t$   
 $J(x, t)$  : هي كثافة التيار عند موقع  $x$  والزمن  $t$

\* كما مر سابقاً فإن كثافة الاحتمالية في ميكانيك الكم  $\psi^* \psi = |\psi|^2$  وسنرمز لها بالرمز  $\rho$  كما يرمز لكثافة الشحنة في الكهروديناميكية

\* حساب  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

ووفقاً لمعادلة شرودنجر لجهد واحد

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

بتقسيم المعادلة على  $(i\hbar)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar} V\psi$$

(المرافق المعقد)

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2mi} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \frac{1}{i\hbar} V\psi^*$$

بالتعويض المعادلتين \* و \*\* في معادلة (a)

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mi} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar} \cancel{V\psi^* \psi} + \frac{\hbar^2}{2mi} \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \frac{1}{i\hbar} \cancel{V\psi \psi^*}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right)$$

٥٤

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right]$$

المعادلة أعلاه لا تبدو كشكل مثل معادلة الاستمرارية لمجرد واحد  
الا اذا عرّفنا سيار الاحتمالية (كثافة الاحتمالية) بالشكل الآتي :-

$$J(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

وعندها تكون معادلة الاستمرارية هي المعادلة الكمية كما يأتي :-

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

ولشلاثة أبعاد :-

$$J(r, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

مثال ١: جد تيار الاحتمالية للدالة الموجية  $\Psi = 3ke^{ikx}$  حيث  $k$  ثابت.

الحل :

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

$$\Psi = 3ke^{ikx} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 3k(ik)e^{ikx} = 3ik^2e^{ikx}$$

$$\Psi^* = 3ke^{-ikx} \rightarrow \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = 3k(-ik)e^{-ikx} = -3ik^2e^{-ikx}$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi} [3ke^{-ikx}(3ik^2e^{ikx}) - 3ke^{ikx}(-3ik^2e^{-ikx})]$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi} [9ik^3e^0 + 9ik^3e^0] = \frac{9\hbar k^3}{m}$$

مثال ٢: جد تيار الاحتمالية للدالة الموجية  $\Psi = 5e^{2x}$ .

الحل :

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

$$\Psi = 5e^{2x} = \Psi^* \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 10e^{2x} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}$$

$$\therefore \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \rightarrow j = 0$$



## 2- ١٩ انحلال مستويات الطاقة Degeneracy of Energy Levels

• الم انحلال هو الحالة التي يكون فيها أكثر من دالة ذاتية تقابل نفس القيمة الذاتية،

• في حالات معينة يرافق مستوى طاقة معين مثل  $E_n$  أكثر من دالة موجية واحدة  $\psi_n$  بحيث تكون هذه الدوال مستقلة خطياً عن بعضها البعض *Linearly independent*

• في مثل هذه الحالات سيمثل مستوى طاقة مختلاً *degenerate* ودرجة الانحلال = عدد الدوال الموجية المستقلة لذلك يكون

• إذا كان مستوى طاقة  $E_n$  مختلاً بدرجة انحلال تساوي  $N$  فإن عدد الدوال المستقلة  $N =$

• إذا كان مستوى الطاقة يمتلك دالة موجية واحدة شيقال عنه أنه غير مختل *non degenerate*

## Linear Superposition Principle

المبدأ التراكب الخطي يشمل جميع الظواهر الخطية .  
 هاهنا أي مزيج خطي لعدة دوال متصلة يصلح أن يكون حالة لنفس المستوى

• لو كان لدينا حالتان  $\psi_1$  و  $\psi_2$  التابعتان لحالة مستوي طاقتها  $E$  اجبت :-

$$\hat{H}\psi_1 = E\psi_1$$

$$\hat{H}\psi_2 = E\psi_2$$

فان المزيج الخطي لكل من  $\psi_1$  و  $\psi_2$  يصلح أن يكون حالة موجية لها نفس الطاقة  $E$  لأن :-

$$\hat{H}(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = E(a_1\psi_1 + a_2\psi_2)$$

• يمكن التعميم الى الحالة العامة التي تكون فيها درجة احلال مستوي الطاقة  $N$  ، وتستعمل فيها مجموعة من الدوال  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  هذه الدوال التي تصف النظام هي :-  
 • دوال ذاتية

• لها قيم ذاتية هي  $a_1, a_2, \dots, a_n$  على التوالي

عندئذ يمكن بناء حالة جديدة  $\Phi$  بتجميع نفس المستوي وتعمل مجموع الخطوط الدوال الذاتية وتكون بالصيغة التالية :-

$$\Phi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_3\psi_3 + \dots + C_n\psi_n = \sum C_n\psi_n$$

علاقة مبدأ التراكب الخطي  
 حيث  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  كميات ثابتة

## Quantized states

- تتخذ بعض الكميات الدائمية (مثل الطاقة والزخم الزاوي) لنفسها ولصورة دقيقة قيم معرفة معينة يقال عنها انها مكمية.
- هذا السلوك يستحيل في اكثر الاحيان لان تطبيق اساس ميكانيك الكمي على منظومة معينة يعطي غالباً توزيع لهذه القيم التي تحصل عليها نتيجة القياس (قيم متفرقة).
- اذا  $N \rightarrow \infty$

هناك نوع من دوال الموجة تقابل الحالة التي تكون فيها كمية ديناميكية معرفة القيمة تماماً، وهذه الدوال تحقق المعادلة التالية:

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

حيث  $a$  ثابت حقيقي عندئذ تكون الكمية  $A$  معرفة تماماً والبرهنة على ذلك بحسب القيد المتفرقة

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \int \psi^* \hat{A} \psi dV \\ &= \int \psi^* a \psi dV \\ &= a \int \psi^* \psi dV\end{aligned}$$

$$\langle A \rangle = a$$

كذلك

$$\begin{aligned}\langle A^2 \rangle &= \int \psi^* \hat{A} (\hat{A} \psi) dV \\ &= \int \psi^* \hat{A} a \psi dV \\ &= a \int \psi^* \hat{A} \psi dV \\ &= a \int \psi^* a \psi dV \\ &= a^2 \int \psi^* \psi dV\end{aligned}$$



09

$$\therefore \langle A^2 \rangle = a^2$$

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \\ &= a^2 - a^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  لم يملك أي شكل (أي لا قيمة) في قيمة  $A$  ، لأن  
 $A$  معرفة بالقيمة الدقيقة أو

7.

2- 22 التماثل

## Parity

\* يمكن وصف التماثل بأنه حالة مرآة كالذي يحدث في المرآة بحيث تنقلب الصورة. وقد تكون لعدد واحد أو أكثر :-

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \text{لثلاثة ابعاد}$$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{لبعد واحد}$$

\* قد تصنف الدوال الموجية بعنصر التناظر الزوجي even والفردي odd بالنسبة للانعكاس في الإحداثيات خلال نقطة الاصل.

$$\psi(x) = \psi(-x) \quad \text{even function} \quad \text{دالة زوجية}$$

$$\psi(x) = -\psi(-x) \quad \text{odd function} \quad \text{دالة فردية}$$

أي هذا التناظر يظهر بوضوح لكل دوال الموجة للطاقات غير المتفصلة لا يـ منظومة تكون طاقتها الكامنة متناظرة بالنسبة لإحداثي معين.

\* يمكن التعامل في هذه المسألة مع خلال مؤثر خطي سيمي مؤثر التماثل parity operator حيث يؤثر على الدالة الموجية بهذه الطريقة :-

$$P \psi(x) = \psi(-x)$$

$$P \psi(x) = \lambda \psi(-x)$$

وإذا أعدنا معادلة القيمة الذاتية لـ P فانه :-

يتطلب  $P$  مرة ثانية فإن لمعادلة  $\psi(x)$  تصبح

$$P^2 \psi(x) = P \psi(-x) = \psi(x)$$

$$P^2 \psi(x) = P(\lambda \psi(-x)) = \lambda^2 \psi(x)$$

ومعادلة هامتن النتيجة

$$\psi(x) = \lambda^2 \psi(x)$$

$$\lambda \Rightarrow \pm 1$$

• ويتبين من هذا أن الدالة الزوجية لها قيمة ذاتية  $(+1)$  ولها تماثل زوجي

• وأن الدالة الفردية لها قيمة ذاتية  $(-1)$  ولها تماثل فردي

• أن معوض التماثل  $P$  هو المؤثر الذي يكون حاصل تأثيره على الدالة  $\psi(x)$  هو استبدال  $(x)$  بـ  $(-x)$  كما مبين ، وأنه معوض أحادي unitary operator



مسألة: عندما يكون الجهد متناظراً بحيث  $V(x) = V(-x)$  فإن هذا يستتبع أن المؤثر الهاملتوني  $\hat{H}$  سيكون دالة زوجية، أي إن  $\hat{H}(x) = \hat{H}(-x)$ . وحينها فإن الهاملتوني سيتبادل commutes مع مؤثر التماثل  $\hat{P}$ ، أي  $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$ . البرهان:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}(\hat{H}(x)\Psi(x)) &= \hat{H}(-x)\Psi(-x) && \text{from eq. 2.58} \\
 &= \hat{H}(x)\Psi(-x) && \text{because } \hat{H}(x) = \hat{H}(-x) \\
 &= \hat{H}(x)\hat{P}\Psi(x) && \text{from eq. 2.58} \\
 \therefore \hat{P}\hat{H}(x)\Psi(x) &= \hat{H}(x)\hat{P}\Psi(x) && \text{because } \hat{P} \text{ is a linear operator.} \\
 \therefore (\hat{P}\hat{H}(x) - \hat{H}(x)\hat{P})\Psi(x) &= 0 \\
 \therefore (\hat{P}\hat{H}(x) - \hat{H}(x)\hat{P}) &= 0 \rightarrow [\hat{P}, \hat{H}(x)] = 0
 \end{aligned}$$

مثال: بين نوع التماثل في دالة الجيب  $y(x) = \sin x$  ودالة الجيب تمام  $y(x) = \cos x$ .  
الحل:

$$\begin{aligned}
 1 - \quad y(x) &= \sin x \\
 y(-x) &= \sin(-x) = -\sin x = -y(x) \\
 \therefore y(x) &= -y(-x) \\
 \therefore \text{from eq. 2.57} \rightarrow y(x) &= \sin x \text{ is odd function} \\
 2 - \quad y(x) &= \cos x \\
 y(-x) &= \cos(-x) = \cos(x) = y(x) \\
 y(x) &= y(-x) \\
 \therefore \text{from eq. 2.57} \rightarrow y(x) &= \cos x \text{ is even function}
 \end{aligned}$$

73

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi(-x) & \text{even parity} \\ -\psi(-x) & \text{odd parity} \end{cases}$$

**Example**

$$y(x) = \sin x$$

$$y(-x) = \sin(-x)$$

$$y(-x) = -\sin x = -y(x)$$

**Example**

$$y(x) = \cos x$$

$$y(-x) = \cos(-x)$$

$$y(-x) = \cos x = y(x)$$

**Example:**

$$\text{Let } \psi(x) = x^2, \hat{R}\psi(x) = (-x)^2 = x^2 \rightarrow r_n = 1$$

أدخل ديراك بعض الرموز لوصف حالة النظام تحتفظ على:-  
الصفة الاتجاهية لحالات الجسم  
وهو تتضمن

$$\langle \text{bra} | \text{ket} \rangle$$

• موضوعاً عن دالة (وصف ديراك حالة النظام بواسطة عته حالة  
ويرمز لها بالرمز  $|\text{ket}\rangle$  (متجه كيت)

• مركبة المتجه  $|\psi\rangle$  باتجاه  $x$

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

• موضوعاً عن مرافق معك  $\langle \psi |$  باتجاه  $x$

$$\psi^*(x) = \langle \psi | x \rangle$$

•  $|x\rangle$  الاتجاهين  $\langle x | , |x\rangle$  ميلان مجموع  
كاملة حيث

$$|x\rangle \langle x| dx = 1$$

بعض الأمثلة التي تمثل ديراك والتي تستخدم في تمثيل معادلات شرودنجر

① Eigen value Equation معادلة القيمة الذاتية

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

② Normalization Condition الشرط المعياري

$$\int \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$



③ Orthogonal Condition الشرط المتعامدي

$$\int \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx = 0$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$$

④ Hermitian Operator Condition شرط المؤثر الهرميتي

$$\int \psi_1^* \hat{F} \psi_2 dV = \int \psi_2 (\hat{F} \psi_1)^* dV$$

$$\langle \psi_1 | \hat{F} \psi_2 \rangle = \langle \hat{F} \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^* \quad \text{من التعريف ذاته}$$

كما كتابته المؤثر الهرميتي

$$\langle \psi_1 | \hat{F} \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{F} \psi_1 \rangle^*$$

## 2- 24 مثال هايزنبرك Heisenberg representation

وصف العالم هايزنبرك حالة النظام باستخدام المصفوفات

- وصف حالة النظام  $\psi$  بمصفوفة ذات عمود واحد ويرمز لها  $(\psi)$
  - وصف المرافق المتحد  $\psi^*$  بمصفوفة ذات صف واحد ويرمز لها  $(\psi^*)$
  - أما المؤثر فيرصف بمصفوفة مربعة حجمها  $(n \times n)$
- مثال /

if  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$  find the Complex Conjugate

$$\therefore |\psi^*\rangle = \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ z_3^* \\ \vdots \\ z_n^* \end{bmatrix}$$

$$\therefore \langle \psi| = [z_1^*, z_2^*, z_3^*, \dots, z_n^*]$$

Two vectors are defined by:-

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -7i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |B\rangle = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Find  $\langle A|B\rangle$ ?

$$\therefore \langle A|B\rangle = (2 \ 7i \ 1) \begin{pmatrix} 1+3i \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= 2(1+3i) + 7i(4) + 1(8)$$

$$= 2 + 6i + 28i + 8$$

$$= 10 + 34i$$

أمثلة متنوعة:

(1) افرض أن جسيماً محصوراً في بئر جهد يمتلك جهداً مقداره:  $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$    
 بين أن الدالة:  $\Psi(x, t) = A \sin(kx) e^{-iEt/\hbar}$  تمثل حلاً لمعادلة شرودنجر بحيث:  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

الحل: قيمة الجهد عند  $(x = 0)$  وعند  $(x = a)$  تبلغ  $\infty$ ، ولهذا فلا يمكن أن يتواجد الجسيم خارج هذا المجال. وعليه فإننا نحتاج افتراض معادلة شرودنجر داخل الحيز فقط الذي يكون فيه  $V=0$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{T.D.S.E. when } V = 0$$

بأخذ الطرف الأيسر لمعادلة شرودنجر وتطبيقه على الدالة المعطاة:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (A \sin(kx) e^{-iEt/\hbar})$$

$$= i\hbar (-iE/\hbar) A \sin(kx) e^{-iEt/\hbar} = EA \sin(kx) e^{-iEt/\hbar} = E\Psi(x, t)$$

وبأخذ الطرف الأيمن لمعادلة شرودنجر وتطبيقه على الدالة المعطاة:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A \sin(kx) e^{-iEt/\hbar})$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} (kA \cos(kx) e^{-iEt/\hbar}) = -\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2 A \sin(kx) e^{-iEt/\hbar})$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(x, t)$$

وبتعويض نتيجتي مساواة كل طرف في معادلة شرودنجر:

$$E\Psi(x, t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(x, t) \quad \rightarrow \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

(2) جد قيمة الثابت  $A$  بعد معايرة الدالة الموجية:  $\Psi(x) = A e^{-|x|/2a} \cdot e^{i(x-x_0)}$  ضمن المجال  $(-\infty \leq x \leq \infty)$

الحل:

$$\Psi^*(x) = A^* e^{-|x|/2a} \cdot e^{-i(x-x_0)}$$

$$\Psi^*(x)\Psi(x) = A^2 (e^{-|x|/2a} \cdot e^{-i(x-x_0)}) \cdot (e^{-|x|/2a} \cdot e^{i(x-x_0)})$$

$$= A^2 e^{-\frac{|x|}{a}} (e^{-i(x-x_0)} \cdot e^{i(x-x_0)}) = A^2 e^{-\frac{|x|}{a}}$$

لكي نكامل المقدار  $(e^{-\frac{|x|}{a}})$  علينا أن نتذكر أنه مُعرّف بدلالة القيمة المطلقة، وعندما  $(x \leq 0)$  فإن هذا حد سيكون  $(e^{x/a})$ ، بينما لـ  $(x \geq 0)$  يصير  $(e^{-x/a})$ . وبعد هذا نُجزئ التكامل بالصورة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\Psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = A^2 \left( \int_{-\infty}^0 e^{x/a} dx + \int_0^{\infty} e^{-x/a} dx \right)$$



ويحل هذا التكامل بطريقة  $udv$  فنفرض (بالنسبة للحد الأول) أن  $(u = x/a) \leftarrow (du = dx/a)$ .

والحد الثاني يعامل بنفس الطريقة مع تغيير الإشارة بحيث  $(u = -x/a) \leftarrow (du = -dx/a)$ .

$$\int_{-\infty}^0 e^{x/a} dx = a \int_{-\infty}^0 e^u du = ae^u \Big|_{-\infty}^0 = ae^{\frac{x}{a}} \Big|_{-\infty}^0 = a(e^0 - e^{-\infty/a}) = a(1 - 0) = a$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x/a} dx = a \int_0^{\infty} e^u du = -ae^u \Big|_0^{\infty} = -ae^{-\frac{x}{a}} \Big|_0^{\infty} = -a(e^{-\frac{\infty}{a}} - e^0) = -a(0 - 1) = a$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = A^2(a + a) = 2A^2a$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1 \quad \text{وباستخدام شرط العيارية:}$$

$$1 = 2A^2a \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2a} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

(3) جسيم يتحرك ببعد واحد بدالة موجة  $\Psi(x) = Ae^{ix^2}$  ضمن المجال  $(0 \leq x \leq 0.5)$ ، جد:

أ- ثابت العيارية  $A$ . ب- القيمة المتوقعة لـ  $x$  و  $p_x$ .

$$\int \Psi^*(x)\Psi(x)dx = \int |\Psi(x)|^2 dx = 1 \quad \text{الحل : أ - شرط العيارية}$$

$$\Psi^*(x) = Ae^{-ix^2}$$

$$\therefore \int_0^{0.5} |\Psi(x)|^2 dx = A^2 \int_0^{0.5} e^{ix^2} e^{-ix^2} dx = A^2 \int_0^{0.5} dx = A^2 x \Big|_0^{0.5} = A^2(0.5 - 0) = 0.5A^2 = 1$$

$$\therefore A^2 = \frac{1}{0.5} = 2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \Psi(x) = \pm\sqrt{2}e^{ix^2}$$

ب-

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx = \int_0^{0.5} (\pm\sqrt{2}e^{-ix^2}) x (\pm\sqrt{2}e^{ix^2}) dx = 2 \int_0^{0.5} x dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.5} = 0.25$$

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \int_0^{0.5} \Psi^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx = \int_0^{0.5} (\pm\sqrt{2}e^{-ix^2}) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) (\pm\sqrt{2}e^{ix^2}) dx \\ &= -2i\hbar \int_0^{0.5} e^{-ix^2} \frac{\partial e^{ix^2}}{\partial x} dx = -2i\hbar \int_0^{0.5} e^{-ix^2} 2ix e^{ix^2} dx = 4\hbar \int_0^{0.5} x dx \\ &= 4\hbar \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.5} = 0.5\hbar \end{aligned}$$

(4) جسيم يتحرك ببعد واحد بدالة موجة  $\Psi(x) = Ae^{-x^2}$  ضمن المجال  $(0 \leq x \leq \infty)$ ، جد ثابت

العيارية  $A$ .

$$\Psi^*(x) = A^* e^{-x^2} = Ae^{-x^2} = \Psi(x)$$

الحل :

$$\int \Psi^*(x)\Psi(x)dx = 1$$

بتطبيق شرط العيارية :

$$A^2 \int_0^\infty e^{-2x^2} dx = 1$$

$$\text{Let } u = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{u}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} u^{-1/2} du$$

$$A^2 \int_0^\infty e^{-2x^2} dx = A^2 \int_0^\infty e^{-u} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} u^{-1/2} du \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} A^2 \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du$$

$$\text{But } \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du = \sqrt{\pi} = 1.77245$$

$$\therefore A^2 \int_0^\infty e^{-2x^2} dx = A^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = 1 \rightarrow A^2 = 1.5957 \rightarrow A = \pm 1.2632$$

$$\therefore \Psi(x) = \pm 1.2632 e^{-x^2}$$

(5) افرض أن توزيع احتمالية معينة يُعطى بالعلاقة  $P(x) = \frac{9}{4x^3}$  ضمن المجال  $(1 \leq x \leq 3)$ ، جد الاحتمالية بحيث:  $(2.5 \leq x \leq 3)$ .

$$P = \frac{9}{4} \int_{2.5}^3 \frac{1}{x^3} dx = \frac{9}{4} \left( \frac{x^{-2}}{-2} \right) \Big|_{2.5}^3 = -\frac{9}{8} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{6.25} \right) = 0.055 = 5.5\% \quad \text{الحل :}$$

وعليه فإن كانت هذه دالة موجية فيوجد احتمال 5.5% لإيجاد الجسيم ضمن المدى  $2.5 \leq x \leq 3$ .

(6) جسيم حر بدالة موجة  $\Psi(x) = e^{ikx}$  يتحرك على طول  $(0 \leq x \leq 1)$ ، وفي ما عدا هذه المسافة فإن  $\Psi(x) = 0$ . احسب احتمالية إيجاد الجسيم ضمن المسافة  $(0.25 \rightarrow 0.75)$ . ثم جد التفاوت في الموقع والانحراف القياسي.

$$P(x) = \int_a^b \Psi^*(x)\Psi(x)dx$$

الحل :

$$\Psi^*(x) = e^{-ikx}$$

$$P(x) = \int_{0.25}^{0.75} e^{-ikx} e^{ikx} dx = \int_{0.25}^{0.75} dx = x \Big|_{0.25}^{0.75} = 0.75 - 0.25 = 0.5 = 50\%$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx = \int_0^1 e^{-ikx} x e^{ikx} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 0.5 \Rightarrow \langle x \rangle^2 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int \Psi^* x^2 \Psi dx = \int_0^1 e^{-ikx} x^2 e^{ikx} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\therefore \text{The variance } (\Delta x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

$$\text{Standard deviation } \Delta x = \sqrt{0.0833} = 0.288$$

$$\Psi(x) = A(ax - x^2) \text{ for } 0 \leq x \leq a$$

(7) افرض أن لدينا الدالة:

أ- أجز معايرة للدالة. ب- جد الانحراف القياسي.

الحل: أ- هذه الدالة حقيقية، فلماذا:  $\Psi^* \Psi = \Psi^2$ ، وسيتبع:

$$\begin{aligned} \int \Psi^2 dx &= \int_0^a A^2(ax - x^2)^2 dx = A^2 \int_0^a (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4) dx \\ &= A^2 \left( a^2 \frac{x^3}{3} - 2a \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^a = A^2 \left( \frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{2} + \frac{a^5}{5} \right) = A^2 \frac{a^5}{30} \end{aligned}$$

$$A^2 \frac{a^5}{30} = 1 \Rightarrow A = \pm \sqrt{30/a^5}$$

ولأجل المعايرة:

ب- لحساب التفاوت:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int \Psi^* x \Psi dx = \langle x \rangle = \int x \Psi^2 dx = \frac{30}{a^5} \int_0^a x(ax - x^2)^2 dx \\ &= \frac{30}{a^5} \int_0^a (a^2x^3 - 2ax^4 + x^5) dx = \frac{30}{a^5} \left( a^2 \frac{x^4}{4} - 2a \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{30}{a^5} \left( \frac{a^6}{4} - \frac{2a^6}{5} + \frac{a^6}{6} \right) = \frac{30}{a^5} \frac{a^6}{60} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int \Psi^* x^2 \Psi dx = \int x^2 \Psi^2 dx = \frac{30}{a^5} \int_0^a x^2(ax - x^2)^2 dx \\ &= \frac{30}{a^5} \int_0^a (a^2x^4 - 2ax^5 + x^6) dx = \frac{30}{a^5} \left( a^2 \frac{x^5}{5} - 2a \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{30}{a^5} \left( \frac{a^7}{5} - \frac{a^7}{3} + \frac{a^7}{7} \right) = \frac{30}{a^5} \frac{a^7}{105} = \frac{2}{7} a^2 \end{aligned}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{7} - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{7} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{28}} \quad (\text{standard deviation})$$

(8) جد كثافة التيار (تيار الاحتمالية) لجريان جسيم يتحرك بدالة موجية  $\Psi(x) = 5e^{ix^2}$ .

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \quad \text{الحل:}$$

$$\Psi = 5e^{ix^2} \rightarrow \Psi^* = 5e^{-ix^2}$$

$$\begin{aligned} j(x, t) &= \frac{\hbar}{2mi} \left[ 5e^{-ix^2} \frac{\partial (5e^{ix^2})}{\partial x} - 5e^{ix^2} \frac{\partial (5e^{-ix^2})}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\hbar}{2mi} [5e^{-ix^2} (10ixe^{ix^2}) - 5e^{ix^2} (-10ixe^{-ix^2})] \\ &= \frac{\hbar}{2mi} [5(10ix) - 5(-10ix)] = \frac{\hbar}{2mi} [50ix + 50ix] = \frac{50\hbar}{m} x \end{aligned}$$



(9) لدينا المؤثران:  $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$  and  $\hat{B} = -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

أ- بين أن:  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

ب- أثبت أن الدالة:  $f(x, y) = e^{-x+y}$  هي دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{A}$  بقيمة ذاتية (-1).

ج- هل إن هذه الدالة هي دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{B}$ ؟ إن كانت كذلك فما هي القيمة الذاتية؟

الحل: أ-

$$[\hat{A}, \hat{B}] \Psi = \hat{A} \hat{B} \Psi - \hat{B} \hat{A} \Psi = \frac{\partial}{\partial x} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi - \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \Psi$$

$$-i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

ب-  $\hat{A} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x+y}) = -e^{-x+y} = -f(x, y) \rightarrow \text{eigenvalue} = -1$

ج-  $\hat{B} f(x, y) = \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (e^{-x+y}) = -i \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x+y}) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{-x+y})$

$$= i(e^{-x+y}) + (e^{-x+y}) = (i+1)(e^{-x+y}) = (i+1) f(x, y)$$

$\therefore f(x, y)$  is an eigenfunction of  $\hat{B}$ , and the eigen value is  $(i+1)$ .

