



# Numerical Analysis

**Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed**

**Department of Computer Science, College of Education for Pure Science / Ibn-Al Haitham,  
University of Baghdad, Iraq.**



## Chapter One

### Introduction to Numerical Analysis

Numerical analysis is concerned with the development and analysis of methods for the numerical solution of practical problems. Traditionally, these methods have been mainly used to solve problems in the physical sciences and engineering. However, they are finding increasing relevance in a much broader range of subjects including economics and business studies.

التحليل العددي يهتم بالتطور وتحليل طرق الحل العددي لمشاكل عملية بطرق تقليدية، كانت هذه الأساليب تستخدم أساساً لحل المشاكل في العلوم الفيزيائية وهندسة. ومع ذلك، فإنها تجد أهمية متزايدة في مجموعة واسعة من المواضيع بما في ذلك الاقتصاد والدراسات التجارية.

The first stage in the solution of a particular problem is the formulation of a mathematical model. Mathematical symbols are introduced to represent the variables involved and physical (or economic) principles are applied to derive equations which describe the behavior of these variables. Unfortunately, it is often impossible to find the exact solution of the resulting mathematical problem using standard techniques. In fact, there are very few problems for which an analytical solution can be determined. For example, there are formulas for solving quadratic, cubic and quartic polynomial equations, but no such formula exists for polynomial equations of degree greater than four or even for a simple equation such as  $x = \sin(x)$ .

المرحلة الأولى في حل مشكلة معينة هي صياغة نموذج رياضي. يتم تقديم الرموز الرياضية لتمثيل المتغيرات المعنية ويتم تطبيق المبادئ الفيزيائية (أو الاقتصادية) لاستخلاص المعادلات التي تصف سلوك هذه المتغيرات. ولحسن الحظ، غالباً ما يكون من المستحيل العثور على الحل الدقيق للمسألة الرياضية الناتجة باستخدام التقنيات التقنيّة القياسية. في الواقع، هناك عدد قليل جداً من المشكلات التي يمكن تحديد حل تحليلي لها. على سبيل المثال، هناك صيغ لحل المعادلات متعددة الحدود من الدرجة الثانية، والمكعبة، والرابعة، ولكن لا توجد صيغة من هذا القبيل لمتعددة الحدود معادلات درجة أكبر من أربعة أو حتى المعادلة البسيطة مثل  $x = \sin(x)$ .

Similarly, we can certainly evaluate the integral  $A = \int_a^b e^x dx$  as  $e^b - e^a$ , but we cannot find the exact value of  $A = \int_a^b e^{x^2} dx$ , since no function exists which differentiates to  $e^{x^2}$ , when an analytical solution can be found it may be of more theoretical than practical use.

كذلك، يمكننا بالتأكيد إيجاد قيمة التكامل  $A = \int_a^b e^x dx$  مثل  $e^b - e^a$ ، لكن لا يمكننا العثور على القيمة الدقيقة لـ  $A = \int_a^b e^{x^2} dx$  نظراً لعدم وجود دالة تفرق بين  $e^{x^2}$ ، وعندما يمكن العثور على حل عددي، فقد يكون الاستخدام النظري أكثر من العملي.

**Numerical analysis :-** involves the study, development, and analysis of algorithms for obtaining numerical solutions to various mathematical problems. Frequently, numerical analysis is called the mathematics of scientific computing.

**التحليل العددي:-** يشمل دراسة وتطوير وتحليل الخوارزميات للحصول على حلول عديدة لمختلف المشاكل الرياضية. في كثير من الأحيان، يسمى التحليل العددي رياضيات الحوسبة العلمية.

## ERRORS AND STABILITY

The majority of numerical methods involve a large number of calculations which are best performed on a computer or calculator. Unfortunately, such machines are incapable of working to infinite precision and so small errors occur in nearly every arithmetic operation. Even an apparently simple number such as  $2/3$  cannot be represented exactly on a computer. This number has a non-terminating decimal expansion  $0.66666666666666 \dots$  and if, for example, the machine uses ten-digit arithmetic, then it is stored as  $0.666\ 666\ 666\ 7$  (In fact, computers use binary arithmetic. However, since the substance of the argument is the same in either case, we restrict our attention to decimal arithmetic for simplicity).