(10) جد ناتج  $[\hat{x}, \hat{p}_y]$ ، وبين فيما إذا كان المؤثران تبادليين.

$[\hat{x}, \hat{p}_y] \Psi(r, t) = x \hat{p}_y \Psi(r, t) - \hat{p}_y x \Psi(r, t)$  الحل :

$$\because \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore [\hat{x}, \hat{p}_y] \Psi = x \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi - \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) x \Psi = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} \Psi - \frac{\partial}{\partial y} x \Psi \right)$$

$$= -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} \Psi - x \frac{\partial}{\partial y} \Psi \right) = 0 \rightarrow \hat{x} \text{ and } \hat{p}_y \text{ are commutator operators.}$$

(11) أثبت القاعدة التبادلية:  $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$

$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] \Psi = (\hat{A} + \hat{B}) \hat{C} \Psi - \hat{C} (\hat{A} + \hat{B}) \Psi$$

الحل :

$$= \hat{A} \hat{C} \Psi + \hat{B} \hat{C} \Psi - \hat{C} \hat{A} \Psi - \hat{C} \hat{B} \Psi = (\hat{A} \hat{C} \Psi - \hat{C} \hat{A} \Psi) + (\hat{B} \hat{C} \Psi - \hat{C} \hat{B} \Psi)$$

$$= (\hat{A} \hat{C} - \hat{C} \hat{A}) \Psi + (\hat{B} \hat{C} - \hat{C} \hat{B}) \Psi = [\hat{A}, \hat{C}] \Psi + [\hat{B}, \hat{C}] \Psi$$

$$\therefore [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$$

✓

(12) أثبت أن مؤثر الطاقة الحركية الذي يعطى بالعلاقة  $(\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2})$  هو مؤثر هرميتي.

الحل :

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} = \hat{T}^*$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \hat{T} \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \hat{T}^* \Psi_1^* dx \quad \text{Hermitian operator condition}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \hat{T} \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \Psi_2 dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2 dx$$

$$\text{Let } u = \Psi_1^* \rightarrow du = d\Psi_1^* \text{ and } dv = \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2 dx \rightarrow v = \frac{d}{dx} \Psi_2$$

$$\begin{aligned} \therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2 dx &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left| \Psi_1^* \frac{d\Psi_2}{dx} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_2}{dx} d\Psi_1^* \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left| \Psi_1^* \frac{d\Psi_2}{dx} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_2}{dx} \frac{d\Psi_1^*}{dx} dx \end{aligned}$$

بما أن حاصل الضرب  $\Psi_1^* d\Psi_2$  يتجه للصفر لأن الدالة الموجية تتلاشى في المالا نهاية، فإن الحد الأول

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left| \Psi_1^* \frac{d\Psi_2}{dx} \right|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \text{سيساوي صفراً:}$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2 dx = 0 + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_2}{dx} \frac{d\Psi_1^*}{dx} dx$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة مرة ثانية وفق ما يلي:

$$\text{Let } u = \frac{d\Psi_1^*}{dx} \rightarrow du = \frac{d^2\Psi_1^*}{dx^2} dx \text{ and } dv = \frac{d\Psi_2}{dx} dx \rightarrow v = \Psi_2$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{d^2}{dx^2} \Psi_2 dx = \frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\Psi_1^*}{dx} \Psi_2 \right|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \frac{d^2\Psi_1^*}{dx^2} dx$$

$$= 0 - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \frac{d^2\Psi_1^*}{dx^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \Psi_1^* dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \Psi_1^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right)^* \Psi_1^* dx$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \hat{T} \Psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \hat{T}^* \Psi_1^* dx$$

(13) هل الدالة ( $y = \cos x^2$ ) هي دالة ذاتية لمؤثر مربع الزخم  $\hat{p}_x^2$ .

$$\begin{aligned}\hat{p}_x^2 \cos x^2 &= -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \cos x^2 = -\hbar^2 \frac{d}{dx} (-2x \sin x^2) \\ &= \hbar^2 (2 \sin x^2 + 2x \cdot 2x \cos x^2) = 2\hbar^2 \sin x^2 + 4\hbar^2 x^2 \cos x^2\end{aligned}$$

الحل : إذن هي ليست دالة ذاتية.

(14) أثبت أن الدالتين:  $\left(\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x\right)$  و  $\left(\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x\right)$  متعامدتان مع بعض.

الحل: لإثبات التعامد يجب تحقيق المعادلة:  $\int_0^a \Psi_2^* \Psi_1 dx = 0$

$$\begin{aligned}\int_0^a \Psi_2^* \Psi_1 dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} x dx \\ &= \frac{4}{a} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{a} x dx \quad (\text{by using } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \sin \frac{\pi}{a} x, \Rightarrow du = \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi}{a} x dx \Rightarrow u = 0 \text{ for } x = 0 \text{ and } u = 0 \text{ for } x = a$$

$$\therefore \frac{4}{a} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{a} x dx = \frac{4}{a} \frac{a}{\pi} \int_0^0 u^2 du = 0 = \int_0^a \Psi_2^* \Psi_1 dx$$

(15) تُعطى الدوال الموجية لجسيم يدور في حلقة دائرية بنصف قطر  $a$  بالعلاقة:

$$\Psi_m(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im\theta}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2$$

حيث تصف  $\theta$  الموقع الدائري للجسيم حول الحلقة، أي:  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . أثبت أن هذه الدوال تكون مجموعة عبارية تعامدية orthonormal.

الحل: لإثبات التعامد العياري يجب تحقق المعادلة:

$$\int \Psi_m^* \Psi_n dV = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \Psi_m^*(\theta) \Psi_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$\because e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos(n-m)\theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\theta d\theta \right)$$

إذا جعلنا  $m \neq n$  فإن التكاملين في الطرفين الأيمن يتلاشيان بسبب أن كل منهما يمثل دائرة

مكتملة أو أكثر للجيب وللجيب تمام، وكما يلي:



٧٤

$$\int_0^{2\pi} \Psi_m^*(\theta) \Psi_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin(n-m)\theta}{(n-m)} \Big|_0^{2\pi} - i \frac{\cos(n-m)\theta}{(n-m)} \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-m)} ((0-0) - i(1-1)) = 0 \quad \text{if } m \neq n$$

أي إن الطرف الأيمن يساوي صفراً، وبالتالي سيتحقق شرط التعامد:  $\int_0^{2\pi} \Psi_m^*(\theta) \Psi_n(\theta) d\theta = 0$   
 أما إذا كان  $m = n$  فإن تكامل الجيب سيتلاشى لأن  $\sin 0 = 0$  ولكن تكامل الجيب تمام مساوي  $2\pi$  لأن  $[\cos(n-m)\theta = \cos(0)\theta = 1]$  أي إن:

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)\theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \Psi_m^*(\theta) \Psi_n(\theta) d\theta = 1$$

وهذا يحقق شرط العيارية.

وإذا دمجنا الشرطين معاً (العيارية والتعامد) فستأخذ المعادلة الشكل التالي:

$$\int \Psi_m^* \Psi_n dV = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

ولهذا فإن الدوال  $\Psi_m(\theta)$  تكون عيارية متعامدة.

Solved Problems

1) Show that  $[p_x, V(x)] = -i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ .

**Solution:**

$$[p_x, V(x)] = (p_x V(x) - V(x) p_x)$$

$$[p_x, V(x)]\psi(x) = (p_x V(x) - V(x) p_x)\psi(x)$$

$$= p_x V(x)\psi(x) - V(x) p_x \psi(x)$$

$$\therefore p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (V(x)\psi(x)) - V(x)(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\psi(x)$$

$$= -i\hbar V(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - i\hbar \psi(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} + i\hbar V(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

$$= -i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x)$$

$$\therefore [p_x, V(x)] = -i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

2) Prove that the Hamiltonian operator of the free particle  $\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$  is the

Hermitian operator.

**Solution:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{A} \psi_m dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m (\hat{A} \psi_n)^* dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi_m dx = \frac{-\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \frac{d^2 \psi_m}{dx^2} dx$$

Let;  $u = \psi_n$  and  $dv = \frac{d^2 \psi_m}{dx^2} dx$ , so;  $du = \frac{d\psi_n}{dx} dx$  and  $v = \frac{d}{dx} \psi_m$ . Hence;

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dv = uv \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v du$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n^* \frac{d}{dx} \psi_n + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\psi_n}{dx} \right) \left( \frac{d\psi_n^*}{dx} \right) dx$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\psi_n}{dx} \right) \left( \frac{d\psi_n^*}{dx} \right) dx$$

Now let;  $u = \frac{d\psi_n^*}{dx}$  and  $dv = \frac{d\psi_n}{dx} dx$ , so;  $du = \frac{d^2\psi_n^*}{dx^2} dx$  and  $v = \psi_n$ . Thus;

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n^* \frac{d\psi_n}{dx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \frac{d^2\psi_n^*}{dx^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_n^*}{dx^2} \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_n^*}{dx^2} \right)^* dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (\hat{H} \psi_n) dx$$

3) Show that  $[\hat{H}, \hat{x}] = \frac{-i\hbar}{m} \hat{p}_x$

Solution:

$$[\hat{H}, \hat{x}] = \hat{H} \hat{x} - \hat{x} \hat{H}$$

Where  $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z)$  and  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

$$[\hat{H}, \hat{x}] \psi = (\hat{H} \hat{x} - \hat{x} \hat{H}) \psi$$

$$[\hat{H}, \hat{x}] \psi = \left\{ \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) x - x \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) \right\} \psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 x \psi + V(x, y, z) x \psi + x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - x V(x, y, z) \psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 x \psi + x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$



$$\begin{aligned}
 \nabla^2 x \psi &= \nabla(\nabla x \psi) \\
 &= \nabla(x \nabla \psi + \psi) \\
 &= x \nabla^2 \psi + \nabla \psi + \nabla \psi \\
 &= x \nabla^2 \psi + 2 \nabla \psi \\
 &= -x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} 2 \nabla \psi + x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \\
 [\hat{H}, \hat{x}] \psi &= -\frac{\hbar^2}{m} \nabla \psi \\
 [\hat{H}, \hat{x}] &= -\frac{\hbar^2}{m} \nabla \Rightarrow -\frac{i\hbar}{m} \frac{\hbar}{i} \nabla = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x
 \end{aligned}$$

4) Find  $p_d$ ,  $A$ ,  $\langle x \rangle$ ,  $(\Delta x)^2$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $(\Delta p)^2$ ,  $\Delta p \Delta x$  For the following one-dimensional wave function;

$$\psi(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{ip_0 x / \hbar}$$

**Solution:**

$$\psi(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{ip_0 x / \hbar}, \quad \psi^*(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{-ip_0 x / \hbar}$$

$$p_d = |\psi(x)|^2 = A A^* e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$A A^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx = 1$$

Let  $(x - x_0) = z \Rightarrow dx = dz$ , so;

$$A A^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz = 1$$

$$A A^* a \sqrt{\pi} = 1$$

$$A A^* = \frac{1}{a \sqrt{\pi}}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{-ip_0 x/\hbar} x A^* e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{ip_0 x/\hbar} dx$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx$$

Let  $(x - x_0) = z \Rightarrow x = z + x_0$   $dx = dz$ , so;

$$\langle x \rangle = \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z + x_0) e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{x_0}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$\langle x \rangle = \frac{x_0}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz = \frac{x_0}{a \sqrt{\pi}} a \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \langle x \rangle = x_0$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{-ip_0 x/\hbar} x^2 A^* e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} e^{ip_0 x/\hbar} dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx$$

$$\text{Let } x - x_0 = z \Rightarrow x^2 = z^2 + 2x_0 z + x_0^2 \quad dx = dz$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + 2x_0 z + x_0^2) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dz$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{2x_0}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{2x_0^2}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^6} \sqrt{\pi} + \frac{x_0^2}{a\sqrt{\pi}} \cdot a\sqrt{\pi}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} a^2 + x_0^2$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} a^2 + x_0^2 - x_0^2$$

$$\therefore (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} a^2$$

$$\langle p_x \rangle = \int \psi^* p_x \psi dx$$

Since;  $\psi = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{h}}$  so;  $\psi = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} - \frac{i p_0 x}{h}}$  and remember;  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

,hence

$$\langle p_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{h}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{h} \right]$$

$$\langle p_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} - \frac{i p_0 x}{h}} A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{h}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{h} \right] dx$$



$$= -A^* A i \hbar \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right] dx$$

Let  $x - x_0 = z \Rightarrow x = z + x_0 \Rightarrow dx = dz$

$$= -A^* A i \hbar \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} \left[ -\frac{z}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right] dz$$

$$= \frac{A^* A i \hbar}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + A^* A p_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$= 0 + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} p_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} p_0 a\sqrt{\pi}$$

$$= p_0$$

$$\langle p_x \rangle^2 = p_0^2$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi dx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right]^2 - \frac{A}{a^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}}$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} - \frac{i p_0 x}{\hbar}} \left( A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right]^2 - \frac{A}{a^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}} \right) dx$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} A^* A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \left[ -\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right]^2 + \frac{A^* A \hbar^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx$$

Let  $(x - x_0) = z \Rightarrow x = z + x_0 \Rightarrow dx = dz$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} A^* A e^{-\frac{z^2}{a^2}} \left[ -\frac{z}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right]^2 + \frac{A^* A \hbar^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} A^* A e^{-\frac{z^2}{a^2}} \left[ -\frac{z}{a^2} + \frac{i p_0}{\hbar} \right]^2 + \frac{A^* A \hbar^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{-A^* A \hbar^2}{a^4} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{2A^* A i \hbar p_0}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + A^* A p_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{A^* A \hbar^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{-\hbar^2}{a^5 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{2 i \hbar p_0}{a^3 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{p_0^2}{a \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz + \frac{\hbar^2}{a^3 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2a^5 \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{a^6 \sqrt{\pi}} + 0 + \frac{p_0^2}{a \sqrt{\pi}} \cdot a \sqrt{\pi} + \frac{\hbar^2}{a^3 \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} \sqrt{a^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2a^2} + p_0^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}$$

$$= p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2a^2}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

$$= p_0^2 + \frac{\hbar^2}{2a^2} - p_0^2$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{2a^2}$$

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

## الفصل الثالث

### الجسيم الحر

- 1-3 المقدمة
- 2-3 الجسيم الحر
- 3-3 معادلة شرودنجر في بعد واحد
- 4-3 منخفض الجهد ذي الجدران الصلبة
- 5-3 الجسيم الحر في صندوق الجهد ذي الأبعاد الثلاثة
- 6-3 كثافة الحالات
- 7-3 الجهد درجي الشكل
- 8-3 جهاز الجهد المستطيل بارتفاع محدود



## Introduction

في هذا الفصل سنتعامل مع تطبيقات قواعد ميكانيك الكم التي تمت الإشارة إليها في الفصل السابق لأنظمة مختلفة

في هذا الفصل سيتم البحث في الصفات الكمية للجسيم الحر في بعد واحد وثلاثة أبعاد.

## 3-2 الجسيم الحر

## The Free Particle

تعرف الجسيمات الحرة :-

بأنها تلك الجسيمات التي تتحرك

حرة من أي قوة مقيدة . مما يعني أنها غير متأثرة بقوة خارجية أو أنها تتحرك في منطقة ليس لها فيها علاقة كامنة .

ملاحظة مهمة :-

مع أن هذا التعريف يتضمن أن هذه الجسيمات حرة الممكن أن يكون لها سرعة ثابتة ، لذلك نأخذ الجسيمات الحرة التي لديها طاقة كامنة صفرية ( $V(x) = 0$ ) هي أبسط نظام يمكن أن يؤخذ في الاعتبار في ميكانيك الكم .

3-3 معادلة شرودنجر في بعد واحد  
Schrödinger Equation in One Dimension

\* سيتم دراسة أسهل الأنواع الحرة

نفرض :-

- جسيم كتلته  $m$
- يتحرك في اتجاه واحد حركة حرة وليكن الاتجاه  $x$  .

س / ماذا يعني فيزيائياً أن الجسم يتحرك في اتجاه واحد حركة حرة ؟  
- يعني أنه ليس هناك أي نوع من القوى المؤثرة على حركته .  
- وبهذا نأخذ طاقة الكامنة  $V(x)$  هي مقدار ثابت

س / كلاسيكياً ، ماذا يعني هذا الجسيم المنعزل

كلاسيكياً :-

يكون الجسيم في أصل هذه الحالة ساكناً

أو متحركاً بسرعة ثابتة

الآن :-

نحاول إيجاد دوال الحالة لهذا النظام ومعرفة الطاقة المقابلة لكل منها عبر طريقة حل معادلة شرودنجر غير المتغيرة على الزمن :-

$$\therefore H\psi = E\psi$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) = E\psi$$

لكن :-

$$V(x) = 0 \quad \text{الجسيم الحر}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - E\psi = 0$$

\* نضرب المعادلة بـ  $-\frac{2m}{\hbar^2}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \quad \text{----- 1}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{✓} \quad p = \hbar k$$

$$\therefore E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad \text{----- 2}$$

\* بتعويض ② في ①

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad \text{----- 3}$$

معادلة (3) متماثلة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة ، ومن أمثلتها :-  
حركة الجسيم في سلك مثبتة من الطرفين بأوضاع

\* الحل العام للمعادلة (3) هو

$$\psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

— — — — 4

\* الحد الاول  $Ae^{ikx}$  يمثل موجة بسعة A ستيرالاتجاه الموجب لمحور x  
\* الحد الثاني  $Be^{-ikx}$  = " = " B = " = " الب = "

مع العلم ان A و B ثوابت اختيارية arbitrary constants

$e^{ikx}$  ,  $e^{-ikx}$  هي دوال فصل حركة الجسيمين بزاوية  $k$   
 و طاقة  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

\* اثبات انه كل حد في الطرف الايمن للمعادلة (4) **مبطل**  
حلاً للمعادلة (3)

\* نكته كتابه معادله (4) بالصفت الاثني :-

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A e^{i k x} + B e^{-i k x}$$

\* نأخذ الحزب الاول

$$\psi_1 = A e^{ikx} \rightarrow \frac{d\psi_1}{dx} = A (ik) e^{ikx}$$

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = A(iK)(iK) e^{iKx}$$

$$= A (-k^2) e^{ikx}$$

$$= -k^2 \underline{A e^{ikx}}$$

$$= -k^2 \psi,$$

٤٤ نَحْوُ هَذِهِ الْقِيَمَةِ فِي مُعَادِلَةِ (3) ، حَيْثُ يَكُونُ الْحُلُّ الْعَامُّ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = -k^2\psi + k^2\psi = 0$$

- 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 8



ع

\* نأخذ الحد الثاني

$$\Psi_2 = B e^{-ikx} \rightarrow \frac{d\Psi_2}{dx} = B (-ik) e^{-ikx}$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} = B (+ik)(-ik) e^{-ikx}$$

$$= B (-k^2) e^{-ikx}$$

$$= -k^2 B e^{-ikx}$$

$$= -k^2 \Psi_2$$

\* نعوّض هذه القيمة في معادلة (3) حيث يكون الحل العام للمعادلة:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = -k^2\Psi + k^2\Psi = 0$$

الآن :-

نطبق الحل على بعض الحالات الخاصة للجسيم الحر :-

الحالة الأولى :-

إذا كان الجسيم يتحرك بالاتجاه الموجب على المحور السيني x ، فإن الدالة التي تصف حركة هذا الجسيم هي :-

$$\Psi(x) = A e^{ikx}$$

-----5

كثافة الاحتمال لوجود هذا الجسيم

$$P = |\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x) \Psi(x) = A^* e^{-ikx} \cdot A e^{ikx} = A^* A = |A|^2$$

6

0

الحالة الثانية

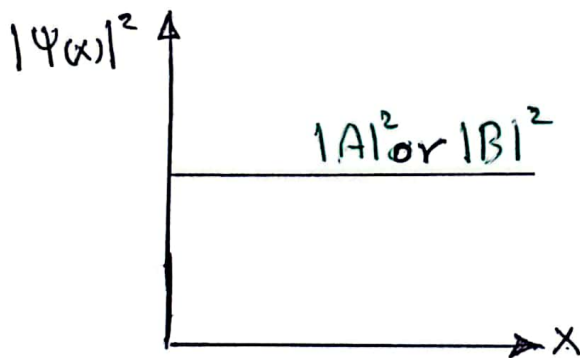
إذا كان الجسم يتحرك بالاتجاه السالب على المحور السيني  
، فإن الدالة التي تمثل حركة هذا الجسم هي :-

$$\Psi(x) = B e^{-ikx} \quad \text{----- 7}$$

كثافة الاحتمالية لوجود هذا الجسم

$$P = |\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x) \Psi(x) = B^* e^{ikx} B e^{-ikx} = B^* B = |B|^2 \quad \text{----- 8}$$

\* عند رسم  $|\Psi(x)|^2$  مع  $x$  نحصل على شكل أدناه وهو خطي :-  
وهو كثافة الاحتمالية عند أي نقطة شاري مقداراً ثابتاً :-



الحالة الثالثة

إذا أخذنا بالاعتبار حركة الجسم في كلا الاتجاهين  
الموجب والسالب معاً :-

$$\Psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \text{----- 9}$$

وكثافة الاحتمالية لوجود هذا الجسم هي :-

$$P = |\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x) \Psi(x) = (A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}) (A e^{ikx} + B e^{-ikx}) \\ = A^* A + B B^* + A^* B e^{-2ikx} + B^* A e^{2ikx} \quad \text{----- 10}$$

واذا جعلنا  $A=B$   
 (أي فرضنا تساوي عدد الجسيمات في كلا الاتجاهين)

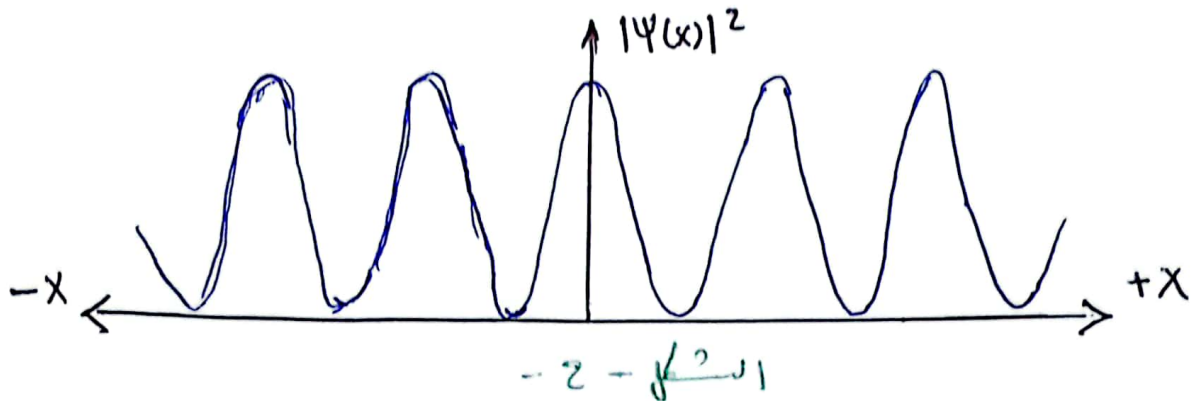
تصبح المعادلة (١٥) :-

$$|\psi(x)|^2 = 2A^*A + A^*A (e^{-2ikx} + e^{2ikx})$$

$$= 2A^*A \left( 1 + \frac{1}{2} (e^{2ikx} + e^{-2ikx}) \right)$$

$$= 2A^*A (1 + \cos 2kx) = 4A^*A \cos^2 kx \quad \text{----- 11}$$

\* عند رسم  $|\psi(x)|^2$  مع  $x$  نحصل على الشكل (٢) :-



ملاحظات

\* من الملاحظ أنه لا توجد شروط حدودية على حل معادلة الجسيم الحر (٤)،  
 • حيث أنه الثابت  $k$  يمكنه أن يأخذ أية قيمة  
 • وكذلك الحال بالنسبة للطاقة  $E$   
 • بذلك نحصل على حلول متصلة لقيم الطاقة،

أيضا يمكن القول أنه طاقة الجسيم الحر تكون غير محددة

\* انه مسألة الجسيم الحر تدلنا على انه غير القابل لمبدأ اللادقة لهايزنبرك

• حيث انه الدالة  $\psi(x) = e^{ikx}$  تصف حالة الجسيم الذي زخمه  $\hbar k$  (وهو مقدار ثابت) أي بالإمكان انه تحت زخم بدقة كاملة وهذا يعني انه لا لادقة في زخم الجسيم هو  $(\Delta p = 0)$



✓ ٥٥ وفقاً لمبدأ اللادقة  $(\Delta x \Delta p \geq \hbar)$

فإن موقع الجسيم لا يعرف عرقله بصورة كاملة  
أي اللادقة في الموقع (أي  $\Delta x = \infty$ )

حالة  
سكن

باستخدام مبدأ اللادقة استنتجنا أن التفرقة في الموقع  
لجسيم حر هي لا نهائية (أي  $\Delta x = \infty$ )

$$\therefore \Delta p \Delta x = \hbar$$

$$\therefore p_x = \hbar k \quad (\text{الجسيم الحر})$$

$$\therefore \Delta p = 0$$

$$\therefore \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \cdot \frac{\hbar}{\text{Zero}} = \infty$$

$$\therefore \Delta x = \infty$$

٣ - ٤ منخفض الجهد ذرا جدران الصلبة  
Square well potential with rigid walls

نفرض أن

جسيماً كتلة  $m$

يتحرك بين  $(x=0)$  و  $(x=a)$  داخل صندوق

(كما هو الحال لجزيء الغاز المحصور في صندوق ذي جدران صلبة)

الجهد أو الطاقة الكامنة داخل الصندوق صفر  $(V(x)=0)$

الجهد أو الطاقة الكامنة عند نهايتي الصندوق  $(V(x)=\infty)$

يمكن تصوير الافتراضات أعلاه في الشكل - ٣ - ٥

$$\begin{array}{ccc}
 V(x) = \infty & V(x) = 0 & V(x) = \infty \\
 \psi(x) = 0 & \psi(x) = C \sin kx & \psi(x) = 0 \\
 x=0 & & x=a
 \end{array}$$

شكل - 3 - رسم تخطيطي لمنخفض جهد ذي بعد واحد عرضة  $a$

ملاحظات

\* حركة الجسيم مقيدة في المنطقة المحصورة بين :  
(  $x=0$  ) و (  $x=a$  )

\* يمكن كتابة الجهد ( الطاقة الكامنة ) :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

\* نظراً لوجود حدران صلبة عند نهايتي الصندوق أي (  $V(x) = \infty$  ) ، فإنه الجسيم لا يستطيع أن يخترق الحدران ويتفد إلى الخارج عند اصطدافه بها

أي أن حركة الجسيم تكون مقيدة بين حدران الصندوق

مثال على ذلك :-

حركة الإلكترونات الحرة في المعادن ، حيث يكون ارتفاع الجهد أكبر من طاقة الإلكترونات وبالتالي لا تستطيع أن تخترق المعدن ولكنها تتحرك بحرية في المعدن

\* المطلوب الآن :-

تحسين دوال الحالة لهذا الجسيم والطاقة

المصاحبة لكل دالة منها :-

## الحل :-

\* لحل هذه المسألة ، نحل معادلة شرودنجر غير المعقدة على الزمن TISE بعد أن نفرض عليها الشروط الحدودية boundary conditions سد / منتهي الشروط الحدودية ؟  
وهو الشروط التي يجب على الدالة  $\psi(x)$  أن تحققها .

\* في الشكل - ٣ - نلاحظ أن الحيز منطقتين أساسيتين :-  
(١) المنطقة خارج منخفض الجهد  
(٢) المنطقة داخل منخفض الجهد

١ - المنطقة خارج منخفض الجهد (خارج الصندوق) :-

\* الجهد هنا :-  $V(x) = \infty$

عند الموقع :-  $0 \leq x \leq a$

\* معادلة شرودنجر غير المعقدة على الزمن ستكون بالشكل :-

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0$$

\* بتعويض قيمة  $V(x) = \infty$   

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - \infty) \psi(x) = 0$$

\* بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - \infty) \psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (\infty - E) \psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \infty \psi(x) \quad \text{----- 12}$$



١.

\* حل معادلة (١٢) (وهو حل وحيد)

$$\psi(x) = 0$$

وكمثل  
الصدوق  
ان كثافة الاحتمال  $P = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = 0$  خارج  
الصدوق

ان لا يوجد احتمال لتواجد الجسيم خارج الصندوق  
عما يعني ان الجسيم يتحرك فقط داخل الصندوق الجهد

بين  $(x=0)$  و  $(x=a)$

٢ - المنطقة داخل الصندوق الجهد (داخل الصندوق) :-

$$* \text{ الجهد هنا } :- V(x) = 0$$

$$\text{عند الموقع } :- 0 < x \leq a$$

\* معادلة شرودنجر غير المعقدة على الزمن ستكون بالشكل :-

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0$$

\* بتعويض قيمة  $(V(x) = 0)$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0$$

\* هذه المعادلة مماثلة لمعادلة الجسيم الحر التي مرت عليها سابقاً، ولهذا يكون

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{حيث ان}$$

\* لايجاد المقدارين الثابتين  $A$  و  $B$  :-  
ستستخدم الشرطين الحدوديين التاليين :-

1)

$$1 - \psi(x=0) = 0$$

$$2 - \psi(x=a) = 0$$

أي أن :-

الدالة الموجية  $\psi$  تتلاشى وتصبح صفرًا عند :-

$$x=a \text{ / } x=0$$

لأن هذه القيم تكون عند الجدران فلا تسمح للجسيم باخترافها

\* بتطبيق الشرط الأول  $x=0$

$$\psi(0) = 0 = A e^{i k_0} + B e^{-i k_0}$$

$$= A(1) + B(1)$$

$$= A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

\* نأخذ الدالة  $\psi(x)$  الشكل الثاني

$$\psi(x) = A(e^{i k x} - e^{-i k x})$$

$$\because e^{\pm i \theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A(\cos kx + i \sin kx - \cos kx + i \sin kx) \\ &= 2i A \sin kx \end{aligned}$$

\* نفرض أن :-

$$2i A = C$$

$$\psi(x) = C \sin kx \quad \text{----- 13}$$

\* بتطبيق الشرط الثاني  $x=a$  ونعوضه في (13)

$$\psi(x=a) = C \sin Ka \quad \text{----- 14}$$

$$\therefore \sin Ka = 0 \Rightarrow Ka = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{a} \quad \text{----- 15}$$

حيث  $n$  : عدد صحيح موجب  $n=1, 2, 3, \dots$

\* يتعرف في النهاية  $k$  في المعادلة (13)

سوف نحصل على الدالة الموجية  
وعلينا أن نعلم طاقة الجسم داخل صندوق  $\psi$

$$\therefore \psi(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{----- 16}$$

$$\begin{aligned} \therefore E &= \frac{p^2}{2m} \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\therefore E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad \text{----- 17}$$

ملاحظة :-

① ان المعادلة (16) هي معادلة الدوال الموجية المنتهية  
للطاقة المسموع بها في المعادلة (17)

ان هذه الدوال تحقق جميع شروط الدالة المقبولة

- \* (احادية القيمة)
- \* (مربعها قابل للتكامل)
- \* (قابلة للاشتقاق)
- \* (مستمرة)

يشكلها الخاص

ان معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمان  $\psi$  من الخطوات التالية:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad * - \frac{2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \psi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x)$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0$$

$$\left\{ \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0 \right\}$$



## الاستنتاجات

**أولاً :-** تكون طاقة الجسيم داخل الصندوق مكمية ، وهذا يعني أنها تأخذ قيماً محددة (مكمية) ، وهذه القيم تشكل مستويات الطاقة كما مبين في الشكل - ٤ - .

When

$$n=1 \rightarrow E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$n=2 \rightarrow E_2 = 4 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \rightarrow E_2 = 4E_1$$

$$n=3 \rightarrow E_3 = 9 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \rightarrow E_3 = 9E_1$$

\* عند  $n=1$  يمثل أوّلاً مستوى طاقة للحالة الأرضية والتي تمثل الحالة المستقرة.

\* عند  $n=2, 3, \dots$  تمثل مستويات الطاقة الحالات المنتهية التي تمثل الحالات المثارة.

$$n=5 \text{ ————— } E_5 = 25E_1$$

$$n=4 \text{ ————— } E_4 = 16E_1$$

$$n=3 \text{ ————— } E_3 = 9E_1$$

$$n=2 \text{ ————— } E_2 = 4E_1$$

$$n=1 \text{ ————— } E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

الشكل - ٤ - مستويات الطاقة للجسيم داخل صندوق ذي بعد واحد

١٤

ثانياً :- لا يمكن للعدد الكمي  $n$  أن يساوي صفراً

وهذا يعني عدم وجود صيغة أو جسيم (أي أن  $\psi = 0$ )

وهذا مخالف لما افترضناه من وجود جسيم داخل الصندوق .

مكلاسيكياً :-

يكون جميع قيم الطاقة مسموحة ومن ضمنها الصفر.

ثالثاً :- معادلة الطاقة  $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

الطاقة  $E_n$  يتناسب عكسياً مع  $m$  و  $a$

لذا :-

عند زيادة عرض الصندوق  $a$  يتؤدي الناقص طاقة أكثر تقارباً

وعندما تقترب  $a$  من  $\infty$  فإن مستويات الطاقة تقترب مع

بعضها وتصبح متصلة

\* هذه الحالة مشابهة للإلكترونات الذرية المستمرة

\* تقل كلما أخذنا الحالة عندما تكون كتلة الجسم كبيرة جداً .

مثال 4 /

أثبت أن الأطوال الموجية المتاحة للجسيم في صندوق الجهد

ذي البعد الواحد تُعطى بالعلاقة  $(\lambda = \frac{2a}{n})$  .

الحل :-

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

بالتعويض عن قيمة  $p$  مع معادلة دي بروي  $(p = \frac{h}{\lambda})$  ينتج أن :-

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}} \quad \text{----- 18}$$

مع المعادلة 17 :-

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{n^2 \pi^2 (\frac{h}{2\lambda})^2}{2ma^2}$$

$$\text{أو } \boxed{E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}} \quad \text{----- 19}$$

10

$$\therefore \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \times \frac{n^2 h^2}{8ma^2}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{n^2 h^2}{4a^2}}} = \frac{h}{\frac{nh}{2a}} = \frac{2a}{n}$$

مثال 12

احسب الطاقة الأرضية والطول الموجي المصاحب لها للإلكترون يتحرك في جزيء خطي موله (0.77658 nm).

الحل :- لايجاد الطاقة الأرضية نعوض في المعادلة

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

$$n = 1$$

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$a = 0.77658 \text{ nm}$$

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} = \frac{(1)^2 \times (6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (0.77658 \times 10^{-9} \text{ m})^2}$$

$$= \frac{4.39 \times 10^{-67}}{4.39 \times 10^{-48}} = 1 \times 10^{-19} \text{ J}$$

لايجاد الطول الموجي المصاحب لهذه الطاقة

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s.}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 10^{-19} \text{ J}}}$$

$$= 1.553 \times 10^{-9} \text{ m} = 1.553 \text{ nm}$$

حل آخر :-

$$\lambda = \frac{2a}{n} = \frac{2 \times 0.77658 \times 10^{-9} \text{ m}}{1} = 1.553 \times 10^{-9} \text{ m} = 1.553 \text{ nm}$$

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s.}}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (1.553 \times 10^{-9} \text{ m})^2} = 1 \times 10^{-19} \text{ J}$$



تطبيق شرط المعايير

لايجاد الثابت  $C$  للحالة  $(\Psi_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a})$   
تستخدم الشرط المعياري للدوال الموجية أي:

$$\int \Psi_n^*(x) \Psi(x) dx = 1$$

$$\int C^* \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) C \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 1$$

$$C^* C \int \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 1$$

$$|C|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\therefore \frac{1}{2} |C|^2 \int_0^a (1 - \cos 2 \frac{n\pi x}{a}) dx = 1$$

$$\frac{1}{2} |C|^2 \left\{ \int_0^a dx - \int_0^a \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx \right\} = 1$$

$$\frac{1}{2} |C|^2 \left\{ [x]_0^a - \left(\frac{a}{2n\pi}\right) [\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)]_0^a \right\} = 1$$

$$\frac{1}{2} |C|^2 \left\{ (a - 0) - \left(\frac{a}{2n\pi}\right) (0 - 0) \right\} = 1$$

$$\frac{1}{2} |C|^2 a = 1 \rightarrow |C|^2 a = 2 \rightarrow |C|^2 = \frac{2}{a}$$

$$\therefore C = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad \left\{ \therefore \Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \right\} \text{----- 20}$$

$$\therefore |\Psi|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \text{----- 21}$$

الاحتمالية داخل  
منخفض الحجم  
عند أي نقطة

## تطبيق شرط المقامد

\* لو كان هناك نظام ميكانيكي ولها عدة دوال

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$$

\* كل دالة تصف حالة مختلفة من الدوال الاخرى

\* كل دالة هي عيارية

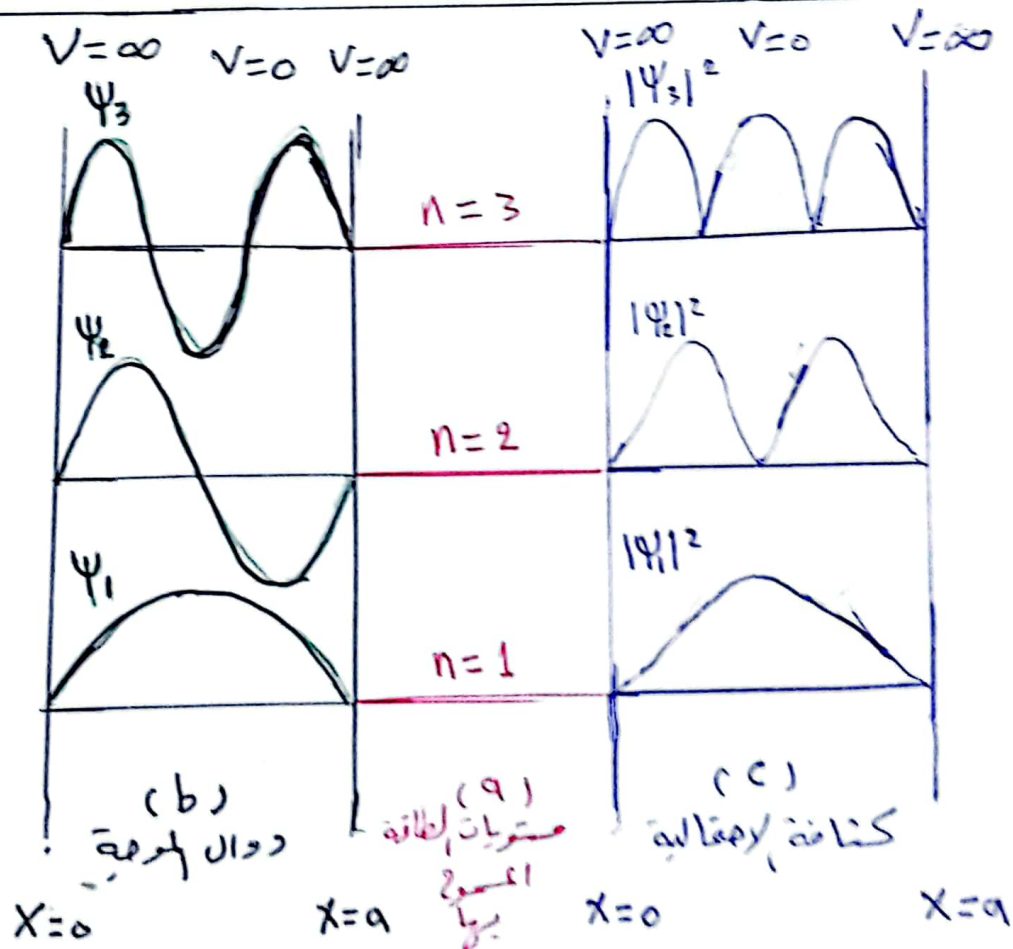
\* كل دالتين لها متعامدتان مع بعض

\* في فقرة تطبيق شرط المعايير تم اثبات انه الد عيارية

\* في الفصل الثاني / ص ٢٢ تم اثبات المتعامدين الدوال (صحيح جدا)

\* يمكن التعبير عن العيارية والمقامد في هندسة الجهد ذي البعد الواحد بالصيغة :-

$$\int \psi_i^* \psi_j dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{--- 22}$$



## ملاحظات على الشكل - 5 -

• يوضح الشكل - 5 - الدوال الموجبة لمستويات طاقة الثلاثة الأدنى وكثافة الاحتمالية للدوال  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$   $n=1, n=2, n=3$   $|\psi_1|^2, |\psi_2|^2, |\psi_3|^2$

• يوضح الشكل  $n$  الجهد عند الجدران  $V = \infty$   $V = 0$  في داخل الصندوق

• يوضح الشكل  $n$  الصندوق يقع عند النقطتين  $x = 0$  و  $x = a$  بمعنى ان عمره الصندوق  $a$

## تطبيق مبدأ التوافق (المقابل)

• توجد نقاط على طول الصندوق تكون عندها (كما في الشكل 5) :

$$\psi(x) = 0$$

ديالتي

$$|\psi(x)|^2 = 0$$

مما يعني انه لا يوجد احتمال لوجود

الجسيم عند هذه النقاط ، ويمكن ان تعرف هذه النقاط **بالعقد nodes**

• من الملاحظ :-

عدد العقد في كل حالة  $= (n-1)$

حيث  $n$  هو رقم الكم المميز

• استيجاد العقد عند حدود الصندوق  $(x=0), (x=a)$

لانها مشروطة الحركة

• يتناسب عدد العقد طردياً مع طاقة الحالة  $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

يمكنهم هذا التناسب الطردي مع طريق علاقة دي بروي

$\lambda = \frac{h}{p}$  ، فانه زيادة عدد العقد في نفس الطول يعني قصر الطول الموجي



الذي يتناسب عكسياً مع الزخم الخطي  $p$  ،

أي أنه بزيادة عدد العقد

← زيادة الزخم

← زيادة الطاقة الحركية

∴ الزخم يتناسب طردياً مع الطاقة الحركية  $(E = p^2/2m)$  .

• كلما زادت قيمة  $n$  ( العدد الكمي ) زاد عدد النقاط المتساوية في الاحتمالية .

- حيث أنه حلول الصندوق ثابته

- النقاط متساوية الاحتمالية تتقارب مع بعضها البعض بزيادة  $n$  ( العدد الكمي ) .

- إذا وصل العدد الكمي  $(n)$  قيمة كبيرة فإنه هذه النقاط متساوية الاحتمالية تتقارب إلى الحد الذي لا يمكن التفرقة بينها .

- يبدو الاحتمالية كأنها متساوية في جميع النقاط على طول الصندوق .

- هذه النتيجة تقارب النتيجة في الميكانيك التقليدية .

••• بحكم القول

عند قيمة كبيرة جداً للعدد الكمي  $(n)$  يتطابق نتائج

الميكانيك الكمي مع نتائج الميكانيك الكلاسيكية .

مثال ٣ /

أحسب طاقة الحالة الأرضية  $E_1$  والفوت في الطاقة

$\Delta E (E_2 - E_1)$  بين الحالة  $(n=2)$  والحالة المستقرة  $(n=1)$  لطول موجة :-

٣ / إلكترون كتلته  $9.1 \times 10^{-31}$  يتحرك على محور واحد في صندوق طول

١ م كرة مضادة كتلتها  $1 \text{ gm}$  تتحرك على محور واحد في صندوق طول  $1 \text{ m}$

الحل / يمكن استخدام المعادلة  $E = \frac{h^2}{8ma^2}$

٤٠

P / للإلكترون

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (10^{-9} \text{ m})^2} = 6.03 \times 10^{-20} \text{ J}$$

$$E_2 = 4E_1 = 4 \times 6.03 \times 10^{-20} \text{ J} = 2.41 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 2.41 \times 10^{-19} - 6.03 \times 10^{-20} = 1.807 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{(ev)}} = \frac{1.807 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.129 \text{ eV}$$

ب / لكرة المنصورة

$$E_1 = \frac{h^2}{2ma^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \times 10^3 \text{ kg} \times (1 \text{ m})^2} = 5.49 \times 10^{-65} \text{ J}$$

$$E_2 = 4E_1 = 4 \times 5.49 \times 10^{-65} \text{ J} = 2.19 \times 10^{-64} \text{ J}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 2.19 \times 10^{-64} - 5.48 \times 10^{-65} = 1.6 \times 10^{-64} \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{(ev)}} = \frac{1.6 \times 10^{-64}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.025 \times 10^{-45} \text{ eV}$$

مع المثال سيصبح ما يلي

\* في حالة الإلكترون الفرق في الطاقة بين الحالة الأولى والثانية

هو (1.129 eV) هو فرق محسوس ويمكن ملاحظته.

\* في حالة كرة المنصورة: الفرق في الطاقة بين الحالة الأولى والثانية

هو فرق صغير جداً (1.025 × 10<sup>-45</sup> eV) لا يمكن الإحساس به ولا يقاس عملياً.ولهذا تسمى الحالات (n=1)، (n=2) ... بنمودية وكأنيهما متطابقان  
بعضاً وكذلك تسمى الحالات.

\* أما الطاقة بتدور كأنها مستمرة ويمكن ملاحظة هذه نتيجة تجارب

الاستنتاج: في حالة الإحساس الكبيرة تكون (m α 1/n<sup>2</sup>)، فطاقة الإنتاج

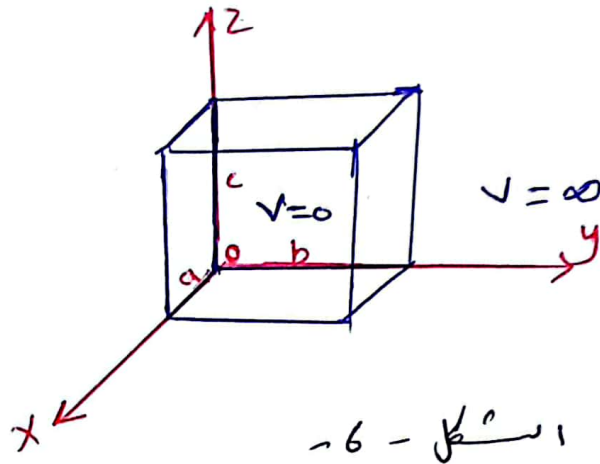
الاستنتاج: في حالة الإحساس الصغيرة (وهي إحدى صور قاعدة الطاقة)

### ٥-٣ الجسيم الحر في صندوق ذي الأبعاد الثلاثة

### The Free Particle in a Potential Box in Three Dimensions

نفترض ما يأتي :-

- جسيم حر داخل صندوق أبعاده  $a$  و  $b$  و  $c$  على التوالي .
- اصطلاح الصندوق مطابقة لمحاور الإحداثية  $(x, y, z)$  ،
- تقع نقطة الأصل  $(0, 0, 0)$  في إحدى زوايا الصندوق
- الجهد داخل الصندوق  $V=0$
- الجهد خارج الصندوق  $V=\infty$



- بالاعتماد على معادله شرودنجر عند المعقدة على الزمن

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z)$$

\* ضرب الطرفين ب  $-\frac{2m}{\hbar^2}$

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x, y, z)$$

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{نكتب}$$

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) = -K^2 \psi(x, y, z)$$

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(x, y, z)$$

\* حل المعادلة (٢٣) بطريقة فصل المتغيرات

$$\psi(x, y, z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, y, z) &= \Psi(y) \Psi(z) \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(x, y, z) &= \Psi(x) \Psi(z) \frac{\partial^2 \Psi(y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(x, y, z) &= \Psi(x) \Psi(y) \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \text{--- 25}$$

\* بتعويض 23 في 25

$$\Psi(y) \Psi(z) \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \Psi(x) \Psi(z) \frac{\partial^2 \Psi(y)}{\partial y^2} + \Psi(x) \Psi(y) \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} = -k^2 \Psi(x, y, z) \text{--- 26}$$

$$\frac{1}{\Psi(x)} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\Psi(y)} \frac{\partial^2 \Psi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{\Psi(z)} \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} = -k^2 \text{--- 27}$$

\* الحدود الثلاثة في الطرف الايسر مستقلة عن بعضها  
\* يجب ان تتساوى الحدود من خلال ثابت  $k$  اي كل حد يجب ان  
يساوي ثابتاً وهو  $(-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2)$   
\* نكتب ان فصل المعادلة 2.7 الى ثلاث معادلات

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi(x)} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} &= -k_x^2 \longrightarrow \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = -k_x^2 \Psi(x) \\ \frac{1}{\Psi(y)} \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} &= -k_y^2 \longrightarrow \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} = -k_y^2 \Psi(y) \\ \frac{1}{\Psi(z)} \frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} &= -k_z^2 \longrightarrow \frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} = -k_z^2 \Psi(z) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + k_x^2 \Psi(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} + k_y^2 \Psi(y) &= 0 \\ \frac{d^2 \Psi(z)}{dz^2} + k_z^2 \Psi(z) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- 28}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \text{ حيث } (N) \text{--- 28}$$

53

\* اكل العام للمعادلات هو :-

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x) &= A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x} \rightarrow \Psi(x) = C_x \sin k_x x = C_x \sin \frac{n_x \pi x}{a} \\ \Psi(y) &= A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y} \rightarrow \Psi(y) = C_y \sin k_y y = C_y \sin \frac{n_y \pi y}{b} \\ \Psi(z) &= A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z} \rightarrow \Psi(z) = C_z \sin k_z z = C_z \sin \frac{n_z \pi z}{c} \end{aligned} \right\} \text{---29}$$

$$\therefore k = \frac{n\pi}{L} \quad *$$

$$\therefore k_x = \frac{n_x \pi}{a}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{b}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{c}$$

\*  $(n_x, n_y, n_z)$  هي اعداد كمية تأخذ القيم 1, 2, 3, ...

$$\Psi(x, y, z) = C_x \sin \frac{n_x \pi x}{a} \cdot C_y \sin \frac{n_y \pi y}{b} \cdot C_z \sin \frac{n_z \pi z}{c} \quad \text{نكتب كتابة النواتج --- 30} \quad *$$

$$\therefore C = C_x C_y C_z$$

$$\therefore \Psi(x, y, z) = C \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \sin \frac{n_z \pi z}{c} \quad \text{--- 31}$$

\* معادلات (20)

$$C_x = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad C_y = \sqrt{\frac{2}{b}} \quad C_z = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

$$\therefore C = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{2}{c}}$$

$$\therefore C = \sqrt{\frac{8}{abc}}$$

$$\therefore \Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \sin \frac{n_z \pi z}{c} \quad \text{--- 3}$$

٢٤

مسألة / جد طاقة الجسيم في صندوق ذي ثلاثة أبعاد

الحل /

$$\therefore K^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad , \quad K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

$$\therefore K^2 = \pi^2 \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \quad \text{--- a}$$

$$\therefore K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{--- b}$$

بما أن  $a$  و  $b$  يتجانسان

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \quad \text{--- 33}$$

بافتراض أن الصندوق مكعب طوله  
 $a = b = c = L$

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \text{--- 34}$$

$$\therefore \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \left( \frac{h^2}{4\pi^2} \right)}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \text{--- 35}$$

بافتراض الحالة الأولى طوله  $n_x=1, n_y=1, n_z=1$

$$\therefore E_{111} = \frac{h^2}{8mL^2} (1+1+1) = \frac{3h^2}{8mL^2} \quad (\text{الطاقة } h) \quad \text{--- 36}$$

أيضا

$$E_{111} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (\text{الطاقة } \hbar)$$

$$\therefore E_{111} = 3E_1$$



## الحالات التالية

| $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ |
|-------|-------|-------|
| 2     | 1     | 1     |
| 1     | 2     | 1     |
| 1     | 1     | 2     |

بحسب معادلة (32) فإنها تمتلك ثلاث دوال موجية  
ولها نفس الطاقة بحسب (34) :- أي

$$E_{211} = E_{121} = E_{112} = \frac{6\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} = 2E_{111} = 6E_1$$

- توجد ثلاث دوال ممتلئة بغور مستوى طاقة واحد
- درجة الاغلاخ = عدد الدوال الموجية المختلفة (المتقلة) لنفس مستوى الطاقة

مثال /

جسيم كتلته  $m$  يتحرك في صندوق ممتلئ طول ضلعه  $L$ ، فإذا كانت إحدى موجياته أبعاد الكعب  $(n_x=2, n_y=1, n_z=3)$  فأحسب طاقة هذا المستوى  
وبين عدد الدوال الموجية المختلفة التي لها نفس الطاقة

الحل /

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$E_{213} = \frac{h^2}{8mL^2} (2^2 + 1^2 + 3^2) = 14 \frac{h^2}{8mL^2} \text{ Joule}$$

- رأى استخدام ثلاث الأرقام (بين) أنه هناك ست موجيات  
للأعداد التي تعطي نفس الطاقة
- \* درجة الاغلاخ = 6
  - \* ست دوال مختلفة لها نفس الطاقة الذاتية (نفس الطاقة)

مستويات الطاقة السقة الأولى ودرجة الاقلاق  
المقابلة لها لجسم كتلة  $m$  يتحرك في صندوق مكعب طول ضلعه  $L$

| الطاقة $E_{n_x, n_y, n_z}$ | التركيبة الممكنة لـ $n_x, n_y, n_z$                                | درجة الاقلاق $N$ |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------|
| $E_{111} = 3E_1$           | $(1, 1, 1)$                                                        | 1                |
| $E_{112} = 6E_1$           | $(1, 1, 2) (1, 2, 1) (2, 1, 1)$                                    | 3                |
| $E_{122} = 9E_1$           | $(1, 2, 2) (2, 1, 2) (2, 2, 1)$                                    | 3                |
| $E_{311} = 11E_1$          | $(3, 1, 1) (1, 3, 1) (1, 1, 3)$                                    | 3                |
| $E_{222} = 12E_1$          | $(2, 2, 2)$                                                        | 1                |
| $E_{123} = 14E_1$          | $(1, 2, 3) (1, 3, 2) (2, 1, 3) (2, 3, 1)$<br>$(3, 2, 1) (3, 1, 2)$ | 6                |

### 3-6 كثافة الحالات Density of States

\* عندما يكون صندوق الجهد صغير (  $a$  صغيرة )  
شأن مستويات الطاقة تفصولة عن بعضها البعض  
وهذا يشكل طيفاً خطياً

\* عندما يكون صندوق الجهد كبيراً جداً (  $a \rightarrow \infty$  )  
فإن مستويات الطاقة تكون عتريّة من بعضها البعض  
وهذا يشكل كثافة مستمرة

في هذا السور :-  
سنناقش عدد مستويات الطاقة لمدرن صغير  
من الطاقة لجسيم في داخل صندوق كبير جداً  
\* لهذا الموضوع تطبيقات عديدة  
• في مجال ضربار الحالة الصلبة  
• في الترموديناميك  
• في الفيزياء النووية

\* كثافة الحالات (كثافة لمستويات) النظام :-  
هي عدد الحالات لمدرن طاقة  
عند كل مستوى طاقة قابل انه يكون مشغولاً .