### الأخطاء والاستقرار

غالبية الطرق العددية تتطوي على عدد كبير من العمليات الحسابية التي من الأفضل إجراؤها على الكمبيوتر أو آلة حاسبة. لسوء الحظ، مثل هذه الآلات غير قادرة على ذلك العمل بدقة متناهية وتحدث أخطاء صغيرة جداً تقريباً كل العمليات الحسابية. حتى الأعداد التي تبدو بسيطة مثل  $2/3$  لا يمكن تمثيلها بدقة كمبيوتر. يحتوي هذا الرقم على علامة عشرية غير منتهية توسع

$0.66666666666666 \dots$

وإذا، على سبيل المثال، يستخدم الجهاز عملية حسابية مكونة من عشرة أرقام، ثم يتم تخزينه كـ  $0.666\ 666\ 666\ 7$  في الواقع، تستخدم أجهزة الكمبيوتر الحساب الثنائي. ومع ذلك، منذ ذلك الحين جوهر الحجة هو نفسه في كلتا الحالتين، نحن تقييد اهتمامنا بالحساب العشري من أجل البساطة.

## Errors

Computations generally yield approximations as their output. This output may be an approximation to a true solution of an equation, or an approximation of a true value of some quantity.

### الأخطاء

تسفر الحسابات بشكل عام عن تقديرات تقريبية. قد يكون هذا الناتج تقريبياً للحل الحقيقي للمعادلة، أو تقريبياً للقيمة الحقيقية لبعض القيم الكمية.

### Error:

The numerical solution for any problems is an approximate value to the exact solution.  
numerical solution + error = exact solution

**تعريف الخطأ:-** الحل العددي لأي مشكلة هو قيمة تقريبية للحل الدقيق

الحل العددي + الخطأ = الحل الدقيق

## Sources of Errors: مصادر الأخطاء

### 1- Formulation Error أخطاء الصياغة

It happened during question form.

### 2- Rounding off Error and Chopping Errors : - أخطاء القطع والتدوير

These errors are made when decimal fraction is rounded or chopped after the final digit.

### Example

$$1.36579 \Rightarrow 1.3657 \text{ and } 1.36579 \Rightarrow 1.3658$$

$$1.86548 \Rightarrow 1.8654 \text{ and } 1.86543 \Rightarrow 1.8655$$

### 3- Truncation Error أخطاء القطع

These error are made from replacing an infinite process by finite one.

### Example

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \dots \text{ (Maclourin series)}$$

Now, if we want to find for small  $x$  then we will consider the terms  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$  Which gives us a good approximation, hence the truncation error is the infinite series

$$-\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} .$$

#### 4- Inherent Error أخطاء الصليبية

وهي الأخطاء الموجودة في البيانات الأساسية للمسألة أو الموجودة في الأجهزة الإلكترونية المستخدمة في المسائل العلمية كما ان رايها قياس مسافة أو فولطية في مسألة معينة وكذلك تطلق على الأخطاء الموجودة في البيانات مثل الأعداد غير النسبية مثل

#### Example

$$e^1, \quad \pi, \quad \sqrt{2}$$

#### 5- Accumulation Error أخطاء المتراكمة

وهي الأخطاء التي تنتج من اعتماد كل خطوة على القيم التقريبية للخطوة السابقة كما بعض الطرق العديدة للمعادلات التفاضلية حيث تتضمن تكرارا للمجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة.

#### Example

$$\begin{aligned} \sin x &= 0.135843 \\ &= 0.1358. \end{aligned}$$

#### 6- Floating-Point Numbers and Round off Errors

In the case Floating decimal Point we write the numbers as follows

$$x = F \times b^k \text{ such that } F = \mp 0.d_1d_2d_3 \dots d_n, \quad 0.1 \leq |F| \leq 1, \quad b = 2, 10, \dots$$

#### أرقام الفاصلة العائمة وأخطاء التقرب

#### Example

$$\begin{aligned} a = 635894 & \text{ is written as } 0.6359 \times 10^4 & \text{ by Rounding} \\ b = 0.00375 & \text{ is written as } 0.375 \times 10^{-2} & \text{ by Rounding} \\ c = -256.67 & \text{ is written as } -0.2567 \times 10^3 & \text{ by Rounding} \end{aligned}$$

**Errors** are commonly measured in one of two ways: absolute error and relative error as the following definition.

يتم قياس الأخطاء عادة في واحدة من بطريقتين: الخطأ المطلق والخطأ النسبي على التعريف التالي .