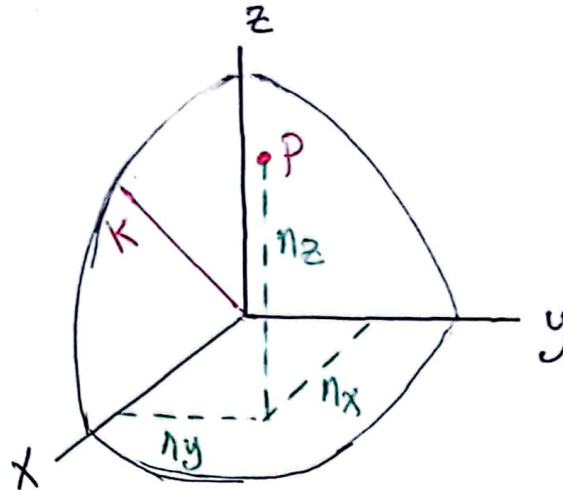
\* بعض عدد مستويات الطاقة في صندوق متعب الشكل  
وفق المعادلة :-

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$n_x, n_y, n_z$  هي أعداد صحيحة موجبة .  
ويطبق على حالة صندوق صغير جداً



- \* في حالة عندما يكون صندوق كبير (L كبيرة)
- بحسب عدد الحالات لدينا صغير للطاقة  $dE$
  - ندخل المحاور  $x, y, z$  لتقبل فضاءاً معيناً كما في الشكل -
  - كل نقطة في هذا الفضاء تمثل مستوى طاقة معين
  - كل نقطة تقابل خلية لوحدة الحجم في هذا الفضاء



- نفرض النقطة P في هذا الفضاء
- لها إحداثيات  $n_x, n_y, n_z$
- تقع على سطح كرة نصف قطرها K
- فيكون وصف K بالمعادلة

$$K^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

ولذلك

عدد النقاط التي لها إحداثيات  
بأعداد صحيحة موجبة أو تقع  
على سطح الكرة التي نصف  
قطرها K

عدد الحالات المرافقة  
لذلك المستوى  
في الطاقة

=

أي أنه ~

$$E = \frac{\pi^2 K^2}{2mL^2} K^2 \quad \text{--- 37}$$

٢٩

- لإيجاد عدد الحالات  $N(E)$  ذات الطاقة بين الصفر و  $E$ .

• فإلحظة أن هذا سيتوجب :-

• حساب هزذ الكرة الذي يمتلك فيه الأعداد

الكمية  $n_x, n_y, n_z$  متباً موجبة فقط

• يمثل هذا الهزذ ثلث (  $\frac{1}{8}$  ) حجم الكرة التي نصف

قطرها  $K$ .

٣٨

$$N(E) = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi K^3 \right) = \frac{\pi}{6} K^3 \quad \text{-----} \quad 38$$

$$\therefore K^2 = \frac{2mL^2 E}{\pi^2 \hbar^2}$$

$$\therefore K^3 = \left( \frac{2mL^2 E}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{-----} \quad 39$$

بتعويض  $38$  في  $39$

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{\pi}{6} \left( \frac{2mL^2 E}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6} \left( \frac{2mL^2 E}{\pi^2 \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8\pi L^3}{3h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} E^{\frac{3}{2}} \quad \text{---*} \end{aligned}$$

واجب / كيف تم التوصل الى (\*)

$$\therefore N(E) = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} E^{\frac{3}{2}} \quad \text{-----} \quad 40$$

$$V = L^3 \quad (\text{حجم الصندوق للعب})$$

٣.

- للحصول على عدد الحالات بطاقة محصورة بين  $E$  و  $E+dE$  ، بتفاضل معادلة - 40 -

$$\begin{aligned} dN(E) &= \frac{8\pi V}{3h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} \cdot dE^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4\pi V}{3h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} (E^{\frac{3}{2}-1}) dE \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE \quad \text{----- 41} \end{aligned}$$

let

$$dN(E) = g(E) dE$$

$$\therefore g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} \quad \text{----- 42}$$

\*  $g(E)$  هي كثافة الحالات عند الطاقة  $E$  ، وهي عدد الحالات لكل وحدة من الطاقة

\* ستستخدم معادلة (42) في موضوع الميكانيك الاحصائي الذي الذي يدخل في حواشي الحالة الصلبة . وفي الفيزياء النووية (الحسابات النظرية لاضمحلال بيتا)

\* في بعض الحالات يفضل كتابة عدد الحالات ضمن مدى الزخم  $dP$  المحصور بين الزخم  $P$  والزخم  $P+dP$  بدلاً من الطاقة .

ويمكن الحصول على ذلك باعتبار انه الجسيم داخل صندوق هو جسيم حر وطاقته  $E = \frac{P^2}{2m}$  .  
فإذا عرفنا  $g(P)$  بحيث

$$dN = g(P) dP = g(E) dE \quad \text{----- 43}$$



٣١

$$٥٨ \quad \frac{dN}{dP} = g(P) = g(E) \frac{dE}{dP} \quad \text{--- 44}$$

حيث ان :-

$$E = \frac{P^2}{2m}$$

$$\frac{dE}{dP} = \frac{d(\frac{P^2}{2m})}{dP} = \frac{P}{m}$$

من معادلة 42 و 44 فان :-

$$g(P) = g(E) \frac{dE}{dP} \\ = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} \cdot E^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{P}{m}$$

$$\therefore E = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow E^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{(2m)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore g(P) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{P}{(2m)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{P}{m}$$

$$\therefore g(P) = \frac{4\pi V}{h^3} \cdot P^2 \quad \text{--- 45}$$

\* يمكن استخدام المعادلة الأخيرة :-  
 لحساب الانماط modes لتذبذب الجزيئات الكهرومغناطيسية  
 في تجويف cavity حجمه  $V$ .  
 ونستخدم نموذج صندوق حالة التردد في رسمه، لطول الموجة  $\lambda$

$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{v}$$

$$P^2 = \frac{h^2 f^2}{v^2} \quad \text{--- (تربيع P)}$$

$$\frac{dP}{df} = \frac{h}{v} \quad \text{--- (تفاضل P)}$$

yes

where

$$g(f) df = g(p) dp \quad \text{----- 46}$$

~ 45

$$g(f) = \frac{g(p)}{df} dp = g(p) \frac{dp}{df}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \cdot p^2 \frac{dp}{df}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \cdot \frac{h^2 f^2}{v^2} \cdot \frac{h}{v}$$

$$\therefore g(f) = \frac{4\pi V}{v^3} f^2 \quad \text{----- 47}$$

### Potential Step 7-3 الجهد درهين لشل

\* صندوق الجهد ذي البعد الواحد يكون ذا ارتفاع لا نهائي  
بمعنى ان الطاقة الكامنة  $V = \infty$ .

\* اما ارتفاع potential step (الجهد درهين لشل) او مدرج جهد  
يكون محدود

\* جي هذا البند :-

مناقش تناذية وانعطاف جسم ساقط  
على عتبة جهد (مدرج جهد)

\* وفقاً للميكانيك الكلاسيكي  
- جسم كتلة  $m$  سينفذ خلال العتبة او الحاجر  
عندما

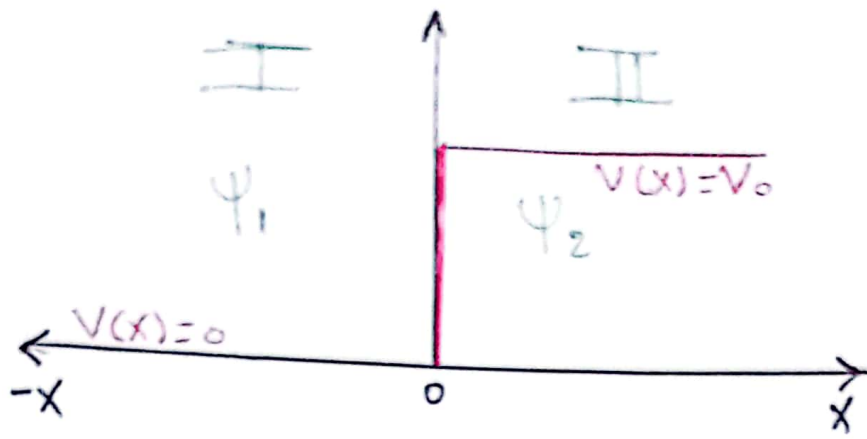
طاقة الجسم  $<$  جهد العتبة

- جسم كتلة  $m$  سينعكس ويرتد  
عندما

طاقة الجسم  $>$  جهد العتبة

\* وفقاً للميكانيك الكمي  
ليس من الضروري ان ينفذ الجسم من الحاجر  
حتى لو كانت طاقته اكبر من جهد العتبة.





$V(x) = 0$  when  $x < 0$  (المنطقة I)

$V(x) = V_0$  when  $x \geq 0$  (المنطقة II)

ملاحظات

\* عند النقطة  $x_0 = 0$  ، تتغير الطاقة الكامنة  
لغیراً محدوداً من  $V(x) = 0$  إلى  $V(x) = V_0$  ، حيث  
أن  $V_0$  ثقل مقداراً ثابتاً .

\* ينبغي عند هذه النقطة أن تكون الدالة الموجية  
 $\psi(x)$  متصلة وكذلك مشتقتها .

\* يجب أن تتصرف الدالة الموجية  $\psi(x)$  تصرفاً

مقبولاً بحيث

$$\psi(x) \rightarrow 0 \text{ when } x \rightarrow \pm\infty$$

\* يعتبر الجسم هراً في المنطقتين ما عدا بالقرب

من نقطة الاصل ( $x=0$ ) حيث يتعرض عند اصطدامه بجهاز الجهد  
الجهد عند هذه النقطة لقوة دفع تتجه نحو اليسار بسبب القوة  
التي تمثلها العلاقة

$$F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{--- -- -- 48}$$

٣٥

باستعمال معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن المنطقتين:

في المنطقة I

$$V(x) = 0 \text{ when } x < 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} = E \psi_1(x) \text{ ----- 49}$$

في المنطقة II

$$V(x) = V_0 \text{ when } x > 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} + V_2(x) \psi_2(x) = E \psi_2(x) \text{ ----- 50}$$

$$\therefore \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1 \psi_1 = 0 \text{ ----- 49'} \text{ (I)}$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + k_2 \psi_2 = 0 \text{ ----- 50'} \text{ (II)}$$

منه نلاحظ \*

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2)$$

\* حل معادلتين 49' و 50' \*

$$\psi_1(x) = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x} \quad (x < 0) \text{ ----- 49''}$$

$$\psi_2(x) = C e^{i k_2 x} + D e^{-i k_2 x} \quad (x > 0) \text{ ----- 50''}$$

الاحالة الحرة للطاقات

الحالة الاولى ( $E < V_0$ )

عندما تكون طاقة الجسيم الحرة الساقطة اقل من ارتفاع حاجز الجهد.

هنا يكون حل معادلة شرودنجر في المنطقتين I و II :-

$$\psi_1(x) = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x} \quad x < 0 \quad \text{--- 51}$$

$$\psi_2(x) = C e^{-k_2 x} + D e^{k_2 x} \quad x > 0 \quad \text{--- 52}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad (E > V) \quad \text{حيث } *$$

$$k_2' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (E < V)$$

ملاحظة مهمة

عندما  $E < V$  يؤدي الى وجود جذر حقيقي  $\sqrt{-1}$  وبالتالي يتبدل في المعادلة 50 وهذا يؤدي الى (-1) حيث انه  $(i = -1)$

\* انه D و C و B و A هي ثوابت محددة وتسمى مع تطبيق الشروط المحدودية للمسألة التي نبحث فيها، وهي :-

① انه الدالة المرحية  $\psi(x)$  ذات قيمة محددة بحدود، ويجب ان تتلاشى في المالا نهاية (0) وتساوي صفراً.  
\* وهذا ما لا يوفر في الدالة  $\psi(x)$  بسبب احد  $(D e^{k_2 x})$  الذي يزداد بزيادة  $x$  وتغير قيمته مالا نهاية عند  $(x = \infty)$

② يجب ان نضع قيمة الثابت D مساوية للصفر كي نضع الدالة مقبولة



\* اما الحد الاول في المعادلة 52 فهو يمثل تناقص قيمة الدالة الموجية للجسيم أي انه

$$\left( \psi_2(x \rightarrow \infty) = C e^{-k_2 x} \right)_{x \rightarrow \infty}$$

وكما صيغ بالمثل - - -

$$\therefore \psi_2(x) = C e^{-k_2 x} \text{ --- 53}$$

\* ١١ حقيقة كون  $\psi_2$  لاستاوي صفرأ يعني :-  
انه صانك احتمالاً لتواجد الجسيم في المنطقة المحظورة  
وفقاً لميكانيكا الكلاسيكي، وانه هذه الاحتمالية تقل مع زيادة  $x$ .

⑨ انه الدالة  $\psi(x)$  مستمرة الاولى مستمرتان في جميع نقاط الفضاء.

ينتج عند نقطة الاتصال ( $x=0$ )

$$\textcircled{1} \psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$$

$$\textcircled{2} \left. \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

الشرط الاول) \* عند  $x=0$  معادلة 53 = معادلة 54

$$A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} = C e^{-k_2 x}$$

$$\therefore A e^0 + B e^0 = C e^0$$

$$A + B = C \text{ --- 54}$$

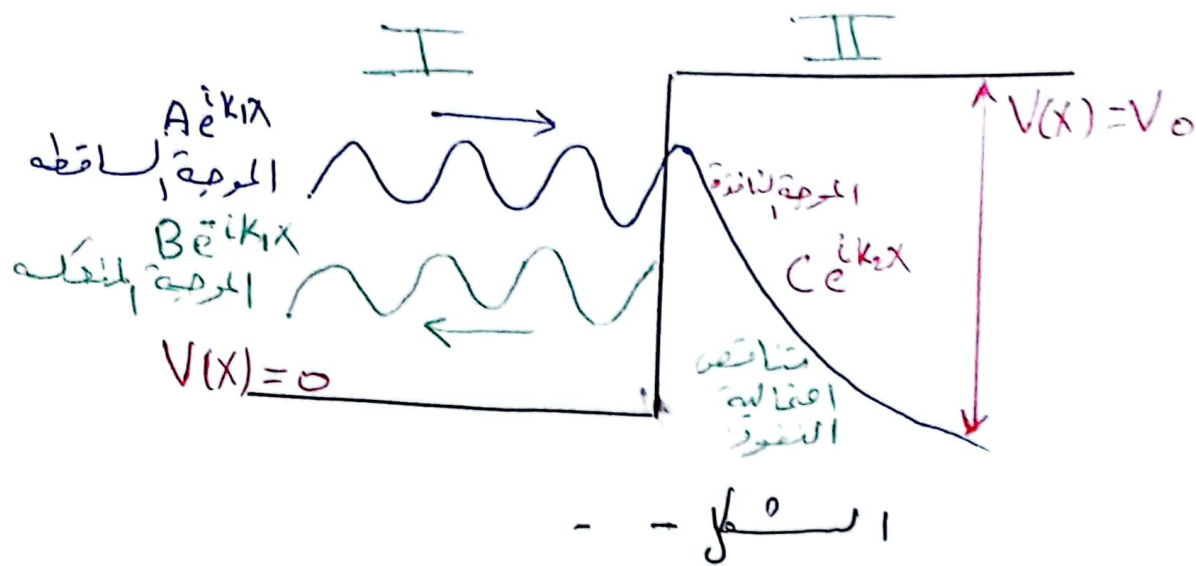
٣٨

(الشرط الثاني) \* بعد اشتقاق وإسقاط وقت الشرط الحدودي الثاني

$$A i k_1 e^{i k_1 x} + B (-i k_1) e^{-i k_1 x} = C (-k_2) e^{-k_2 x}$$

$$A i k_1 e^0 + B (-i k_1) e^0 = C (-k_2) e^0$$

$$\therefore i k_1 (A - B) = -k_2 C \quad \text{----- 55}$$



\* لايجاد النسبة  $(\frac{B}{A})$  بين الموجة المنعكسة الى الموجة الساقطة

\* لغرض معادلة 54 في 55

$$i k_1 (A - B) = -k_2 (A + B)$$

$$i k_1 A - i k_1 B = -k_2 A - k_2 B$$

$$i k_1 A + k_2 A = i k_1 B - k_2 B$$

$$(i k_1 + k_2) A = (i k_1 - k_2) B$$

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{i k_1 + k_2}{i k_1 - k_2} \quad \text{----- 56}$$

\* لايجاد امكانية النظام لوحدة مع نسبة الجهد

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{B}{A} \right|^2 &= \left( \frac{B}{A} \right)^* \left( \frac{B}{A} \right) \\
 &= \left( \frac{iK_1 + K_2}{iK_1 - K_2} \right)^* \left( \frac{iK_1 + K_2}{iK_1 - K_2} \right) \\
 &= \left( \frac{-iK_1 + K_2}{-iK_1 - K_2} \right) \left( \frac{iK_1 + K_2}{iK_1 - K_2} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

وهذا نسبة الانعكاسية = 1 اي انه لا

\* لايجاد النسبة  $\left( \frac{C}{A} \right)$  بين لوحدة النافذة مع لعينة (عينة كبر) واحة الساقطة على العينة

$$B = C - A \quad \text{مع معادلة 54}$$

$$iK_1(A - C + A) = -K_2 C \quad \text{مع معادلة 55}$$

$$2iK_1 A - iK_1 C = -K_2 C$$

$$2iK_1 A = iK_1 C - K_2 C$$

$$2iK_1 A = (iK_1 - K_2) C$$

$$\therefore \frac{C}{A} = \frac{2iK_1}{iK_1 - K_2} \quad \text{----- 57}$$



\* لايجاد احتمالية عبور الموجة من عتبة الجهد

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{C}{A} \right|^2 &= \left( \frac{C}{A} \right)^* \left( \frac{C}{A} \right) \\
 &= \left( \frac{2iK_1}{iK_1 - K_2} \right)^* \left( \frac{2iK_1}{iK_1 - K_2} \right) \\
 &= \left( \frac{-2iK_1}{-iK_1 - K_2} \right) \left( \frac{2iK_1}{iK_1 - K_2} \right) \\
 &= \frac{4K_1^2}{K_1^2 + K_2^2} \neq 0
 \end{aligned}$$

\* وهذا المعيار لا يادى صفراً  
لان

$$K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \neq 0$$

$$K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_2 - E) \neq 0$$

\* احتمالية اختراق عتبة الجهد لا تساوي صفر  
لهذا يعني :-

.. احتمالية مغادر الجسيم

من عتبة الجهد وبدون انه يصل على الطاقة الكافية ، حيث انه طاقة  $(E < V)$  ، وهذا مخالف لمفاهيم الميكانيك الكلاسيكي

\* تتوافق هذه الاحتمالية بدرجة خفيفة الكايز حتى تتلاشى  
بعد مسافة قصيرة بسبب العامل  $\propto K_2^2 x$

مسافة المسافة تزداد قصراً

كلما زاد الفرق بين الطاقة وعتبة الجهد  
 $(V_2 - E)$

اي كلما قلت طاقة الجسيم لطاقته  $E$   
أو زاد ارتفاع العتبة  $V$

سؤال: حدد تيار الاحتمالية الساقطة والمنعكسة والنافذة ومعامل الانعكاس عندما يسقط جسيم طاقته  $E$  وكتلته  $m$  على عتبة جهد ارتفاعها  $V_0$  عندما  $(E < V_0)$ . ثم بين ماذا تستنتج من هذه الحسابات..  
الحل: من المعادلة العامة لحساب تيار الاحتمال (راجع الفصل الثاني):

$$J(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

\* الموجة الساقطة يمثلها الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة 3.51.  $(Ae^{ik_1x})$

$$\begin{aligned} \therefore J_I &= \frac{\hbar}{2mi} \left( (A^* e^{-ik_1x}) \frac{d(Ae^{ik_1x})}{dx} - (Ae^{ik_1x}) \frac{d(A^* e^{-ik_1x})}{dx} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} \left( (A^* e^{-ik_1x}) (Aik_1) e^{ik_1x} - (Ae^{ik_1x}) (A^* (-ik_1)) e^{-ik_1x} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} (A^* A ik_1 + A A^* ik_1) = \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 \end{aligned}$$

\* الموجة المنعكسة يمثلها الحد الثاني في الطرف الأيمن للمعادلة 3.51:  $(Be^{-ik_1x})$

$$\begin{aligned} J_R &= \frac{\hbar}{2mi} \left( (B^* e^{ik_1x}) \frac{d(Be^{-ik_1x})}{dx} - (Be^{-ik_1x}) \frac{d(B^* e^{ik_1x})}{dx} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} \left( (B^* e^{ik_1x}) (B(-ik_1)) e^{-ik_1x} - (Be^{-ik_1x}) (B^* ik_1) e^{ik_1x} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} (-B^* B ik_1 - B B^* ik_1) = -\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 \end{aligned}$$

$$Refl. = -\frac{J_R}{J_I} = -\frac{-\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2} = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

وتشير الإشارة السالبة في علاقة معامل الانعكاس إلى سريان التيار بالاتجاه السالب لمحور  $x$ . وقد تقدم

عند إيجاد احتمالية انعكاس الموجة عن عتبة الجهد أن  $\left( \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1 \right)$

$$\therefore Refl. = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1$$

وهذا يعني أن تيار الاحتمال الساقط والمنعكس متساويان، وهذا يتواءم مع الميكانيك التقلّدي الذي يُحتم أن يكون الانعكاس كلياً في هذه الحالة.

• الموجة النافذة تمثلها المعادلة 3.53.

$$J_T = \frac{h}{2mi} \left( (C e^{-k'_2 x}) \frac{d(C e^{-k'_2 x})}{dx} - (C e^{-k'_2 x}) \frac{d(C e^{-k'_2 x})}{dx} \right) = 0$$

ومساواة تيار الاحتمال للموجة النافذة  $(C e^{-k'_2 x})$  للصفر يعني أنه لكل جسيم ساقط على العتبة سيكون لدينا جسيم منعكس عنه. أي إن الجسيم لا ينفذ.

قد يبرز سؤال هنا، وهو أن نسبة الانعكاسية تبلغ  $100\%$  مما يوحي أن الموجة تنعكس كلياً ولا يحدث أي اختراق لعتبة الجهد، ولكننا لاحظنا أن هنالك احتمالاً للاختراق مقداره  $\left( \frac{4k_1^2}{k_1^2 + k_2'^2} \right)$  على يمين الحاجز. كما إن تيار الاحتمال للجهة اليمنى أيضاً يساوي صفراً. فكيف نوفق بين الأمرين؟

لتوضيح الأمر نقول إن الجسيم ككل يمثل حزمة موجية بينما الدالة الموجية  $(C e^{-k'_2 x})$  ما هي إلا إحدى مركبات هذه الحزمة. فحينما يسقط الجسيم على العتبة فإن جزءاً من الحزمة الموجية يخترقها، إلا أن تضافول الاحتمالية بسرعة كبيرة يمين العتبة وكون تيار الاحتمال يساوي صفراً يؤدي إلى انعكاس الحزمة الموجية بكاملها (أي ارتداد الجسيم) وعودتها بالاتجاه المعاكس لسقوطها.

الحالة الثانية ( $E > V_0$ )

عندما تكون طاقة الجسيم الحر الساقط أكبر

من ارتفاع حاجز الجهد

الميكانيك الكلاسيكي

يفترض في هذه الحالة أن هذا الجسيم وجميع

الجسيمات الساقطة على الحاجز بهكذا طاقة ستجتازه

أي أنه -  
احتمالية المرور عبر الحاجز هي ١٠٠٪الميكانيك الكمي  
الميكانيك الكمي رأياً آخر منفرداً عما يلي :-

لا يكون حل معادلة شرودنجر

$$\psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad \text{--- 58 } (x < 0) \quad \text{I المنطقة}$$

$$\psi_2(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} \quad \text{--- 59 } (x > 0) \quad \text{II المنطقة}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

\* يفترض أن الجسيم يسقط من اليسار إلى اليمين

ولذا نحسب :-

عدم وجود دالة موجية منعكسة في المنطقة الثانية

في المنطقة اليمنى | عند  $x > 0$ ولهذا :-  
يجب أن يكون الثابت D مساوياً صفرًا، ولنحذفالحد  $D e^{-ik_2 x}$  في 59 وتصبح على الشكل الآتي :-

$$\psi_2(x) = C e^{ik_2 x} \quad x > 0 \quad \text{--- 60}$$



\* بتطبيق الشروط الحدودية  
حيث أن الدالة  $\psi(x)$  مستمرة الأولى مستمرة في  
جميع نقاط الفضاء:

$$\textcircled{1} \psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$$

$$\textcircled{2} \left. \frac{d\psi_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

\* عند  $x=0$  فإن  $\psi$  متصلة  $\psi = 58$  متصلة  $\psi = 60$

$$\therefore A+B=C \quad \text{-----} \quad 61$$

\* بعد الاشتقاق والمعادلة  
(وضع الشرط الحدودي الثاني)

$$Aik_1 e^{ik_1 x} + B(-ik_1) e^{-ik_1 x} = C (ik_2) e^{ik_2 x}$$

$$Aik_1 e^0 + B(-ik_1) e^0 = C (ik_2) e^0$$

$$\therefore ik_1(A-B) = ik_2 C \quad \text{-----} \quad 62$$

\* بتعويض 61 في 62

$$ik_1(A-B) = ik_2(A+B)$$

$$ik_1 A - ik_1 B = ik_2 A + ik_2 B$$

$$ik_1 A - ik_2 A = ik_1 B + ik_2 B$$

$$A(ik_1 - ik_2) = B(ik_1 + ik_2)$$

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{-----} \quad 63$$

٤٥

$$\frac{C}{A} = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} \text{ ----- 64}$$

ويكون معامل انعطاف المرحلة عند عتبة الجهد

$$R = \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2} \text{ ----- 65}$$

ويكون معامل نفاذ المرحلة من عتبة الجهد

$$T = \frac{4K_1K_2}{(K_1 + K_2)^2} \text{ ----- 66}$$

$$R + T = 1 \text{ ----- 67} \quad \text{مع العلم ان :-}$$

ملاحظة

\* هذه النتيجة مفهومة لانه مجموع الاحتمالات يساوي واحداً دائماً.  
\* هذه العملية تنسب عملية مرور شعاع ضوئي من وسط الى وسط آخر يختلفان معامل الانكسار.  
عما يشع شعاع منكس وآخر منكسر نافذ من لوسط الاول الى الوسط الثاني

\* يستنتج من ذلك ان الجسم يتصرف كموجة ولا يتصرف كجسيم لان فكرة انعطاف الجسم يرفضها الميكانيك الكلاسيكي.

\* مع ناحية الكثر ان الجسميات تتغلب على الحاجز وتخترقه

بطاقتة هركية E-V.

راجعاً / انشيت العلاقات 65 ، 66

سؤال: احسب معامل الانعكاس  $R$  ومعامل النفاذ  $T$  عندما يسقط حسيم طاقته  $E$  وكتلته  $m$  على عتبة جهد ارتفاعها  $V_0$  عندما  $(E > V_0)$ . ثم جد ناتج  $(R + T)$

الحل: كما تقدم فإن معامل الانعكاس يُعطى بالعلاقة:  $Refl. = -\frac{I_R}{I_I}$

حيث  $I_I$  يمثل تيار الاحتمالية للموجة الساقطة و  $I_R$  يمثل تيار الاحتمالية للموجة المنعكسة. ومن المعادلة العامة لحساب تيار الاحتمال:

$$J(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

\* الموجة الساقطة يمثلها الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة 3.58  $(Ae^{ik_1x})$ .

$$\therefore J_I = \frac{\hbar}{2mi} \left( (A^* e^{-ik_1x}) \frac{d(Ae^{ik_1x})}{dx} - (Ae^{ik_1x}) \frac{d(A^* e^{-ik_1x})}{dx} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left( (A^* e^{-ik_1x})(Aik_1)e^{ik_1x} - (Ae^{ik_1x})(A^*(-ik_1))e^{-ik_1x} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} (A^* Aik_1 + AA^* ik_1) = \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2$$

\* الموجة المنعكسة يمثلها الحد الثاني في الطرف الأيمن للمعادلة 3.58  $(Be^{-ik_1x})$ :

$$J_R = \frac{\hbar}{2mi} \left( (B^* e^{ik_1x}) \frac{d(Be^{-ik_1x})}{dx} - (Be^{-ik_1x}) \frac{d(B^* e^{ik_1x})}{dx} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left( (B^* e^{ik_1x})(B(-ik_1))e^{-ik_1x} - (Be^{-ik_1x})(B^* ik_1)e^{ik_1x} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} (-B^* B ik_1 - BB^* ik_1) = -\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2$$

$$R = -\frac{J_R}{J_I} = -\frac{-\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2} = \left| \frac{B}{A} \right|^2$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{ومن معادلة 3.63}$$

$$\therefore R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

\* أما معامل النفاذ فيعطى بالعلاقة:  $T = \frac{I_T}{I_I}$ ، والموجة النافذة تمثلها المعادلة 3.60.

$$J_T = \frac{\hbar}{2mi} \left( (C^* e^{-ik_2x}) \frac{d(Ce^{ik_2x})}{dx} - (Ce^{ik_2x}) \frac{d(C^* e^{-ik_2x})}{dx} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left( (C^* e^{-ik_2x}) C ik_2 e^{ik_2x} - (Ce^{ik_2x}) C^* (-ik_2) e^{-ik_2x} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} (C^* C ik_2 - CC^* (-ik_2)) = \frac{\hbar}{2mi} (2ik_2 CC^*) = \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2$$

Σ✓

$$T = \frac{J_T}{J_I} = \frac{\frac{\hbar k_2}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2} = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{C}{A} \right|^2 =$$

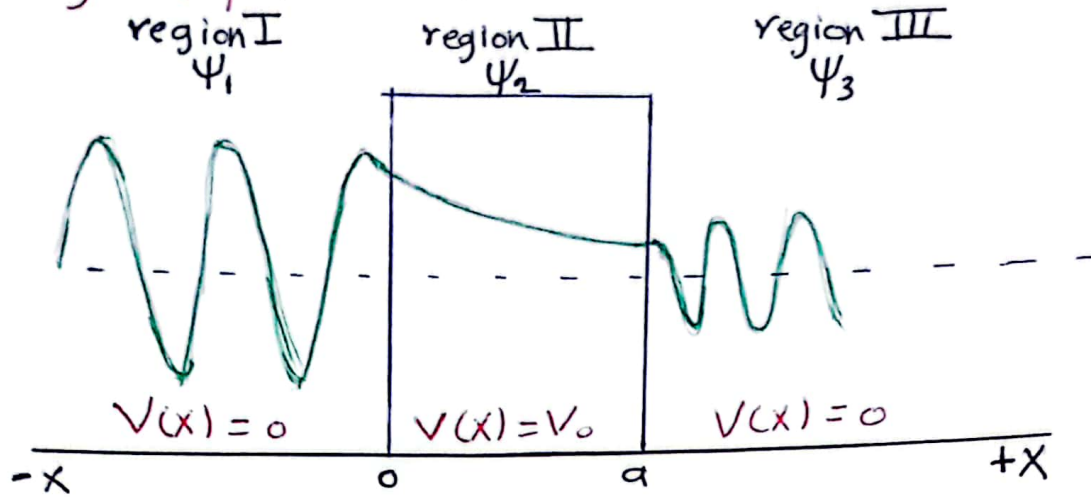
$$\therefore \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (\text{from eq. 3.64})$$

$$\therefore T = \frac{k_2}{k_1} \frac{(2k_1)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$\begin{aligned} R + T &= \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2 + 4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \\ &= \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 1 \end{aligned}$$



### 3- حاجز الجهد المستطيل بارتفاع محدود Rectangular Potential Barrier with Finite Height



شكل - -

يصف حاجز الجهد

- \* عرض حاجز الجهد محدود وهو  $a$
- \* ارتفاع حاجز الجهد محدود وهو  $V_0$
- \* يعترض حاجز الجهد هذا حركة جسيم مرئي بعد واحد وطاقته  $E$ .

\* يتحرك الجسيم من اليسار لليمين باتجاه محور  $x$

في ميكانيك الكلاسيكي

- \* إذا كانت طاقة الجسيم  $E$  أكبر من طاقة حاجز الجهد  $V_0$  أي  $(E > V_0)$  فإنه سيجتاز الحاجز هتاً.

- \* إذا كانت طاقة الجسيم  $E$  أقل من طاقة حاجز الجهد  $V_0$  أي  $(E < V_0)$  فإنه لا يمكنه الا اجتاز

في الميكانيك الكمي

لا يقر بانقراضات الميكانيك الكلاسيكي

صالة هاليتين للطاقة من وجهة نظر الميكانيك الكمي

الحالة الأولى  $(E < V_0)$  عندما تكون طاقة الجسم الحرة اقل من

الارتفاع من ارتفاع حاجز الجهد

\* تكون دالة الجهد كما يأتي :-

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{when } x < 0 & (\text{region I}) \\ V(x) &= V_0 \quad \text{when } 0 \leq x \leq a & (\text{region II}) \\ V(x) &= 0 \quad \text{when } x > a & (\text{region III}) \end{aligned}$$

\* كتابة معادلة شرودنجر للمعقدة على الزمن TISE للمناطق الثلاث

في المنطقة الأولى

$$V(x) = 0 \rightarrow x < 0$$

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + K_1^2 \psi_1 = 0 \quad \text{----- 68}$$

في المنطقة الثانية

$$V(x) = V_0 \rightarrow 0 \leq x \leq a$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + K_2^2 \psi_2 = 0 \quad \text{----- 69}$$

في المنطقة الثالثة

$$V(x) = 0 \rightarrow x > a$$

$$\frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + K_1^2 \psi_3 = 0 \quad \text{----- 70}$$

$$K_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad , \quad K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)$$

\*  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  هي الدوال الموجبة التي تصف الجسيم في المناطق I, II, III على التوالي

\* حل المعادلات 68, 69, 70 هو:  $\psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$  ----- 68'

$\psi_2(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$  ----- 69'

$\psi_3(x) = F e^{ik_1 x} + G e^{-ik_1 x}$  ----- 70'

ملاحظة  
~~~~~

* نلاحظ أن ψ_1 في المعادلة 68 تمثل رياضياً موجبة ساقطة وأخرى منعكسة عن حاجز الجهد عند $(x=0)$.

* نلاحظ أن ψ_2 في المعادلة 69 تمثل موجبتين أيضاً إحداهما ساقطة على الحاجز عند $(x=a)$ والاخرى منعكسة عنه.

* $\psi_2 \neq 0$ $\forall (x=a)$

°° انهما تستمر في المنطقة III متمصلة بالدالة ψ_3 في المعادلة 70 والتي فيها موجبتان واحدة نافذة بالاتجاه الموجب لمحور x والاخرى منعكسة سير عكس اتجاه الموجة النافذة.

* °° ١١ الفرضية تقول :-

١١ الجسيم يسقط على الحاجز من جهة اليسار

فلا وجود لموجة منعكسة في المنطقة III لهذا :-

$$G=0$$

وتصبح معادلة دالة الموجة في III بالكلية الآتي

$$\psi_3(x) = F e^{ik_1 x} \quad (x > 0) \quad \text{----- 70''}$$

المحصلة
~~~~~

انه حتى لو كانت طاقة الجسم الواحد أقل من طاقة جهاز  
الجهد طانه يمكن أن يحدث اختراق للجهاز، أي يوجد احتمال لهذا الاختراق.

وإذا كانت هناك جهات متعددة تنقل طاقة الحمل من  
طاقة جهاز الجهد فحينئذ يمكن أن يحدث بعضها جهاز الجهد وينعكس البعض الآخر.

وهذا الاختراق هو التهرب الكمي أو التنفق

وسمي هكذا لان الجسم يبدو وكأنه اختراق جهاز الجهد من خلال نفق  
فيه لأن طاقته غير كافية.



الحالة الثانية  
 عندما تكون طاقة الجسيم الحرة الساقطة  
 أكبر من ارتفاع حاجز الجهد

في الميكانيك الكلاسيكي  
 يمر جميع الجسيمات الساقطة على حاجز  
 الجهد سوف يعبر الحاجز إلى المنطقة الثالثة.

في الميكانيك الكمي  
 ننتقل إلى احتمالية التواجد لبعض الجسيمات  
 بعد اصطدامها بالحاجز عند النقطتين  $(x=0)$  و  $(x=a)$  وامتدادها  
 إلى الخلف كما يأتي.

\* حل معادلة شرودنجر في المناطق الثلاثة :-

في المنطقة الأولى  
 $V(x)=0 \rightarrow x < 0$   
 $\psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$   
 ----- 71

في المنطقة الثانية  
 $V(x)=V_0 \rightarrow 0 \leq x \leq a$   
 $\psi_2(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$   
 ----- 72

في المنطقة الثالثة  
 $V(x)=0 \rightarrow x > a$   
 $\psi_3(x) = F e^{ik_1 x} + G e^{-ik_1 x}$   
 ----- 73

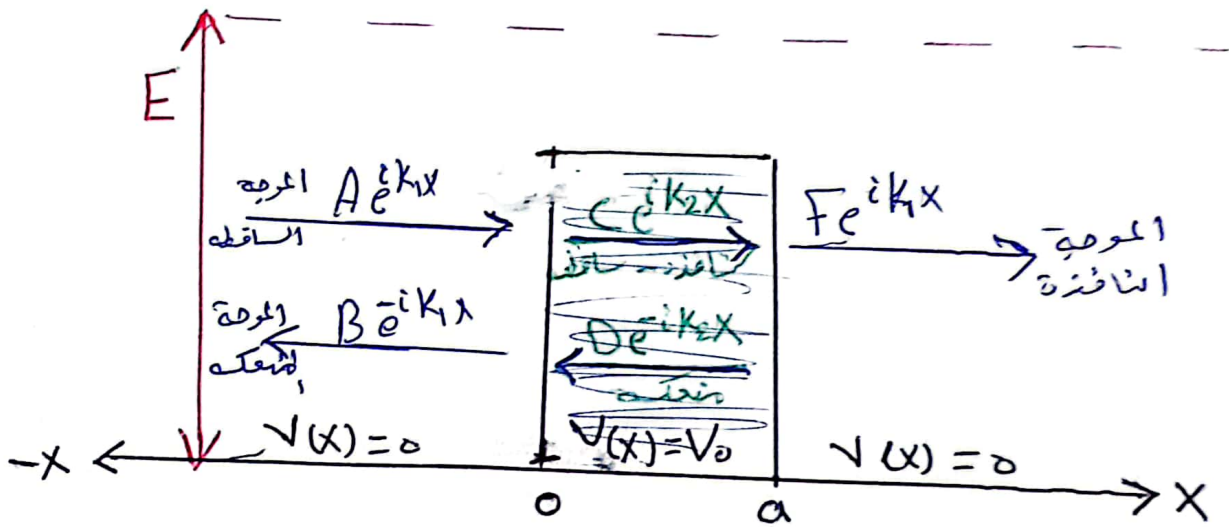
$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)$$

ملاحظة

ولعدم وجود موجة منعكسة خارج المنطقة III يكون  
 $G = 0$

ولصبح معادلة حالة الموجة بالشكل الآتي

$$\Psi_3(x) = F e^{i k_1 x} \quad (x > a) \quad \text{--- 73'}$$



## أمثلة متنوعة:

(1) احسب فرق الطاقة بين مستويي طاقة الأمفر ( $n = 2$ ) والحالة الأرضية ( $n = 1$ ) بوحدة الجول وبوحدة إلكترون-فولت لكل معاً يأتي:

أ- كرة كتلتها 50g تتحرك على محور واحد من ملعب طوله 100m.

ب- دقيقة ألفا متحركة في أنبوب طوله 10m داخل معجل، (كتلة دقيقة ألفا =  $6.644 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).

ج- إلكترون في حيز طوله 0.15nm. ثم قارن بين النتائج.

الحل: أ- بالنسبة للكرة:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \rightarrow E_1 = \frac{1^2 \times (6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \times (50 \times 10^{-3} \text{ kg}) \times (100\text{m})^2} = 1.097 \times 10^{-70} \text{ J}$$

$$E_2 = 2^2 E_1 = 4 \times 1.097 \times 10^{-70} = 4.39 \times 10^{-70} \text{ J}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 4.39 \times 10^{-70} - 1.097 \times 10^{-70} = 3.293 \times 10^{-70} \text{ J}$$

$$= \frac{3.293 \times 10^{-70}}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.05 \times 10^{-51} \text{ eV}$$

ب- لدقيقة ألفا:

$$E_1 = \frac{1^2 \times (6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \times (6.644 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (10\text{m})^2} = 8.26 \times 10^{-44} \text{ J}$$

$$E_2 = 4E_1 = 4 \times 8.26 \times 10^{-44} = 3.30 \times 10^{-43} \text{ J}$$

$$\Delta E = 3.30 \times 10^{-43} - 8.26 \times 10^{-44} = 2.47 \times 10^{-43} \text{ J} = \frac{2.47 \times 10^{-43}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.54 \times 10^{-24} \text{ eV}$$

ج- للإلكترون:

$$E_1 = \frac{1^2 \times (6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s})^2}{8 \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (0.15 \times 10^{-9} \text{ m})^2} = 2.68 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_2 = 4E_1 = 4 \times 2.68 \times 10^{-18} = 1.07 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$\Delta E = 1.07 \times 10^{-17} - 2.68 \times 10^{-18} = 8.04 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$= \frac{8.04 \times 10^{-18}}{1.6 \times 10^{-19}} = 50.25 \text{ eV}$$

في حالة الإلكترون فإن الفرق في الطاقة بين الحالة الأولى والثانية (50.25 eV) هو فرق محسوس ويمكن قياسه، والطاقة منقطعة ومكممة. أما بالنسبة للكرة ولدقيقة ألفا فإن هذا الفرق صغير جداً، ولهذا فإن الحالتين ( $n = 1$ ) و ( $n = 2$ ) تبدوان وكأنهما متطابقتان. أي إن الطاقة تبدو وكأنها مستمرة وغير مكممة، وهذه نتيجة تقليدية. أي: عندما يكون ( $h^2 \ll ma^2$ ) فإن النتائج الكمية والتقليدية تتطابق، وهذه إحدى صور قاعدة التطابق.



(2) إذا تحرك جسيم كتلته  $(1 \times 10^{-27} g)$  داخل صندوق على خط واحد طوله  $0.3nm$ ، وقفز من المستوى  $(n = 2)$  إلى المستوى  $(n = 1)$  فجد الطول الموجي للضوء المنبعث.  
الحل: تُعطى طاقة الفوتون المنبعث عند انتقال جسيم بين مستويي طاقة بالعلاقة:

$$\Delta E = h\nu \Rightarrow h\nu = E_2 - E_1 = \frac{2^2 h^2}{8ma^2} - \frac{1^2 h^2}{8ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

$$\therefore \nu = \frac{3h}{8ma^2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\therefore \lambda = \frac{8ma^2 c}{3h} = \frac{8 \times (1 \times 10^{-27} \times 10^{-3} kg) \times (0.3 \times 10^{-9} m)^2 \times (3 \times 10^8 m/s)}{3 \times 6.626 \times 10^{-34} J.s}$$

$$= 1.086 \times 10^{-7} m = 108.6nm$$

(3) يتواجد جسيم في الحالة الأرضية داخل منخفض جهد ارتفاعه لا نهائي وطوله  $L$ . احسب احتمالية تواجد الجسيم في النصف المتوسط من بئر الجهد هذا، أي بين  $x = L/4$  و  $x = 3L/4$ .  
الحل: تُعطى كثافة الاحتمالية للحالة الأرضية بالعلاقة

$$P = \int_{L/4}^{3L/4} |\Psi_n|^2 dx = \left(\frac{2}{L}\right) \int_{L/4}^{3L/4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

وباستخدام العلاقة:  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$$P = \left(\frac{1}{L}\right) \int_{L/4}^{3L/4} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right] dx = \left(\frac{1}{L}\right) \left[ x \Big|_{L/4}^{3L/4} - \left(\frac{L}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \Big|_{L/4}^{3L/4} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{L}\right) \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{2\pi} (\sin 1.5\pi - \sin 0.5\pi) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} (-1 - 1) = 0.818$$

وهذه النتيجة أكبر بكثير من القيمة المتوقعة لجسيم تقليدي يقضي أوقاناً متساوية في كل أجزاء البئر.

(4) سقطت الإلكترونات بعضها طاقته  $1eV$  والبعض الآخر طاقته  $2eV$  على حاجز جهد ارتفاعه  $10eV$  وعرضه  $0.5nm$ . (أ) جد احتمالات عبور هذه الإلكترونات من الحاجز إذا كانت احتمالية النفاذ تُعطى بالعلاقة:  $(T = e^{-2k_2 L})$  و  $L$  تمثل عرض الحاجز و  $(k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{h})$ . (ب) كيف ستتغير هذه الاحتمالات عند مضاعفة عرض الحاجز؟

الحل: (أ) للإلكترونات ذات الطاقة  $1eV$ :

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{h} = \frac{\sqrt{2 \times (9.1 \times 10^{-31} kg) [(10-1)eV] \times (1.6 \times 10^{-19} J/eV)}}{1.054 \times 10^{-34} J.s}$$

$$\approx 1.54 \times 10^{10} m^{-1}$$



$$\therefore L = 0.5 \text{ nm} = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\therefore 2k_2L = 2 \times (1.54 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}) \times (5 \times 10^{-10} \text{ m}) = 15.4$$

$$T_1 = e^{-2k_2L} = e^{-15.4} \approx 2 \times 10^{-7}$$

وهذا يعني (كمعدل) أن إلكترونات واحد فقط من كل خمسة ملايين إلكترون يمكن أن يمر من خلال حاجز ارتفاعه  $10 \text{ eV}$  وعرضه  $0.5 \text{ nm}$ . وبنفس الطريقة يمكن حساب احتمالية نفاذ الإلكترونات ذات الطاقة  $2 \text{ eV}$ :

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})[(10-2) \text{ eV}] \times (1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}}{1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}} \\ \approx 1.45 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

$$\therefore 2k_2L = 2 \times (1.45 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}) \times (5 \times 10^{-10} \text{ m}) = 14.5$$

$$T_2 = e^{-14.5} \approx 5 \times 10^{-7}$$

وهذه الإلكترونات لها احتمالية أكثر من الضعف لتلك التي طاقتها  $1 \text{ eV}$ . أي يمكن أن ينفذ إلكترون واحد من خلال الحاجز من بين مليوني إلكترون ساقط عليه.

(ب) عندا يكون عرض الحاجز  $1 \text{ nm}$  فستكون احتمالية النفاذ كالتالي:

$$k_2 \approx 1.54 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

$$2k_2L = 2 \times (1.54 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}) \times (1 \times 10^{-9} \text{ m}) = 30.8$$

$$T_1 = e^{-2k_2L} = e^{-30.8} \approx 4.2 \times 10^{-14}$$

وللإلكترونات ذات الطاقة  $2 \text{ eV}$ :

$$k_2 \approx 1.45 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

$$2k_2L = 2 \times (1.45 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}) \times (1 \times 10^{-9} \text{ m}) = 29$$

$$T_2 = e^{-29} \approx 2.5 \times 10^{-13}$$

إذن فإن تأثير مضاعفة عرض الحاجز على احتمالية النفاذ أكثر من تأثير مضاعفة طاقة الإلكترونات الساقطة.

## الفصل الرابع

### المتذبذب التوافقي الخطي

### The linear Harmonic Oscillator

|                                              |        |
|----------------------------------------------|--------|
| مقدمة                                        | 1 - 4  |
| حل معادلة شرودنجر للمتذبذب التوافقي          | 2 - 4  |
| مطابقة المتذبذب التوافقي                     | 3 - 4  |
| مقارنة النظرية التقليدية مع النظرية الكمومية | 5 - 4  |
| الدالة الموجية                               | 6 - 4  |
| المؤثرات الرفع والخفض                        | 7 - 4X |

٥) ولفكرة تكهيم مستويات الطاقة من مكان إلى مكان ، وبعد ذا أفهية كبيرة في الدراسات التقليدية والكمية .

\* التفرز الذرات والجزيئات عن التراكيب الصلبة البلورية .  
\* تنذب المجال الكهرومغناطيسي الذي يحكم اختياره في تطبيقات عديدة كحدود منه الاهتزازات التوافقية البسيطة .