**The Absolute Error :-** Let the real number  $x$  and the approximate number  $x^*$ ,  
error = exact solution - numerical solution

the **Error** is  $x - x^*$ . The **absolute error** ( $e_x$ ) is  $|x - x^*|$ ,  $e_x = |x - x^*|$ .

**الخطأ المطلق:-** لتكن الرقم الحقيقي  $x$  والرقم التقريبي  $x^*$  , الخطأ هو  $x - x^*$  .

الخطأ = الحل الدقيق - الحل العددي .

الخطأ المطلق ( $e_x$ ) هو  $|x - x^*|$  ،  $e_x = |x - x^*|$  .

**The Relative Error :-** the relative error is defined as

$$(\delta_x) \text{ is } \left| \frac{x-x^*}{x} \right| , \quad \delta_x = \left| \frac{x-x^*}{x} \right| = \frac{e_x}{|x|} .$$

**الخطأ النسبي:-** يعرف الخطأ النسبي على انه النسبة بين الخطأ المطلق الى مطلق الرقم الحقيقي.

## Errors In Calculations

Let  $x^*$ ,  $y^*$  are two approximate values of the tow numbers a, b with absolute Errors  $e_x, e_y$  and  $\delta_x, \delta_y$  relative Errors

1- Absolute errors in  $x + y$

$$e_{x+y} = (x + y) - (x^* + y^*)$$

$$e_{x+y} = (x - x^*) + (y - y^*) \Rightarrow e_{x+y} = e_x + e_y$$

Relative Errors in  $x + y$

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x + y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x + y} (e_x + e_y)$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} \left( x \frac{e_x}{x} + y \frac{e_y}{y} \right) \Rightarrow \delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (x\delta_x + y\delta_y)$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (e_x + e_y) .$$

2- Absolute errors in  $x - y$

$$e_{x-y} = (x - y) - (x^* - y^*) = x - y - x^* + y^*$$

$$e_{x-y} = (x - x^*) - (y - y^*) \Rightarrow e_{x-y} = e_x - e_y$$

Relative Errors in  $x - y$

$$\delta_{x-y} = \frac{e_{x-y}}{x-y} = \frac{e_x - e_y}{x-y} = \frac{1}{x-y} (e_x - e_y)$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} \left( x \frac{e_x}{x} - y \frac{e_y}{y} \right) \Rightarrow \delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (x\delta_x - y\delta_y)$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (e_x - e_y).$$

3- Absolute errors in  $x.y$

$$e_{x.y} = x.y - (x^*.y^*) = x.y - (x - e_x).(y - e_y)$$

$$= x.y - (x.y - x.e_y - y.e_x + e_x.e_y)$$

$$e_{x.y} = x.e_y + y.e_x$$

Relative Errors in  $x.y$

$$(e_{x.y} = x.e_y + y.e_x) \div (x.y)$$

$$\delta_{x.y} = \delta_x + \delta_y.$$

4- Absolute errors in  $\frac{x}{y}$  and Relative Errors in  $\frac{x}{y}$ .