المسؤول عن شاطئ الكرة  
القوة الجاذبة

كرة في مركز  
كرة في مركز

بقية شاطئ  
بقية شاطئ

فقط توازن  
الجزء

سرعة عالية  
سرعة عالية

المسؤول الزاوي

$L = mvr \sin 90^\circ = mVR \sin 90^\circ$

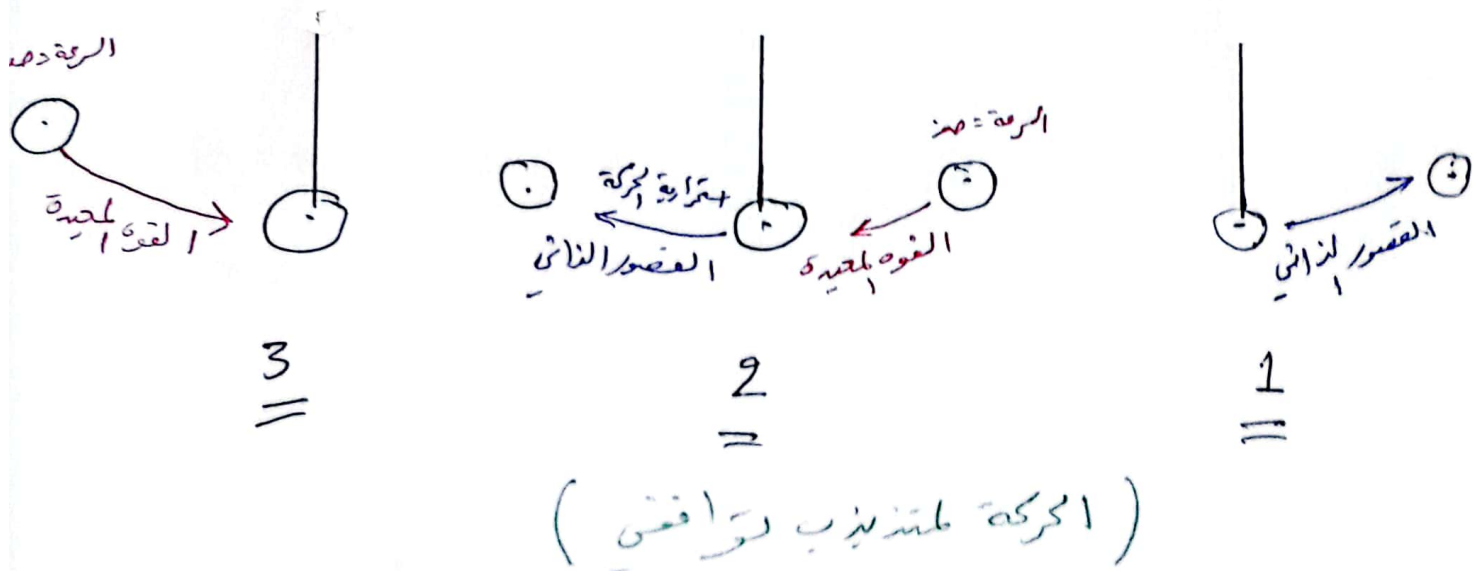
(۳) بترک ذهاباً وایاباً حول موضع استقراره تحت تأثیر لقوة ملعده.

\* نقطة توازن الجسم  
هي نقطة مركزية يهتز الجسم حولها

\* القوة المعيدة  
تجذب الجسم نحو المركز (وهي تتجه نحو المركز دائماً)

سؤال /

من المسؤول عن تباطؤ السرعة لجسم توافقى يبتعد عن مركز التوازن  
ع. / القوة المعيدة بسبب اتجاهها نحو المركز دائماً



\* في حالة المتذبذب توافقى البسيط تتغير القوة المعيدة بصورة خطية مع بعد الجسم عن مركز الحركة وذلك وفقاً لقانون هوك

$$F \propto x$$

$$F = -kx$$

$k$  ثابت القوة  
(-) وصيغة الإشارة السالبة لأن القوة تكون معاكسة لحركة الجسم



\* ان نوع القوة هو قوة محافظة ، لهذا فان الطاقة الحركية للجسيم المرن هو :-

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{----- 2}$$

\* عند معالجة التقليل لهذه المسألة :-

$$F = ma$$

مع قانون نيوتن

$$F = -kx$$

مع المعادلة (1)

$$-kx = ma$$

معادلة التوازن

$$\therefore a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

← السجل

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

بعض المعادلات m

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{----- 3}$$

( $\omega$ ) هو تردد الذبذبة وتقاس بوحدة (rad/sec) حيث انه :-

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

\* لايجاد اكل المناسب للمعادلة (3) فانه سيكون :-

$$X(t) = A \sin(\omega t)$$

or

$$X(t) = A \cos(\omega t)$$

-----4

A سعة الذبذبة (أي الازاحة العظمى من نقطة التوازن)

\* فيمكن ان يعبر عن لقوة بدلالة الطاقة الكامنة بالعلاقة الآتية :-

$$F = - \frac{dV}{dx} = - \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) = - kx \quad \text{-----5}$$

ملاحظات مهمة

1- الطاقة الكامنة للجسيم المهتز تتناسب طردياً مع  $x^2$  وفقاً للعلامة (-) (2)

2- عند مركز الحركة ( $x=0$ )

- الطاقة الكامنة = صفر
- الطاقة الحركية = أقصى ما يمكن

(وهذا يعني ان الجسم يمتلك طاقة حركية فقط)

3- عند أقصى بعد عن مركز الحركة (أقصى  $x$ )

- الطاقة الكامنة = أقصى ما يمكن
- الطاقة الحركية = صفر

(وهذا يعني ان الجسم فعلاً متوقف عن الحركة و سرعته = صفر ، اي يمتلك طاقة كامنة فقط)

\* الطاقة الكلية للذبذب  
نلاحظ ان ثابت الطاقة الكلية (E)

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{----- 6}$$

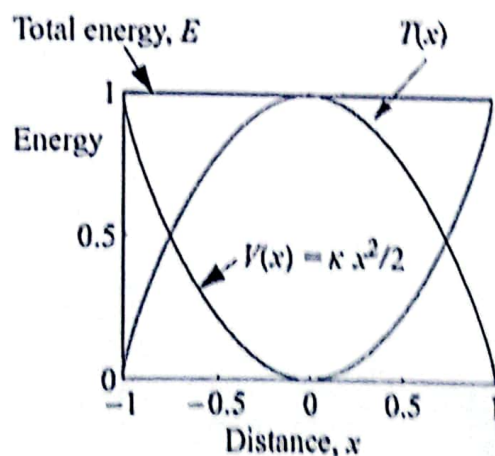
A هو أقصى ازاحة يتذبذبها الجسم

نقيل / لا توجد قيمة على تحديد قيمة E

لأن A يمكن ان يأخذ اي قيمة . ولذا يعني ان قيمة E متغيرة  
وهذه النتيجة طبيعية منحنى المظهر التقليدي

\* يمكن التعبير عن الطاقة الكلية بجمع كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة  
منحنى المعادلة والشكل الآتيين :-

$$E = \underbrace{T}_{\text{الحركية}} + \underbrace{V(x)}_{\text{الكامنة}}$$



الشكل العاقتان الحركية والكامنة لمتذبذب توافقى تقليدي ببعء واحد.

\* من خلال الدراسة الكلاسيكية للمتذبذب التوافقي اعلان  
تستنتج ما يأتي :-

- ١- الطاقة الدنيا للمتذبذب التوافقي تساوي صفر
- ٢- الطاقة للمتذبذب التوافقي لها صيف مسعر من لقيم
- ٣- كثافة الاحتمالية للمتذبذب تتناسب عكسياً مع البسرة
- ٤- لا توجد حدود قصوى تفرض على الطاقة التي يمكن ان  
يأخذها المتذبذب التوافقي



## 4-2 حل معادلة شرودنجر للمذبذبات التوافقية

### Solution of Schrodinger Equation for Harmonic Oscillator

لدراسة مسألة المذبذب التوافقي من ناحية ميكانيكية  
نبدأ بمعادلة شرودنجر غير المتغيرة مع الزمن وليعد واحد

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E \psi(x) \quad \text{--- 7}$$

\* معادلة (2) :-  $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$

\* نفرض معادلة (2) في (7)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E \psi(x)$$

\* بضرب المعادلة بـ  $\left(\frac{-2m}{\hbar^2}\right)$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{1}{2} kx^2 - E \right) \psi(x) \quad \text{--- 8}$$

\* لنفرض  $\alpha$   $\beta$  حل معادلة (8) فنحصل :-

$$\alpha = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\beta^2 = \frac{mk}{\hbar^2}$$

^

$$\therefore \frac{d^2 \psi}{dx^2} = (\beta^2 x^2 - \alpha) \psi \quad \dots \dots \dots 9$$

نأخذ حل هذه المعادلة بطريقة متعدد الحدود polynomial  
نشرط انه تحقق الشروط العامة للمعادلة المرجية وهي :-

١ - تكون عيارية

٢ - تتلاشى في اللانهاية

(لان الجسم مقيد) فإحدنا محدود من انقضاء سبب القوة المعبره

٣ - كل معادلة (9) نفرض :-

$$y = \sqrt{\beta} x$$

$$\therefore dy = \sqrt{\beta} dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{\beta}$$

حيث تم ابدال المتغير x الى y

$$\therefore \frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = \sqrt{\beta} \frac{d}{dy} \quad \text{---} *$$

نربع المعادلة \*

$$\frac{d^2}{dx^2} = \beta \frac{d^2}{dy^2} \quad \text{---} **$$

بتعريف \* \* في معادلة (9)

$$\beta \frac{d^2 \psi}{dy^2} = (\beta^2 x^2 - \alpha) \psi$$

بتقسيم الطرفين على  $\beta$

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = \left( \beta x^2 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \psi \quad \text{----- 10}$$

$$y = \sqrt{\beta} x$$

$$y^2 = \beta x^2 \quad \text{----- 11}$$

نعوض معادلة 11 في معادلة 10

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = \left( y^2 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \psi \quad \text{----- 12}$$

$$y^2 \gg \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 0 \quad \text{في حالة :- (بطل)}$$

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = y^2 \psi \quad \text{----- 13}$$

الحل التقريبي  
The approximate Solution

$$\psi(y) = D e^{\frac{y^2}{2}} \quad \text{----- 14}$$

١.

\* أم الالة  $\psi$  يجب ان تتلاشى عندما تكون قيمة  $y$  كبيرة جداً ، لذلك يهمل الحد ذو الإشارة الموجبة

$$\psi(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

\* والحصول على الحل الدقيق لنضيف لكل المتغير  $H(y)$

$$\psi(y) = H(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{----- 15}$$

\* يا متقام معادلة (15) لينتج :-

$$\frac{d\psi}{dy} = -y e^{-\frac{y^2}{2}} H(y) + e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dH(y)}{dy} \quad \text{----- 16}$$

\* يا متقام معادلة (16) لينتج :-

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \left( \frac{d^2H}{dy^2} - 2y \frac{dH}{dy} + y^2 H - H \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{----- 17}$$

سؤال واجب /  
من يا متقام معادلة (16) بنفسك وتأكد من صحة الناتج في معادلة (17).

\* بتعويض معادلة 16 و 17 في 12 لينتج :-

$$\frac{d^2H}{dy^2} - 2y \frac{dH}{dy} + \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) H = 0 \quad \text{----- 18}$$



إيجاد ثابت التقياس  $N_n$

$$\Psi_n(y) = N_n H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\Psi_n^*(y) = N_n^* H_n^*(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\circ \circ \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^*(y) \Psi(y) dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_n^* H_n^*(y) e^{-\frac{y^2}{2}} N_n H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$$

$$\circ \circ N_n^* N_n \int_{-\infty}^{+\infty} (H_n(y))^2 e^{-y^2} dy = 1$$

$\therefore$  لتكن  $\int_{-\infty}^{+\infty} (H_n(y))^2 e^{-y^2} dy$  ثابتاً

$$N_n = \left( \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$\therefore$  ثابت

\* من المعادلات (٢٤)

يمكن استخراج القيم العددية لمقدار  $H$  من معادلات  
بالقوة  $n$  كما يلي :-

$$H_0(y) = 1$$

$$H_1(y) = 2y$$

$$H_2(y) = 4y^2 - 2$$

$$H_3(y) = 8y^3 - 12y$$

$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12$$

٣-٤ طاقة المذبذب المتوافق

## The Energy of Harmonic Oscillator

\* نتم فرض العلاقات الآتية - أيضاً

$$\Rightarrow 2n = \frac{\alpha}{\beta} - 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{km}}{\hbar}$$

$$\therefore 2n = \frac{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}{\frac{\sqrt{km}}{\hbar}} - 1$$

\* بنقل (-1) الى الطرف الايسر

$$2n + 1 = \frac{2mE_n}{\hbar\sqrt{km}}$$

\* بتقسيم الطرفين على 2

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{mE_n}{\hbar\sqrt{km}}$$

\* ضرب الطرفين X المربعين

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{km} = mE_n$$

\* بتقسيم الطرفين على m

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} = E_n$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{aligned} \text{أو} \quad E_n &= (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \\ \text{أو} \quad E_n &= (n + \frac{1}{2}) h \nu \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right. 1$$

ملاحظات \*  $n$  تمثل عدد الكم الرئيسي ، وتأخذ لإعداد

الصحيحة الموجبة أي :  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

\* تدل معادلة (1) على أن طاقة المذبذب التوافقي  $H_2O$  صفر طاقة كلية .

\* يمكن إيجاد طاقة الحالة الأرضية  
Ground state  
 $E_0 = (0 + \frac{1}{2}) \hbar \omega = \frac{1}{2} \hbar \omega$

وربطه عليها طاقة نقطة الصفر Zero point energy

ويمكن تحريرها :-  
هي أقل طاقة يمتلكها المذبذب التوافقي بخلاف البوتاتيك  
التقليدي والذي يمكن أن يكون فيه طاقة المذبذب التوافقي مساوية للصفر  
وفقاً لقانون بلانك ( $E_n = nh\nu = n\hbar\omega$ )

\* تقابل طاقة نقطة الصفر الوسط المستوي يمكن أن يكون فيه  
المذبذب التوافقي



\* يمكن إيجاد أيضا

$$E_1 = (1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega = \frac{3}{2} \hbar \omega$$

$$E_2 = \frac{5}{2} \hbar \omega$$

$$E_3 = \frac{7}{2} \hbar \omega$$

\* الفرق الطاقة بين أي مستويين متتاليين هو فرق ثابتة ويعطى بالعلامة :

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n$$

$$= \hbar \omega$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{k}{m}}$$

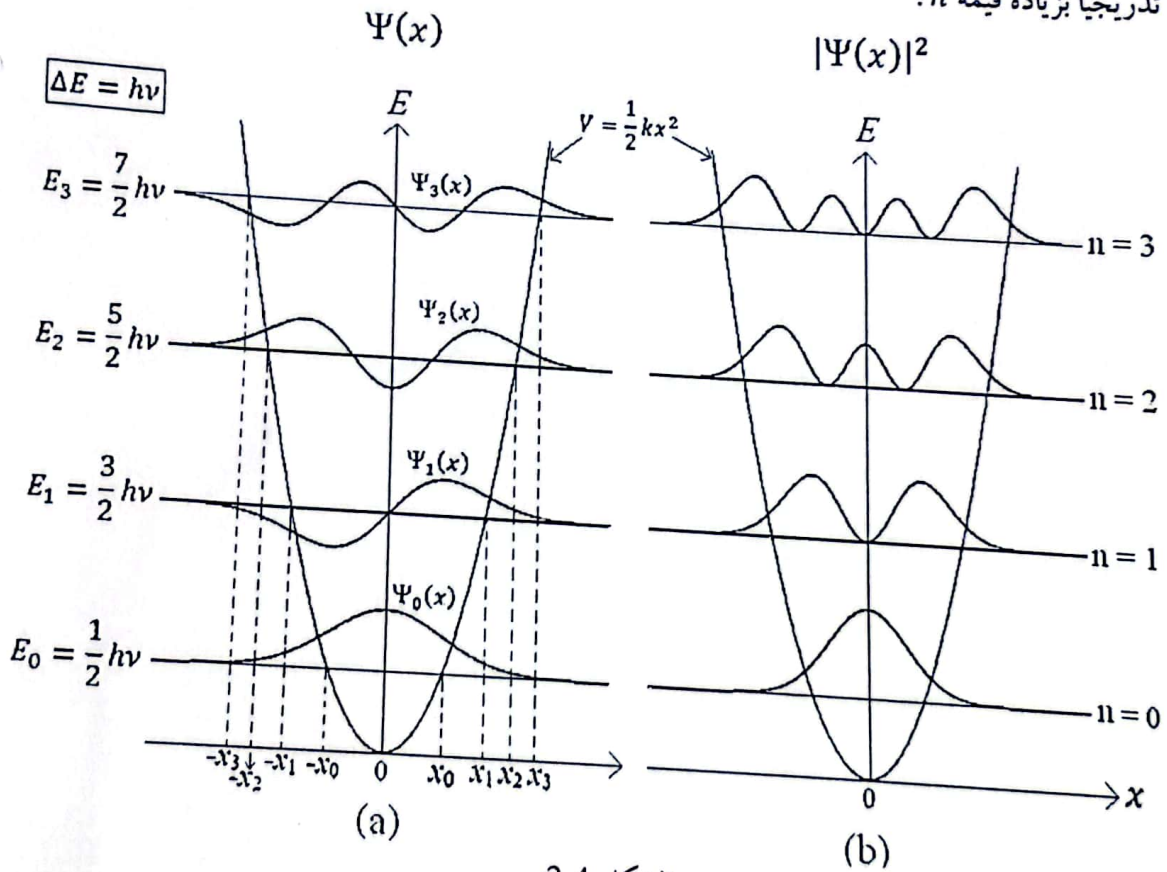
عنها كانت قيمة  $n$  فانه هذا الفرق :-

- ① يزداد بزيادة قيمة ثابتة القوة  $k$  للمذبذب البؤافي
- ② يزداد بنقصان قيمة الكتلة

والعكس بالعكس

\* عند  $(K \rightarrow 0, m \rightarrow \infty)$  فانه مستويات الطاقة تتقارب لدرجة التطابق فيبدو كأنها متصلة ويتحول النظام الى واسع الميكانيك الكلاسيكي

وكما نلاحظ في الشكل 2-4 فإن الدوال الموجية تنفذ للمناطق ذوات الجهد المحظور وفق الميكانيك التقليدي والتي تمثلها النقاط  $(\pm x_0, \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$  للحالة الأرضية والحالات المثيجة الثلاثة الأولى للمتذبذب التوافقي. وكذلك فإن احتمالية تواجد الجسيم المتذبذب تصل إلى المنطقة المحظورة تقليدياً وتتناقص فيها أسياً. ويلاحظ أيضاً أن فرق الطاقة بين مستوى وآخر يليه هو مقدار ثابت  $(\Delta E = h\nu = \hbar\omega)$  بخلاف الجسيم المحصور داخل صندوق الذي يزداد الفرق بين مستويات الطاقة فيه تدريجياً بزيادة قيمة  $n$ .



الشكل 2-4:

(a) الدوال الذاتية الأربعة الأوطأ طاقة لمتذبذب توافقي ببعد واحد. (b) كثافة الاحتمالية لهذه الدوال.

واجب /  
جد كل من  $\psi_0(y)$ ,  $\psi_1(y)$ ,  $\psi_2(y)$ ,  $\psi_3(y)$   
للمتوزع المتوافق البسيط

$$\psi_n(y) = N_n H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{حيث } n=0,1,2,3$$

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \quad (\text{صيغة رودريكي})$$

$$N_n = \left( \frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث ان

$$y = \alpha x$$

19

مثال ٤-١: جد قيمة الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي البسيط للحالة الأرضية وللحالة المثيجة الأولى.

$$\Psi_n(y) = N_n H_n(y) e^{-y^2/2}$$

الحل :

$$\left( y = \alpha x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \text{ و } H_n(y) : \text{متعدد حدود هيرميت بالدرجة } n, \text{ و } N_n : \text{ ثابت العيارية، و } H_n(y) :$$

و  $\omega$  : التردد الزاوي، و  $m$  : كتلة الجسيم المتذبذب.

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4}, \quad H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

\* For ground state  $n = 0 \Rightarrow$

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{2^0 0!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4}$$

$$H_0(y) = (-1)^0 e^{y^2} \frac{d^0}{dy^0} e^{-y^2} = e^{y^2} \cdot e^{-y^2} = 1$$

$$\Psi_0(y) = N_0 H_0(y) e^{-y^2/2} = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-y^2/2} = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-y^2/2}$$

\* For first excited state:  $n = 1 \Rightarrow$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2^1 1!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4}$$

$$H_1(y) = (-1)^1 e^{y^2} \frac{d^1}{dy^1} e^{-y^2} = -e^{y^2} (-2y) e^{-y^2} = 2y$$

$$\Psi_1(y) = N_1 H_1(y) e^{-y^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} (2y) e^{-y^2/2} = \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} y e^{-y^2/2}$$

واجب بيني: جد قيمة الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي البسيط للحالتين المثيجتين الثانية والثالثة. (تلميح:

استفد من العلاقة (4.25).



مثال ٢-٤: جد التفاوت في الموقع للمتذبذب التوافقي البسيط للحالة الأرضية، ثم جد الانحراف القياسي.

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad \text{الحل :}$$

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} = \Psi_0^*(x) \quad \Leftrightarrow (n=0) \text{ الحالة الأرضية}$$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* x \Psi_0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2}\right) x \left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2}\right) dx \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0 \quad \text{because the function } (f(x) = x e^{-\alpha^2 x^2}) \text{ is odd.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* x^2 \Psi_0 dx = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx\right) \quad \text{because the function } (f(x) = x^2 e^{-\alpha^2 x^2}) \text{ is even.} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} \quad \text{من جداول التكاملات :}$$

$$\therefore \langle x^2 \rangle = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} = \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{2\alpha^2} - 0 = \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{1}{2 \frac{m\omega}{\hbar}} = \frac{\hbar}{2m\omega} \quad \text{التفاوت :}$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

الانحراف القياسي :

٢١

مثال ٣-٤: بالاستفادة من نتائج المثال السابق، احسب القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة للمتذبذب التوافقي للحالة الأرضية بدلالة الطاقة الكلية.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{k}{4\alpha^2} \quad \text{الحل :}$$

$$\because k = m\omega^2 \quad (\text{where } \omega = \sqrt{k/m}) \quad \text{and} \quad \alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\therefore \langle V \rangle = \frac{m\omega^2}{4m\omega/\hbar} = \frac{1}{4} \hbar\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \hbar\omega \right)$$

$$\because E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega, \quad \therefore \langle V \rangle = \frac{1}{2} E_0$$

مثال ٤-٤: جد التفاوت في الزخم الخطي للمتذبذب التوافقي البسيط للحالة الأرضية. ثم جد الانحراف القياسي.

$$(\Delta \hat{p}_x)^2 = \langle \hat{p}_x^2 \rangle - \langle \hat{p}_x \rangle^2, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{الحل :}$$

$$\Psi_0(x) = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} = \Psi_0^*(x) \quad \Leftrightarrow (n=0) \text{ للحالة الأرضية}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* \hat{p}_x \Psi_0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \right) dx \\ &= -i\hbar \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2/2} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha^2 x^2/2} dx \\ &= -i\hbar \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2/2} (-\alpha^2 x) e^{-\alpha^2 x^2/2} dx \\ &= i\hbar \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0 \quad \text{because the function } (f(x) = x e^{-\alpha^2 x^2}) \text{ is odd.} \end{aligned}$$

٢٢

$$\langle \hat{p}_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^* \hat{p}_x^2 \Psi_0 dx, \quad \hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \right) \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \right) dx \\ &= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\alpha^2 x^2/2} dx \\ &= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2/2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha^2 x^2/2} \right) dx \\ &= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2/2} \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha^2 x e^{-\alpha^2 x^2/2}) dx \\ &= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2/2} (\alpha^4 x^2 - \alpha^2) e^{-\alpha^2 x^2/2} dx \\ &= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} (\alpha^4 x^2 - \alpha^2) dx = -\hbar^2 \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} (\alpha^2 x^2 - 1) dx \\ &= -\hbar^2 \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx \right) \end{aligned}$$

ولأن الدالتين  $(e^{-\alpha^2 x^2})$  و  $(x^2 e^{-\alpha^2 x^2})$  هما دالتان زوجيتان فيمكن تغيير حدود التكامل لكل منهما مع مضاعفة مقدار التكامل بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_x^2 \rangle &= -2\hbar^2 \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\infty} \alpha^2 x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx - \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx \right) \\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \end{aligned}$$

ومن جداول التكاملات :

$$\therefore \langle \hat{p}_x^2 \rangle = -2\hbar^2 \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \left( \alpha^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \right) = -\hbar^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2 \right) = -\hbar^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\alpha^2}{2} \right) = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2}$$

$$\therefore (\Delta \hat{p}_x)^2 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2} - 0 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2} = \frac{\hbar^2 \frac{m\omega}{\hbar}}{2} = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

التفاوت :

$$\Delta \hat{p}_x = \frac{\hbar \alpha}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$$

الانحراف القياسي :

مثال ٥-٤: اعتماداً على نتائج المسائلين السابقين، جد معدل الطاقة الحركية للمتذبذب التوافقي للحالة الأرضية، ثم جد معدل الهاملتوني.

الحل :

$$\langle T \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar m \omega}{4m} = \frac{1}{4} \hbar \omega$$

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{4} \hbar \omega + \frac{1}{4} \hbar \omega = \frac{1}{2} \hbar \omega = E_0$$

مثال ٦-٤: برهن أن  $\left( \frac{1}{i\hbar} [\hat{v}, \hat{H}] = -\omega^2 x \right)$  للمتذبذب التوافقي البسيط. حيث  $\hat{v}$ : مؤثر السرعة، و  $\hat{H}$ : المؤثر الهاملتوني، و  $\omega$ : التردد الزاوي.

الحل:

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}_x}{m} = \frac{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}{m} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$[\hat{v}, \hat{H}] = [\hat{v}, \hat{T} + \hat{V}] = [\hat{v}, \hat{T}] + [\hat{v}, \hat{V}] \quad \dots 1$$

$$[\hat{v}, \hat{T}] \Psi = \left[ -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi$$

$$\begin{aligned} &= \left( -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi - \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \\ &= \frac{i\hbar^3}{2m^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi = \frac{i\hbar^3}{2m^2} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \Psi = 0 \quad \dots 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{v}, \hat{V}] \Psi &= \left[ -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{2} kx^2 \right] \Psi = \left( -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) \Psi - \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) \left( -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \\ &= -\frac{i\hbar k}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x} x^2 \Psi - x^2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) = -\frac{i\hbar k}{2m} \left( 2x \Psi + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi - x^2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) \end{aligned}$$

$$[\hat{v}, \hat{V}] \Psi = -\frac{i\hbar k}{2m} 2x \Psi = -\frac{i\hbar k}{m} x \Psi \quad \dots 3$$

$$\text{By sub. eq. 3 and eq. 2 in eq. 1} \Rightarrow [\hat{v}, \hat{H}] = 0 - \frac{i\hbar k}{m} x = -\frac{i\hbar k}{m} x$$



38

$$\therefore \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} \left( -\frac{i\hbar k}{m} x \right) = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

٤ - ٤ الدوال الموجية للمذبذب هي عبارة مقامة

The Wave Functions of Harmonic Oscillator are Orthonormal

ذكرنا في الفصل الثاني شرط التقامد العياري للدوال الموجية ،

بحيث ان تكسب المعادلة لشرط التقامد العياري للمذبذب التوافقى الخطى

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{when } m=n \\ 0 & \text{when } m \neq n \end{cases}$$

حيث انه :-

$$\Psi_m^*(x) = \Psi_m(x)$$

$$\Psi_n(x) = N_n H_n(x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

$$\Psi_m(x) = N_m H_m(x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$$

بتطبيق شرط التقامد العياري

$$\Psi_m \Psi_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m H_n dx = \delta_{mn}$$

$$\text{when } n \neq m \Rightarrow N_m N_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m H_n dx = 0 \quad (\text{Orthogonal})$$

$$\text{when } n = m \Rightarrow N_m N_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_m H_m dx = 1 \quad (\text{Normalized})$$

مثال ٧-٤: برهن أن الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي للحالة الأرضية وللحالة المتهيجة الأولى هي عيارية متعامدة orthonormal.

الحل: ١- لإثبات العيارية في الحالة الأرضية:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} = \Psi_0^*(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^*(x) \Psi_n(x) dx = 1$$

وحيث أن شرط العيارية هو :

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^*(x) \Psi_0(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad \text{because the function } (e^{-\alpha^2 x^2}) \text{ is even.}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

ومن جداول التكاملات :

$$\therefore \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} = 1 \quad (\therefore \Psi_0 \text{ is normalized})$$

٢- لإثبات العيارية في الحالة المتهيجة الأولى:

$$\Psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2} = \Psi_1^*(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \Psi_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2} dx$$

$$= \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$= \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx \quad \text{because } (x^2 e^{-\alpha^2 x^2}) \text{ is even function.}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}$$

ومن جداول التكاملات :

$$\therefore \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} = 1 \quad (\therefore \Psi_1 \text{ is normalized})$$

٣- لإثبات التعامد بين الدالتين  $\Psi_0$  و  $\Psi_1$  يلزم تحقق شرط التعامد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \Psi_0(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \Psi_0(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} (2\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} dx \\ &= 2\alpha \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0 \quad \text{because } (x e^{-\alpha^2 x^2}) \text{ is odd function.} \end{aligned}$$

مثال ٤-٨: جسيم خاضع لجهد متذبذب توافقي وينطلق في الحالة:  $\Psi(x, 0) = A[3\Psi_0(x) + 4\Psi_1(x)]$  ، جد قيمة الثابت  $A$ .

الحل: بما أن الدوال الموجية للمتذبذب التوافقي هي عيارية متعامدة، فإن:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \Psi(x, 0)^* \Psi(x, 0) dx = \int (A[3\Psi_0(x) + 4\Psi_1(x)])^* (A[3\Psi_0(x) + 4\Psi_1(x)]) dx \\ &= |A|^2 \int (9\Psi_0^* \Psi_0 + 12\Psi_0^* \Psi_1 + 12\Psi_1^* \Psi_0 + 16\Psi_1^* \Psi_1) dx \\ &= |A|^2 (9 + 0 + 0 + 16) = 25|A|^2 \Rightarrow A = 1/5 \end{aligned}$$



## 4 - 5 مقارنة النظرية الكلاسيكية والنظرية الكمية

### Comparison of Classical Theory with Quantum Theory

| الميكانيك الكلاسيكي                                                     | الميكانيك الكمي                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ١ - طاقة الحالة الدنيا متساوية صفر                                      | ١ - طاقة الحالة الارضية لا تساوي صفر                                                                                                             |
| ٢ - مستويات طاقة متصلة                                                  | ٢ - مستويات طاقة منفصلة                                                                                                                          |
| ٣ - الاحتمالية تتناسب عكسياً مع الانطلاق                                | ٣ - الاحتمالية كميّاً تعطى $ \psi_n(x) ^2$                                                                                                       |
| ٤ - $E_0$ قيمة ضئيلة لا تقاس بتجريبه                                    | ٤ - طاقة نقطة الصفر<br>$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$<br>حيث: $\omega = 10^6 \text{ Hz}$                                                       |
| ٥ - بسبب انه مستويات متصلة فانه التردد الزاوي $\omega$ يكون صغيراً جداً | ٥ - الفرق بين اى مستويين متتاليين<br>بما هو $\hbar \omega$<br>$E_0 \approx 0.5 \times 10^{-28} \text{ J}$<br>$\hbar \omega = 10^{-28} \text{ J}$ |

## 4-6 الدالة المولدة

## Generating Function

نكتب كتاباً الدالة المولدة بالصيغة الآتية -

$$\begin{aligned} G(t, y) &= e^{y^2 - (t-y)^2} \\ &= e^{y^2 - (t^2 - 2yt + y^2)} \\ &= e^{y^2 - t^2 + 2yt - y^2} \end{aligned}$$

$$\therefore G(t, y) = e^{-t^2 + 2yt}$$

الدالة المولدة

$$e^{-t^2 + 2yt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(y)$$

حيث  $n \geq 0$

مشتقات فردية  
صيرت

حيث  $n \geq 0$

$H_n(y)$  يخضع لعلاقات تناظرية، متكاملة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

$$\text{when } n \neq m \Rightarrow \delta_{nm} = 0$$

$$\text{when } n = m \Rightarrow \delta_{nm} = 1$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n^2(y) dy = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

٣٠

كذلك لدينا العلاقات الآتية

$$H'_n(y) = 2n H_{n-1}(y) \quad \text{----- a}$$

$$y H_n(y) = \frac{1}{2} H_{n+1}(y) + n H_{n-1}(y) \quad \text{----- b}$$

$$H''_n(y) - 2y H'_n(y) + 2n H_n(y) = 0 \quad \text{----- c}$$

برهان العلاقة (a)

$$G(t, y) = e^{-t^2 + 2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y) t^n}{n!}$$

+ نشتق الدالة المتولدة بالنسبة لـ y

$$\frac{dG(t, y)}{dy} = 2t e^{-t^2 + 2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(y) t^n}{n!}$$

\* نعوّض عن الحد  $e^{-t^2 + 2ty}$  بـ  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y) t^n}{n!}$  ، ثم نحصل لـ  $\frac{dG(t, y)}{dy}$  على طرف واحد

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 H_n(y)}{n!} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(y) t^n}{n!} = 0$$

\* بساواة معامل  $t^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 H_{n-1}(y)}{(n-1)!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(y)}{n!} t^n = 0$$

\* بتعويض  $n! = n(n-1)!$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 H_{n-1}(y)}{(n-1)!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(y)}{n(n-1)!} t^n = 0$$

\* نأخذ معامل مشترك بين الحدين

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \left( 2H_{n-1}(y) - \frac{H'_n(y)}{n} \right) = 0$$

\* نأخذ الحدين ما بين القوسين

$$2H_{n-1}(y) - \frac{H'_n(y)}{n} = 0$$

\* نجعل كل حد طرف

$$2H_{n-1}(y) = \frac{H'_n(y)}{n}$$

\* نضرب الطرفين  $\times n$

$$2nH_{n-1}(y) = H'_n(y)$$

$$\therefore \boxed{H'_n(y) = 2nH_{n-1}(y)}$$

برهان العلاقة (b)

\* نأخذ تعريف الدالة المولدة

$$G(t, y) = e^{-t^2 + 2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n$$

\* نشتق الدالة المولدة بالنسبة لـ  $t$

$$\frac{dG(t, y)}{dt} = (-2t + 2y) e^{-t^2 + 2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n H_n(y)}{n!} t^{n-1}$$

\* بترتيب الطرف الايسر للمعادلة

$$2y e^{-t^2 + 2ty} - 2t e^{-t^2 + 2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n H_n(y)}{n!} t^{n-1}$$



٢٢

\* يتقارب (ن)  $e^{t^2+2ty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2y \frac{H_n(y)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{H_n(y)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n H_n(y)}{n!} t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2y \frac{H_n(y)}{n(n-1)!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{H_{n-1}(y)}{(n-1)!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) H_{n+1}(y)}{(n+1)n(n-1)!} t^n = 0$$

الطيات التي تحتها علامة إشارة

① الحد الأول، يجعل  $n! = n(n-1)!$

② الحد الثاني، نصيف (-1) نكل  $n$

③ الحد الثالث، نصيف (+1) نكل  $n$

$n! = (n+1)n(n-1)!$

\* يأخذ عامل مشترك الحدود الثلاث

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \left( \frac{2y H_n(y)}{n} - 2 H_{n-1}(y) - \frac{H_{n+1}(y)}{n} \right) = 0$$

\* نأخذ الحدود ما بين القوسين

④ نأولها بالصفر

⑤ ضرب الحدود الثلاث ب  $n$

$$\left[ \frac{2y H_n(y)}{n} - 2 H_{n-1}(y) - \frac{H_{n+1}(y)}{n} = 0 \right] * n$$

$$2y H_n(y) - 2n H_{n-1}(y) - H_{n+1}(y) = 0$$

$$\therefore 2y H_n(y) = H_{n+1}(y) + 2n H_{n-1}(y)$$

\* يتقارب الطرفين على 2

$$y H_n(y) = \frac{1}{2} H_{n+1}(y) + n H_{n-1}(y)$$

## برهان العلاقة ج

\* من العلاقة ج

$$y H_n(y) = \frac{1}{2} H_{n+1}(y) + n H_{n-1}(y)$$

\* نشتق الطرفين بالنسبة لـ y

$$y H'_n(y) + H_n(y) = \frac{1}{2} H'_{n+1}(y) + n H'_{n-1}(y) \quad \text{--- (1)}$$

$$\Leftrightarrow H'_n(y) = 2n H_{n-1}(y) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{ملاحظة (+)} \\ \text{لأن العلاقة ج} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow H'_{n+1}(y) = 2(n+1) H_n(y)$$

$$= 2n H_n(y) + 2 H_n(y) \quad \text{--- **}$$

\* نشتق العلاقة ج بالنسبة لـ y

$$H''_n(y) = 2n H'_{n-1}(y)$$

$$\Leftrightarrow H'_{n-1}(y) = \frac{H''_n(y)}{2n} \quad \text{--- **}$$

\* نعوّض \*\* في (1)

$$y H'_n(y) + H_n(y) = \frac{1}{2} (2n H_n(y) + 2 H_n(y)) + n \frac{H''_n(y)}{2n}$$

$$y H'_n(y) + H_n(y) = n H_n(y) + H_n(y) + \frac{H''_n(y)}{2}$$

\* نضرب الطرفين بـ 2

$$2y H'_n(y) = 2n H_n(y) + H''_n(y)$$

$$\Leftrightarrow H''_n(y) - 2y H'_n(y) + 2n H_n(y) = 0$$

٢٤

واجب /

احسب  $H_1(y)$  ,  $H_2(y)$  ,  $H_3(y)$

المتميز بـ التوافق

واجب / حـ  $H_4(y)$  باستخدام الآلة التوليد

٣٥

مثال ٩-٤: أ- استخدم صيغة رودريغيس لاشتقاق  $H_4$  و  $H_3$

ب- استخدم العلاقة (٦) مع نتيجة جواب 'أ' لاستخراج  $H_5$  و  $H_6$ .

ج- تحقق من العلاقة (٩) صنفًا باشتقاق  $H_5$  و  $H_6$

الحل : 'أ' - 
$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

$$\frac{d}{dy} e^{-y^2} = -2ye^{-y^2} ; \left(\frac{d}{dy}\right)^2 e^{-y^2} = \frac{d}{dy}(-2ye^{-y^2}) = -2e^{-y^2} + 4y^2e^{-y^2} ;$$

$$\begin{aligned} * \left(\frac{d}{dy}\right)^3 e^{-y^2} &= \frac{d}{dy}[-2e^{-y^2} + 4y^2e^{-y^2}] \\ &= 4ye^{-y^2} + 8ye^{-y^2} - 8y^3e^{-y^2} = 12ye^{-y^2} - 8y^3e^{-y^2} = (12y - 8y^3)e^{-y^2} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \left(\frac{d}{dy}\right)^4 e^{-y^2} &= \frac{d}{dy}[12ye^{-y^2} - 8y^3e^{-y^2}] = 12e^{-y^2} - 24y^2e^{-y^2} - 24y^2e^{-y^2} + 16y^4e^{-y^2} \\ &= 12e^{-y^2} - 48y^2e^{-y^2} + 16y^4e^{-y^2} = (12 - 48y^2 + 16y^4)e^{-y^2} . \end{aligned}$$

$$\therefore H_3(y) = (-1)^3 e^{y^2} \left(\frac{d}{dy}\right)^3 e^{-y^2} = -e^{y^2}(12y - 8y^3)e^{-y^2} = -12y + 8y^3 ;$$

$$H_4(y) = (-1)^4 e^{y^2} \left(\frac{d}{dy}\right)^4 e^{-y^2} = e^{y^2}(12 - 48y^2 + 16y^4)e^{-y^2} = 12 - 48y^2 + 16y^4 .$$

ب- 
$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y)$$

$$H_5(y) = 2yH_4 - 2(4)H_3 = 2yH_4 - 8H_3$$

$$= 2y(12 - 48y^2 + 16y^4) - 8(-12y + 8y^3) = 120y - 160y^3 + 32y^5$$

$$H_6(y) = 2yH_5 - 2(5)H_4 = 2yH_5 - 10H_4$$

$$= 2y(120y - 160y^3 + 32y^5) - 10(12 - 48y^2 + 16y^4)$$

$$= -120 + 720y^2 - 480y^4 + 64y^6$$

ج- 
$$\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$$

$$\frac{dH_5}{dy} = \frac{d(120y - 160y^3 + 32y^5)}{dy} = 120 - 480y^2 + 160y^4$$

$$= 10(12 - 48y^2 + 16y^4) = 10H_4 = (2)(5)H_4 .$$

$$\frac{dH_6}{dy} = \frac{d(-120 + 720y^2 - 480y^4 + 64y^6)}{dy} = 1440y - 1920y^3 + 384y^5$$

$$= 12(120y - 160y^3 + 32y^5) = (2)(6)H_5$$



مثال ١٠-٤: استعمل الدالة المولدة لإيجاد  $H_0$  و  $H_1$  و  $H_2$  و  $H_3$ .

الحل: بما أن  $H_n(y)$  يمثل المشتقة ذات الرتبة  $n$  للدالة المولدة  $(e^{-t^2+2ty})$  بالنسبة لـ  $t$  عند  $(t = 0)$ ، إذن:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^0 (e^{-t^2+2ty}) = e^{-t^2+2ty}; \text{ setting } t = 0 \Rightarrow H_0(y) = 1$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^1 (e^{-t^2+2ty}) = (-2t + 2y)e^{-t^2+2ty}; \text{ setting } t = 0 \Rightarrow H_1(y) = 2y$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 (e^{-t^2+2ty}) &= \frac{d}{dt} [(-2t + 2y)e^{-t^2+2ty}] = -2e^{-t^2+2ty} + (-2t + 2y)^2 e^{-t^2+2ty} \\ &= [-2 + (-2t + 2y)^2] e^{-t^2+2ty}; \\ \text{setting } t = 0 &\Rightarrow H_2(y) = -2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 (e^{-t^2+2ty}) &= \frac{d}{dt} \{[-2 + (-2t + 2y)^2] e^{-t^2+2ty}\} \\ &= \{2(-2t + 2y)(-2) + [-2 + (-2t + 2y)^2](-2t + 2y)\} e^{-t^2+2ty}; \\ \text{setting } t = 0 &\Rightarrow H_3(y) = \{2(2y)(-2) + [-2 + (2y)^2](2y)\} \\ &= -8y + (-2 + 4y^2)(2y) = -8y - 4y + 8y^3 = -12y + 8y^3 \end{aligned}$$

مثال ١١-٤: أثبت خاصية التماثل  $H_n(y) = (-1)^n H_n(-y)$  باستخدام القيمة الفردية ( $n = 1$ ) والقيمة الزوجية ( $n = 2$ ).

الحل: نستعمل صيغة رودريغيس  $H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$  عندما تكون قيمة  $n$  فردية وتساوي 1:

$$H_1(y) = (-1)^1 e^{y^2} \frac{d^1}{dy^1} e^{-y^2} = -e^{y^2} (-2y) e^{-y^2} = 2y$$

$$H_1(-y) = 2(-y) = -2y = -H_1(y)$$

$$\therefore H_n(-y) = -H_n(y) \text{ when } n \text{ is odd}$$

و عندما تكون قيمة  $n$  زوجية وتساوي 2:

$$\begin{aligned} H_2(y) &= (-1)^2 e^{y^2} \frac{d^2}{dy^2} e^{-y^2} = e^{-y^2} \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dy} e^{-y^2} \right) = e^{-y^2} \frac{d}{dy} (-2ye^{-y^2}) \\ &= e^{-y^2} (-2e^{-y^2} + 4y^2 e^{-y^2}) = 4y^2 - 2 \end{aligned}$$

$$H_2(-y) = 4(-y)^2 - 2 = 4y^2 - 2 = H_2(y)$$

$$\therefore H_n(-y) = H_n(y) \text{ when } n \text{ is even}$$

۳۷  
✓

۱. اهره

Q/ Find the expectation value to a position  $x$  by using generator function?

Sol:  $y = \alpha x \Rightarrow x = \frac{y}{\alpha}$

$\therefore \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(y) \frac{y}{\alpha} \psi_n(y) \frac{dy}{\alpha}$  but  $\psi_n(y) = N_n H_n(y) e^{-y^2/2}$

$\therefore \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} N_n H_n(y) e^{-y^2/2} \frac{y}{\alpha} N_n H_n(y) e^{-y^2/2} \frac{1}{\alpha} dy$

$\therefore \langle x \rangle = \frac{N_n^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n y H_n dy$

but  $y H_n(y) = \frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1}$

$\therefore \langle x \rangle = \frac{N_n^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n \left( \frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \right) dy$

$= \frac{N_n^2}{\alpha^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n H_{n+1} dy + \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-y^2} H_n H_{n-1} dy \right)$

but  $\delta_{n,n+1} = 0$  and  $\delta_{n,n-1} = 0 \Rightarrow$

$\langle x \rangle = 0$

Q/ Determine the expectation value to a position  $x^2$  for L.H.O by using generator function?

Sol:  $y = \alpha x$  and  $x^2 = \frac{y^2}{\alpha^2}$

$\therefore \langle x^2 \rangle = N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n \frac{y^2}{\alpha^2} H_n \frac{dy}{\alpha} \Rightarrow \frac{N_n^2}{\alpha^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n y^2 H_n dy$

$\therefore y H_n = \frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1}$

$\Rightarrow y^2 H_n = \frac{1}{2} y H_{n+1} + n y H_{n-1}$

$y^2 H_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} H_{n+2} + (n+1) H_n \right) + n \left( \frac{1}{2} H_n + (n-1) H_{n-2} \right)$

$= \frac{1}{4} H_{n+2} + \frac{1}{2} n H_n + \frac{1}{2} H_n + \frac{1}{2} n H_n + n(n-1) H_{n-2}$

$= \frac{1}{4} H_{n+2} + \left( n + \frac{1}{2} \right) H_n + n(n-1) H_{n-2}$

$\therefore \langle x^2 \rangle = \frac{N_n^2}{\alpha^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n \left( \frac{1}{4} H_{n+2} + \left( n + \frac{1}{2} \right) H_n + n(n-1) H_{n-2} \right) dy$

but  $\delta_{n,n+2} = 0$  and  $\delta_{n,n-2} = 0 \Rightarrow$

$\langle x^2 \rangle = \frac{N_n^2}{\alpha^3} \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2 dy$

and  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n H_m dy = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$ , when  $n=m \Rightarrow \delta_{nn} = 1$

$\therefore \langle x^2 \rangle = \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right) N_n^2}{\alpha^3} 2^n n! \sqrt{\pi}$  but  $N_n^2 2^n n! \sqrt{\pi} = \alpha$

$\therefore \langle x^2 \rangle = \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right)}{\alpha^2}$

H.W! Determine  $\langle V \rangle$  for L.H.O by using generating function?



W A

16

Q/Determine the expectation value to a momentum  $\langle P_x \rangle$  for harmonic oscillator by using generating function?

Sol  $\therefore y = \alpha x$

$$\therefore \frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = \alpha \frac{d}{dy} \quad \text{and} \quad \hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \Rightarrow \hat{P}_x = -i\hbar \alpha \frac{d}{dy}$$

$$\therefore \langle P_x \rangle = -i\hbar N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} H_n \alpha \frac{d}{dy} e^{-y^2/2} H_n \frac{dy}{\alpha}$$

$$= -i\hbar N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} H_n \frac{d}{dy} e^{-y^2/2} H_n dy$$

$$\text{but } \frac{d}{dy} e^{-y^2/2} H_n = -y e^{-y^2/2} H_n + e^{-y^2/2} \frac{d}{dy} H_n$$

$$\therefore y H_n = \frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dy} H_n = 2n H_{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dy} e^{-y^2/2} H_n = e^{-y^2/2} \left( -\frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \right) + e^{-y^2/2} (2n H_{n-1})$$

$$= e^{-y^2/2} \left( -\frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} + 2n H_{n-1} \right)$$

$$= e^{-y^2/2} \left( n H_{n-1} - \frac{1}{2} H_{n+1} \right)$$

$$\therefore \langle P_x \rangle = -i\hbar N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} H_n e^{-y^2/2} \left( n H_{n-1} - \frac{1}{2} H_{n+1} \right) dy$$

$$= -i\hbar N_n^2 \left( n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n H_{n-1} dy - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n H_{n+1} dy \right)$$

$$\text{but } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n H_{n-1} dy = 0 \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n H_{n+1} dy = 0$$

$$\therefore \langle P_x \rangle = 0$$

H.W: Calculate the expectation values  $\langle P_x^2 \rangle$  for harmonic oscillator by using generator function?

$$(\text{Hint: } \langle P_x^2 \rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar^2)$$





Q/ Prove that  $y \psi_n(y) = \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(y)$  in L.H.S?

Sol

$$\therefore \psi_n(y) = N_n e^{-y^2/2} H_n(y) \quad \text{and } y \Rightarrow$$

$$y \psi_n(y) = N_n e^{-y^2/2} y H_n(y) \quad \text{but } y H_n(y) = \frac{1}{2} H_{n+1}(y) + n H_{n-1}(y)$$

$$\Rightarrow y \psi_n(y) = N_n e^{-y^2/2} \left( \frac{1}{2} H_{n+1}(y) + n H_{n-1}(y) \right)$$

$$\therefore y \psi_n(y) = e^{-y^2/2} \left( \frac{1}{2} N_n H_{n+1}(y) + n N_n H_{n-1}(y) \right)$$

$$\therefore N_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \Rightarrow y \psi_n(y) = e^{-y^2/2} \left( \frac{\sqrt{\alpha} H_{n+1}(y)}{2 \sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} + \frac{n \sqrt{\alpha} H_{n-1}(y)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \right)$$

$$\therefore y \psi_n(y) = e^{-y^2/2} \left( \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{n} H_{n+1}(y)}{\sqrt{2} \sqrt{2^{n+1} (n+1)!} \sqrt{\pi}} + \frac{n \sqrt{\alpha} H_{n-1}(y)}{\sqrt{2n} \sqrt{2^{n-1} (n-1)!} \sqrt{\pi}} \right)$$

$$= e^{-y^2/2} \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^{n+1} (n+1)!} \sqrt{\pi}} H_{n+1}(y) + \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^{n-1} (n-1)!} \sqrt{\pi}} H_{n-1}(y) \right)$$

$$= e^{-y^2/2} \left( \sqrt{\frac{n+1}{2}} N_{n+1} H_{n+1}(y) + \sqrt{\frac{n}{2}} N_{n-1} H_{n-1}(y) \right)$$

$$\therefore y \psi_n(y) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(y) + \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(y)$$

Q/ Prove that  $\frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y \psi_n(y) + \sqrt{2n} \psi_{n-1}(y)$  in L.H.S?