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{(x - e_x)}{(y - e_y)} = \frac{(x - e_x)}{y \cdot \left(1 - \frac{e_y}{y}\right)} = \frac{(x - e_x)}{y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}}$$

لان العامل الثاني هو عبارة عن مجموع متسلسلة هندسية

$$1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \dots +$$

يكون

$$\frac{x^*}{y^*} = \left(\frac{x - e_x}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \dots\right)$$

لان بإهمال الحدود التي تحتوي على حاصل ضرب خطأين فأكثر نحصل على الخطأ المطلق

$$\frac{x^*}{y^*} = \left(\frac{x - e_x}{y}\right) + \left(\frac{x - e_x}{y}\right) \left(\frac{e_y}{y}\right) + \left(\frac{x - e_x}{y}\right) \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \dots$$

$$= \frac{x}{y} - \left(\frac{e_x}{y}\right) + \left(\frac{x.e_y}{y^2} - \frac{e_x.e_y}{y^2}\right) + \dots$$

$$\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} = \left(\frac{e_x}{y} - \frac{e_x.e_y}{y^2}\right) + \dots$$

$$\Rightarrow e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right)$$

Relative Errors in  $\frac{x}{y}$

$$\left( e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right) \right) \div \left( \frac{x}{y} \right) \Rightarrow \delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$$

4- Absolute errors in  $x + y$

$$e_{x+y} = (x + y) - (x^* + y^*)$$

$$e_{x+y} = (x - x^*) + (y - y^*) \Rightarrow e_{x+y} = e_x + e_y$$

Relative Errors in  $x + y$

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x + y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x + y} (e_x + e_y)$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} \left( x \frac{e_x}{x} + y \frac{e_y}{y} \right) \Rightarrow \delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (x\delta_x + y\delta_y)$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (e_x + e_y)$$

5- Absolute errors in  $x - y$

$$e_{x-y} = (x - y) - (x^* - y^*) = x - y - x^* + y^*$$

$$e_{x-y} = (x - x^*) - (y - y^*) \Rightarrow e_{x-y} = e_x - e_y$$

Relative Errors in  $x - y$

$$\delta_{x-y} = \frac{e_{x-y}}{x - y} = \frac{e_x - e_y}{x - y} = \frac{1}{x - y} (e_x - e_y)$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} \left( x \frac{e_x}{x} - y \frac{e_y}{y} \right) \Rightarrow \delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (x\delta_x - y\delta_y)$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (e_x - e_y)$$

6- Absolute errors in  $x \cdot y$

$$e_{x \cdot y} = x \cdot y - (x^* \cdot y^*) = x \cdot y - (x - e_x) \cdot (y - e_y)$$

$$= x \cdot y - (x \cdot y - x \cdot e_y - y \cdot e_x + e_x e_y)$$

$$e_{x \cdot y} = x \cdot e_y + y \cdot e_x$$

Relative Errors in  $x \cdot y$

$$(e_{x \cdot y} = x \cdot e_y + y \cdot e_x) \div (x \cdot y)$$

$$\delta_{x \cdot y} = \delta_x + \delta_y.$$

4-Absolute errors in  $\frac{x}{y}$  and Relative Errors in  $\frac{x}{y}$ .

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{(x - e_x)}{(y - e_y)} = \frac{(x - e_x)}{y \cdot (1 - \frac{e_y}{y})} = \frac{(x - e_x)}{y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}}$$

لان العامل الثاني هو عبارة عن مجموع متسلسلة هندسية

$$1 + \frac{e_y}{y} + (\frac{e_y}{y})^2 + (\frac{e_y}{y})^3 + \dots +$$

يكون

$$\frac{x^*}{y^*} = \left( \frac{x - e_x}{y} \right) \cdot \left( 1 + \frac{e_y}{y} + (\frac{e_y}{y})^2 + (\frac{e_y}{y})^3 + \dots \right)$$

لان بإهمال الحدود التي تحتوي على حاصل ضرب خطأين فأكثر نحصل على الخطأ المطلق

$$\frac{x^*}{y^*} = \left( \frac{x - e_x}{y} \right) + \left( \frac{x - e_x}{y} \right) \left( \frac{e_y}{y} \right) + \left( \frac{x - e_x}{y} \right) \left( \frac{e_y}{y} \right)^2 + \dots$$

$$= \frac{x}{y} - \left( \frac{e_x}{y} \right) + \left( \frac{x \cdot e_y}{y^2} - \frac{e_x \cdot e_y}{y^2} \right) + \dots$$

$$\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} = \left( \frac{e_x}{y} - \frac{e_x \cdot e_y}{y^2} \right) + \dots$$

$$\Rightarrow e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right)$$

Relative Errors in  $\frac{x}{y}$

$$\left( e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right) \right) \div \left( \frac{x}{y} \right) \Rightarrow \delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y.$$