Sol  $\therefore \psi_n(y) = N_n e^{-y^2/2} H_n$

$$\therefore \frac{d\psi_n(y)}{dy} = N_n e^{-y^2/2} (-y) H_n + N_n e^{-y^2/2} \bar{H}_n(y)$$

$$\text{but } \bar{H}_n(y) = 2n H_{n-1}(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y \psi_n + N_n e^{-y^2/2} (2n H_{n-1}(y)) \quad \text{and } N_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y \psi_n + e^{-y^2/2} \left( 2n \frac{\sqrt{\alpha} H_{n-1}(y)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} \right)$$

$$\therefore \frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y \psi_n(y) + e^{-y^2/2} \left( \frac{2n}{\sqrt{2n}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^{n-1} (n-1)!} \sqrt{\pi}} H_{n-1}(y) \right)$$

$$= -y \psi_n(y) + \sqrt{2n} N_{n-1} e^{-y^2/2} H_{n-1}(y)$$

$$\therefore \frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y \psi_n(y) + \sqrt{2n} \psi_{n-1}(y)$$



Σ

18

Q / Prove that  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left( y - \frac{d}{dy} \right) \psi_n(y) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y)$  for H.O.?

where  $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y - \frac{d}{dy} \right)$  called creation operator

Sol

$$\therefore \frac{d\psi_n(y)}{dy} = -y \psi_n(y) + \sqrt{2n} \psi_{n-1}(y) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{and } y \psi_n(y) = \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(y) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(y)$$

$$\therefore \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(y) = y \psi_n(y) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(y) \quad \text{in eq. (1)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n(y)}{dy} &= -y \psi_n(y) + \sqrt{2n} \left( \sqrt{\frac{2}{n}} y \psi_n(y) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(y) \right) \\ &= -y \psi_n(y) + \sqrt{2} \sqrt{n} \left( \frac{2}{n} y \psi_n(y) - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \psi_{n+1}(y) \right) \\ &= -y \psi_n(y) + 2 y \psi_n(y) - \sqrt{2} \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y) \\ &= y \psi_n(y) - \sqrt{2} \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d\psi_n(y)}{dy} - y \psi_n(y) = -\sqrt{2} \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y) \quad * -1 \Rightarrow$$

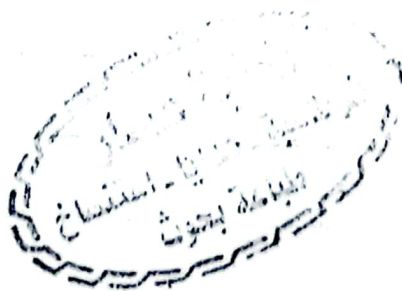
$$\left( y - \frac{d}{dy} \right) \psi_n(y) = \sqrt{2} \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y - \frac{d}{dy} \right) \psi_n(y) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y)$$

$$\therefore \hat{a}^+ \psi_n(y) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y) \quad \text{where } \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y - \frac{d}{dy} \right)$$

H.W : Prove that  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left( y + \frac{d}{dy} \right) \psi_n(y) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(y)$  for L.H.O.?

where  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y + \frac{d}{dy} \right)$  called destruction operator



Σ 1

19

Q/ Prove that  $\hat{a} = (2m\omega\hbar)^{-1/2} (m\omega x + i\hat{p}_x)$  for L.H.O?

Sol

$$\therefore \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y + \frac{d}{dy} \right)$$

but  $y = \alpha x$  and  $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$$\therefore \frac{d}{dy} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx}$$

$$\therefore \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx}$$

but  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x$

$$\therefore \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} i \hat{p}_x$$

$$= \frac{m\omega x + i\hat{p}_x}{(2m\omega\hbar)^{1/2}}$$

$$\therefore \hat{a} = (2m\omega\hbar)^{-1/2} (m\omega x + i\hat{p}_x)$$

H.W: Prove that  $\hat{a}^\dagger = (2m\omega\hbar)^{-1/2} (m\omega x - i\hat{p}_x)$  for L.H.O?

H.W: Prove that  $\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$  for L.H.O?



# المفصل الخامس

## الزخم الزاوي Angular Momentum

\* في الميكانيك الكلاسيكي  
الزخم الزاوي لجسيم كتلته  $m$  بالنسبة لنقطة لا حول  
مركبة إختصاصية ويعطى بالعلاقة الآتية :-

$$L = r \times p$$

يمكن تعريف الزخم الزاوي بدلالة مركباته على النحو الآتي :-

$$L = r \times p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= i(y p_z - z p_y) + j(z p_x - x p_z) + k(x p_y - y p_x)$$

في التعبير التقليدي (الكلاسيكي) لمركبات الزخم الزاوي

$$L_x = y p_z - z p_y$$

$$L_y = z p_x - x p_z$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

\* في الميكانيك الكمي

الزخم الزاوي

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$



$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ملاحظة الزخم الزاوي الكلي  $L$

Total Angular momentum

يمكن كتابته بالشكل الآتي :-

$$L = iL_x + jL_y + kL_z$$

المربع الزخم الزاوي الكلي  $L^2$  هو كمية غير اتجاهية :-

$$L^2 = L \cdot L = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right]$$

ملاحظة :-

$\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  هي مكونات الزخم الزاوي

وهي لا تتبادل وهو يعني :-

انه لا يمكن ايجاد قيم مشتركة ونفسية

الوقت لمكونات هذه المكونات ،

ص / ص  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$  يتبادلان او غير متبادلين

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] \psi = \hat{L}_x \hat{L}_y \psi - \hat{L}_y \hat{L}_x \psi$$

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$



و

$$\circ \circ [\hat{L}_x, \hat{L}_y] \Psi = (-i\hbar)^2 \left[ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi - \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi \right]$$

$$= (-i\hbar)^2 \left[ y \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - y \frac{\partial}{\partial z} \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left( z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right]$$

$$- \left[ z \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left( z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + x \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + x \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right]$$

$$= (-i\hbar)^2 \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} - y x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} + z x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} \right)$$

$$- z y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} + x y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left( - x z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial y} \right)$$

$$= (-i\hbar)^2 \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$$

$$\text{but } \hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\circ \circ = +i\hbar \left( -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \right)$$

$$= i\hbar \hat{L}_z$$

$$\circ \circ [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

واجب / انت

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

\* فيك البرهنة على ان  $L^2$  (مربع الزخم الكلي) متبادل مع  $L_x$   $L_y$   $L_z$

المركبات  
معينة ان

$$[L^2, L_x] = 0$$

$$[L^2, L_y] = 0$$

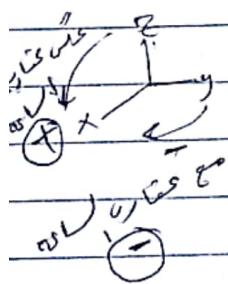
$$[L^2, L_z] = 0$$

د

$$[L^2, L_x] = [(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2), L_x]$$

$$= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]$$

$$= [L_x^2, L_x] + (L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y) + (L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z)$$



$$= (L_x^3 - L_x^3) + (L_y (-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z) L_y)$$

$$+ (L_z (i\hbar L_y) + (i\hbar L_y) L_z)$$

$$= 0 + i\hbar L_y L_z - i\hbar L_z L_y + i\hbar L_z L_y + i\hbar L_y L_z$$

$$= 0$$

$$\therefore [L^2, L_x] = 0$$

$$[L^2, L_y] = 0$$

$$[L^2, L_z] = 0$$

واجب  
ثبت

بما ان  $[L^2, L_z] = 0$  متبادلان ،

اذن :-  
 نستطيع ايجاد مجموعة من الحالات  $P_{lm}$  وهي حالات  
 مسطحة تكملها  
 $L^2$  و  $L_z$   
 في آن واحد

هذه هي اتيات  $L^2 P_{lm} = \hbar^2 l(l+1) P_{lm}$  — a

$L_z P_{lm} = m \hbar P_{lm}$  — b

$l$  : هو العدد الكمي المداري ، وبأخذ القيم  
 $l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

$m$  : هو العدد الكمي المغناطيسي ، وبأخذ القيم

$m = (-l, -l+1, -l+2, \dots, 0, \dots, l-1, l)$

$L^2 * \text{تأخذ القيم } \hbar^2 l(l+1) \text{ (معادلة a)}$

فان مقدار الزخم الزاوي المداري

$$|L| = \sqrt{L^2} = \sqrt{\hbar^2 l(l+1)} = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

\* كما ان معادلة (b) توضح لنا ان قيمة الزخم الزاوي

لا تتغير مع  $z$  :-

$L_z = m \hbar$   
 حيث يكون القيمة القصوى لـ  $m$  هي  $l$ .



علامات مهمة

\* ان الزخم الزاوي لجسيم يتحرك في حيز مركزي هو ثابتة  
حركة

فيم هذا الزخم فيكم ان يكون يدور يدور عن طريق

$$l \rightarrow \text{from } l=0, l=n-1$$

$$m \rightarrow -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$$

\* ان الحالات التي تميز  $l=0$  عدد كمي مداري  
 $m=0$  عدد كمي مغناطيسي

تسمى حالات s

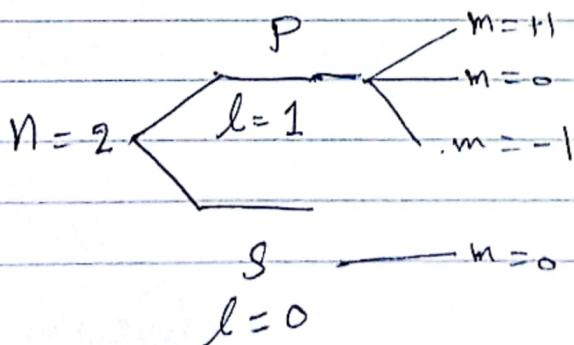
\* ان الحالات التي تميز  $l=1$   
 $m = (-1, 0, 1)$

تسمى حالات p

|    |       |   |   |   |   |
|----|-------|---|---|---|---|
| 00 | $l=0$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|    | s     | p | d | f | g |

وال

$$n=2 \quad \text{is}$$





✓

رموز ديراك

أدخل ديراك بعض الرموز لوصف حالة النظام بحد  
على الصفة الاحتمالية لحالات الجسيم

وهي تتقبن

~~bra~~

$\langle \text{Ket} |$  متجه كيت (موضعا مع دالة)

مثال مركبة المتجه بائيه  $x$ 

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

دالة متجه

$\langle \text{bra} |$  متجه براد (موضعا مع حرفين معقد)

$$\psi^*(x) = \langle \psi | x \rangle$$

متجه دالة

مثال

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

$$\int \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$\star \rightarrow \int \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx = 0$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$$

تمثل هاريزنبرك

وصف حالة النظام إلى صفرية ذات عدد واحد ويرمز لها

الهولقة المعقدة  $\psi^*$  // // وصف واحد //

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi| = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots)$$

في الميكانيك الكلاسيكي

لكل جسم نقرع  
عنه الزخم الزاوي

الزخم الزاوي اليرسي

$$S = I\omega$$

يتحقق بالحركة  
حول مركز الكتلة

الزخم الزاوي المداري

$$L = r \times p$$

يتحقق بالحركة  
حول نقطة معينة

العلاقات الرياضية الجبرية للزخم الزاوي اليرسي  
وهي صالحة للعلاقات الزخم الزاوي المداري حتى عندما  
الآن

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

أي انه مركبات الزخم الزاوي اليرسي (المغزلي) لا يتبادل  
عندما ينفرد

$$[S^2, S_x] = [S^2, S_y] = [S^2, S_z] = 0$$

أي انه مربع الزخم الزاوي اليرسي (المغزلي) يتبادل مع مركبات  
الزخم الزاوي اليرسي (المغزلي)



9

(3)

$$\textcircled{1} S^2 |S_m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |S_m\rangle \Rightarrow |s| = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

$$\textcircled{2} S_z |S_m\rangle = \hbar m |S_m\rangle$$

$$\textcircled{3} S_{\pm} = S_x \pm i S_y$$

$$S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$m_s = -S, -S+1, \dots, S-1, S$$

\* قسم الجسيمات الذرية

هناك اربع الفيزيائيات هي الجسيمات التي تخضع

الى احصاء فريمي - ديراك والتي تمتلك برم  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

كالالكترونات والبروتونات والنيوترونات التي برمها  $\frac{1}{2}$

هناك اربع البوزونات والتي تخضع الى احصاء بوز - اينشتاين والتي

تمتلك برم صفره  $S = 0, 1, 2, \dots$

على سبيل المثال

جسيم  $\alpha$  له برم  $0$

الفوتون  $1$

الكواركات  $2$



1.

Spin  $\frac{1}{2}$

البرم

وهي توصف بإثنائه مع الدوال الذاتية

$$| \overset{s}{\frac{1}{2}} \overset{m}{\frac{1}{2}} \rangle \text{ spin up } (\uparrow)$$

$$\text{توصف بالمصفوفة} \Rightarrow X_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$| \overset{s}{\frac{1}{2}} \overset{m}{-\frac{1}{2}} \rangle \text{ spin down } (\downarrow)$$

$$\text{توصف بالمصفوفة} \Rightarrow X_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

والتالي بناء عرثر الزخم Spin operator يصبح مصفوفة (2x2)

$$S^2 |s_m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s_m\rangle$$

$$S^2 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 X_+$$

$$\boxed{S^2 X_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 X_+} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S^2 |s_m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s_m\rangle$$

$$S^2 | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 X_-$$

$$\boxed{S^2 X_- = \frac{3}{4} \hbar^2 X_-} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{X_+ X_-}$$

بنفس الطريقة

$$\circ \circ S_z |s, m\rangle = m \hbar |s, m\rangle$$

$$S_z X_+ = S_z |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2} \hbar X_+$$

$$S_z X_- = S_z |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{2} \hbar X_-$$

$$\circ \circ S_z = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\circ \circ S_{\pm} |s, m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s, (m \pm 1)\rangle$$

$$S_+ X_- = S_- |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

$$S_+ X_- = \hbar \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+1)} |\frac{1}{2}, (\frac{1}{2}+1)\rangle$$

$$S_+ X_- = \hbar \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$S_+ X_- = \hbar X_+$$

$$\circ \circ \left\{ S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

وبنفس الطريقة

$$S_- X_+ = \hbar X_+$$

$$\circ \circ \left\{ S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

کریک

$$\boxed{S_+ X_+ = S_- X_- = 0}$$

$\therefore$  ~~نکته~~  $S_y$ ,  $S_x$  ~~مستقل~~ ~~مستقل~~ ~~مستقل~~ ~~مستقل~~ \*

$$\therefore S_{\pm} = S_x \pm i S_y$$

$$\therefore S_x = \frac{1}{2} (S_+ + S_-)$$

$$S_y = \frac{1}{2i} (S_+ - S_-)$$

$$\Rightarrow S_x X_+ = \frac{1}{2} \hbar X_+$$

$$S_x X_- = \frac{1}{2} \hbar X_-$$

and

$$S_y X_+ = -\frac{1}{2i} \hbar X_+$$

$$S_y X_- = \frac{1}{2i} \hbar X_-$$

while

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



ليكن وضعنا الجيد عالم

$$S = \frac{1}{2} k \Omega$$

$$\text{أو } \Omega_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



31/

رابع فزياء / كيمياء - المحرر

①

Angular Momentum ch4

نبدأ في الميكانيكا الكلاسيكية ثمة الزخم الزاوي لجسيم كتلة  $m$  يالديه لنته الأصل هو كمية التناظرية ونقدها باللاته الأتية:

$$L = r \times p$$

ويمكن تعريف الزخم الزاوي بمرادف تربية  
تبدل على الشكل الآتي:

$$L = r \times p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= i(y p_z - z p_y) + j(z p_x - x p_z) + k(x p_y - y p_x)$$

فالتعبير المتكامل لمكونات الزخم الزاوي:

$$L_x = y p_z - z p_y$$

$$L_y = z p_x - x p_z$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{and} \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

فالمزخم الزاوي الكلي  $L$  Total angular momentum يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$L = i L_x + j L_y + k L_z$$

مربع المزخم الزاوي الكلي  $L^2$  يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$L^2 = L \cdot L = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left( \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right)$$

أن مكونات مركبات المزخم الزاوي  $L_x, L_y, L_z$  لا تتبادل (do not commute)

وهذا يعني أنه لا يمكن أختيار قيم مشتركة ونسب الدت لمكونات هذه

المكونات ويمكن البصفة على ذلك:

Q/Determine  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$  ?

Sol

$$\therefore [\hat{L}_x, \hat{L}_y] \psi = \hat{L}_x \hat{L}_y \psi - \hat{L}_y \hat{L}_x \psi$$

$$\text{but } \hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ and } \hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\therefore [\hat{L}_x, \hat{L}_y] \psi = (-i\hbar)^2 \left\{ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi - \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \right\}$$

$$= (-i\hbar)^2 \left\{ y \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - y \frac{\partial}{\partial z} \left( x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left( z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left( z \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial x} \left( z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + x \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\}$$

$$= (-i\hbar)^2 \left( y \frac{\partial \psi}{\partial x} + y z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - y x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - z y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + x y \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y} - x z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right)$$

$$= (-i\hbar)^2 \left( y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$= +i\hbar \left( -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \right) \quad \text{but } \hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\therefore [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

H.W prove that:- (what is the physical meaning of the result)

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

We can prove that  $\hat{L}^2$  does commute with the component of  $\hat{L}$  ( $\hat{L}_x, \hat{L}_y$  and  $\hat{L}_z$ )

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x]$$

$$= (\hat{L}_x^2 \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_x^2) + (\hat{L}_y [\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x] \hat{L}_y) + (\hat{L}_z [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \hat{L}_z)$$

$$= (\hat{L}_x^3 - \hat{L}_x^3) + (\hat{L}_y (-i\hbar \hat{L}_z) + (-i\hbar \hat{L}_z) \hat{L}_y) + (\hat{L}_z (i\hbar \hat{L}_y) + (i\hbar \hat{L}_y) \hat{L}_z)$$

$$= 0 - i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_z - i\hbar \hat{L}_z \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_z \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_z = 0$$

$$\therefore [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$$

٢

أذا  $L_1^2, L_2^2$  متبادلة .  $Comute$  .  $[L_1^2, L_2^2] = 0$  .  $Comute$  .  
 أيما دمجية من العلاقة  $L_1^2, L_2^2$  .  $Comute$  .  $[L_1^2, L_2^2] = 0$  .  
 يمكن أن يثبت التوقعين التاليين :

$$L^2 \psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1) \psi_{lm} \quad \text{--- (a)}$$

$$L_z \psi_{lm} = m \hbar \psi_{lm} \quad \text{--- (b)}$$

حيث  $l$  هو العدد الكمي المداري .  $Angular$   $Q. no.$  .  $Comute$  .  
 $0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

$m$  هو العدد الكمي المغناطيسي .  $Magnetic$   $Q. no.$  .  $Comute$  .  
 $l, l-1, \dots, 0, \dots, l-2, l-1, l$

ولذلك كانت  $L^2$  تأخذ القيم  $\hbar^2 l(l+1)$  من معادلة (a) فأمر قيمة  $l$  في  
 التوزيع المداري هي

$$|L| = \sqrt{L^2} = \sqrt{\hbar^2 l(l+1)}$$

$$= \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

كما أنه معادلة (b) تدفع لنا أن قيمة التخم الزاوي باتجاه المحور  $z$  هي

$$L_z = m \hbar$$

وكذلك القيمة القصوى لـ  $m$  هي  $l$





Spin

الزخم الزاوي اللفي (المغزلي) S

في الميكانيك الكلاسيكية فإن لكل جسم تدويري من الزخم الزاوي  
 صا الزخم الزاوي المداري orbital angular momentum  $L = r \times p$   
 ويتغير بالحرارة حول نقطة معينة.

ولزخم الزاوي المداري spin angular momentum  $S = I \omega$   
 ويتغير بالحرارة حول مركز العجلة.

وأن العلاقات الرياضية الجيدة هي مطابقة لمدقات الزخم الزاوي  
 المداري في طائفة الكم وكالتالي:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad ; \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x \quad ; \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

أي أن مركبات الزخم الزاوي المتعددة (اليم S) لا يتبادل فيما بينها  
 and:  $[S^2, S_x] = [S^2, S_y] = [S^2, S_z] = 0$   
 وهذا يعني أن مربع الزخم الزاوي المتعددة يتبادل مع مركبات الزخم الزاوي المتعددة  
 وكذلك فإنه:

$$S^2 |S, m\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, m\rangle \Rightarrow |S| = \sqrt{S(S+1)} \hbar$$

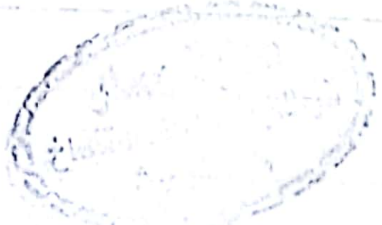
$$S_z |S, m\rangle = \hbar m |S, m\rangle$$

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y$$

Where  $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  و  $m_s = -S, -S+1, \dots, S-1, S$

وبما أن القيم بالذات من التغيرات هي الجسيمات التي تنضم إلى الجسيمات  
 جديداً ويتركز والتي تمتلك قيم  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  كالألكترونات واليونات  
 والنيوترونات والتي يكون  $\frac{1}{2}$

أو اليوترونات والتي تنضم إلى الجسيمات بوزاينيين والتي تمتلك  
 عدداً 0, 1, 2, ... و  $S = 0$  وعلى سبيل المثال هيم  $\alpha$  له  $S = 0$   
 والنيوترون له  $S = \frac{1}{2}$  والكبريتون له  $S = 2$





Spin  $\frac{1}{2}$



وهو تمثيل رياضي من المبدأ الثاني.

وتسمى بالمتجهة  $\uparrow$  Spin up  $(\uparrow) \Rightarrow X_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

وتسمى بالمتجهة  $\downarrow$  Spin down  $(\downarrow) \Rightarrow X_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

حيث أن  $(2 \times 2)$  Spin operator يعبر عنه

$$S^2 |S, m\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, m\rangle$$

$$\Rightarrow S^2 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 X_+$$

$$\Rightarrow S^2 X_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 X_+$$

$$S^2 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = S^2 X_- = \frac{3}{4} \hbar^2 X_- \Rightarrow S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore S_z |S, m\rangle = m\hbar |S, m\rangle$$

$$\therefore S_z X_+ = S_z \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \hbar X_+$$

$$\text{and } S_z X_- = S_z \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \hbar X_- \Rightarrow S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore S_{\pm} |S, m\rangle = \hbar \sqrt{S(S+1) - m(m \pm 1)} |S, (m \pm 1)\rangle$$

$$\Rightarrow S_+ X_+ = S_+ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} \left| \frac{1}{2}, \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right\rangle$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar X_+ \Rightarrow S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{and } S_- X_+ = \hbar X_+$$

$$\text{and } S_+ X_- = S_- X_- = 0 \Rightarrow S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ولذلك  $S_y$  و  $S_x$  يعبر عنه

$$\therefore S_{\pm} = S_x \pm i S_y \Rightarrow S_x = \frac{1}{2} (S_+ + S_-) \text{ and } S_y = \frac{1}{2i} (S_+ - S_-)$$

$$\Rightarrow S_x X_+ = \frac{\hbar}{2} X_- \text{ and } S_x X_- = \frac{\hbar}{2} X_+$$

$$\text{and } S_y X_+ = -\frac{\hbar}{2i} X_- ; S_y X_- = \frac{\hbar}{2i} X_+$$

while

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Let } \hat{S} = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## طرق التقريب Approximation methods

توجد بعض المسائل في ميكانيكا الكم لا يمكن معالجتها بصورة مباشرة بطرق الحل المباشر بمعادلات شرودنجر، وذلك لوجود تعقيدات في هذه المسائل وبذلك توجد نوعان من الأنظمة:

- ① الأنظمة التي فيها المقسمة تتغير بتأثير خارجي
  - مثال ذلك تفرق ذرة الهيدروجين لجبال خارجي (كهربائي، مغناطيسي، أو حراري)
  - ② الأنظمة التي هي بالأساس أنظمة مقسمة تتغير بوجود حالات طاقية
  - مثل ذرة الهليوم التي تحتوي تداخل كهرمغناطيسي بين الترتيبين
- وبالتالي لا يوجد حل مباشر لها وتؤدي إلى ظهور مفهوم اضطرابية للنظرية الكمومية

## Time independent perturbation theory

نظرية الاضطراب غير المعتمدة على الزمن

أن نظرية الاضطراب والتي أختارها شرودنجر عام 1926 وهي أصغر لمحة التقريب

وهي الملاحظة أن المؤثر الماضوي هو:  
حيث  $H_1$  هو الاضطراب Perturbing term وأن التأثيرات الناتجة عنه هي الاضطرابات  
ففي ذرة الهيدروجين على سبيل المثال فإن  $H_0$  هو المؤثر الماضوي كذرة الهيدروجين  
و  $H_1$  هو الاضطراب للمجال الخارجي.  
ولحساب التقريب العنفي والأول والثاني نفرض أن المؤثر الماضوي:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$$

$$\psi = \psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \lambda^3 \psi_3 + \dots \quad (1)$$

$$\text{and } E = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \lambda^3 E_3 + \dots \quad (2)$$

$$\text{and } E = E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \lambda^3 E_3 + \dots \quad (3)$$

الآن من علاقة القيمة الذاتية لمعادلة شرودنجر

$$\hat{H} \psi = E \psi \quad (4)$$

نفرض  $E / \psi / H$  في معادلاته ① / ② / ③ في معادلة ④

$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1)(\psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \dots) = (E_0 + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \dots)(\psi_0 + \dots)$$



$$\Rightarrow H_0 \psi_0 + \lambda H_0 \psi_1 + \lambda^2 H_0 \psi_2 + \dots + \lambda H \psi_0 + \lambda^2 H \psi_1 + \lambda^3 H \psi_2 + \dots$$

$$= E_0 \psi_0 + \lambda E_0 \psi_1 + \lambda^2 E_0 \psi_2 + \dots + \lambda E_1 \psi_0 + \lambda^2 E_1 \psi_1 + \lambda^3 E_1 \psi_2 + \dots$$

$$+ \lambda^2 E_2 \psi_0 + \lambda^3 E_2 \psi_1 + \lambda^4 E_2 \psi_2 + \dots$$

وبالمقارنة بين الطرفين المتساويين للأصناف  $\psi_0$   
الترتيب الأول

$$H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0$$

and  $\lambda H_0 \psi_1 + \lambda H \psi_0 = \lambda E_0 \psi_1 + \lambda E_1 \psi_0 \quad \div \lambda$

$$\Rightarrow H_0 \psi_1 + H \psi_0 = E_0 \psi_1 + E_1 \psi_0 \quad \text{الترتيب الأول}$$

also:  $\lambda^2 H_0 \psi_2 + \lambda^2 H \psi_1 = \lambda^2 E_0 \psi_2 + \lambda^2 E_1 \psi_1 + \lambda^2 E_2 \psi_0 \quad \div \lambda^2$

$$\Rightarrow H_0 \psi_2 + H \psi_1 = E_0 \psi_2 + E_1 \psi_1 + E_2 \psi_0 \quad \text{الترتيب الثاني}$$

ومن الجدير بالذكر أن  $\lambda$  هو عامل رياضي ضالحي في الحدود وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد.

وهناك عدد من طرق الترتيب ومن أهمها:

- ① طريقة التباين Variation method
- ② طريقة الاضطراب Perturbation theory method
- ③ طريقة WKB
- ④ طريقة الحقل المتزامن Self Consistent field