	Absolute errors	Relative Errors
$x + y$	$e_{x+y} = e_x + e_y$	$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (e_x + e_y)$
$x - y$	$e_{x-y} = e_x - e_y$	$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (e_x - e_y)$
$x \cdot y$	$e_{x \cdot y} = x \cdot e_y + y \cdot e_x$	$\delta_{x \cdot y} = \delta_x + \delta_y$
$x/y$	$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right)$	$\delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$

### Example

1- If  $x = 5.2$ ,  $y = 3.12$  two numbers are round for two and three numbers decimal places find  $e_{x+y}$ ,  $\delta_{x+y}$ ,  $e_{x-y}$ ,  $\delta_{x-y}$ ,  $e_{x \cdot y}$ ,  $\delta_{x \cdot y}$ ,  $e_{\frac{x}{y}}$ ,  $\delta_{\frac{x}{y}}$ .

### Solution:

$$e_x = 0.05 \text{ and } e_y = 0.005.$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y = 0.05 + 0.005 = 0.055.$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (e_x + e_y) = \frac{1}{5.2+3.12} (0.055) = 0.0066.$$

$$e_{x-y} = e_x - e_y = 0.05 - 0.005 = 0.045.$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (e_x - e_y) = \frac{1}{5.2-3.12} (0.045) = \frac{1}{2.08} (0.045) = (0.4808)(0.045) = 0.0216.$$

$$e_{x \cdot y} = x \cdot e_y + y \cdot e_x = (5.2)(0.005) + (3.12)(0.05) = (0.026) + (0.156) = 0.1820.$$

$$\delta_{x \cdot y} = (\delta_x + \delta_y) = \left( \frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y} \right) = \left( \frac{0.05}{5.2} + \frac{0.005}{3.12} \right) = ((0.0096) + (0.0016)) = 0.0112.$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right) = \frac{5.2}{3.12} \cdot \left( \frac{0.05}{5.2} - \frac{0.005}{3.12} \right) = (1.6667) \cdot ((0.0096) - (0.0016)) = (1.6667) \cdot (0.008) = 0.0133.$$

$$\delta_{\frac{x}{y}} = (\delta_x - \delta_y) = \left( \frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right) = \left( \frac{0.05}{5.2} - \frac{0.005}{3.12} \right) = ((0.0096) - (0.0016)) = 0.0080.$$

## Homework

1- If  $x = 3.5$  ,  $y = 2.19$  two numbers are round for four numbers decimal places find  $e_{x+y}$  ,  $\delta_{x+y}$  ,  $e_{x-y}$  ,  $\delta_{x-y}$  ,  $e_{x.y}$  ,  $\delta_{x.y}$  ,  $\frac{e_x}{y}$  ,  $\frac{\delta_x}{y}$  .

2- If  $x = 19.65$  ,  $y = 23.28$  two numbers are round for four numbers decimal places find  $e_{x+y}$  ,  $\delta_{x+y}$  ,  $e_{x-y}$  ,  $\delta_{x-y}$  ,  $e_{x.y}$  ,  $\delta_{x.y}$  ,  $\frac{e_x}{y}$  ,  $\frac{\delta_x}{y}$  .

3- If  $x = 3.755$  ,  $y = 4.20$  two numbers are round for four numbers decimal places find  $e_{x+y}$  ,  $\delta_{x+y}$  ,  $e_{x-y}$  ,  $\delta_{x-y}$  ,  $e_{x.y}$  ,  $\delta_{x.y}$  ,  $\frac{e_x}{y}$  ,  $\frac{\delta_x}{y}$  .

4- If  $x = 36.253$  ,  $y = 25.137$  two numbers are round for four numbers decimal places find  $e_{x+y}$  ,  $\delta_{x+y}$  ,  $e_{x-y}$  ,  $\delta_{x-y}$  ,  $e_{x.y}$  ,  $\delta_{x.y}$  ,  $\frac{e_x}{y}$  ,  $\frac{\delta_x}{y}$  .