Numerical Analysis

Prof. Dr. Areej Tawfeeq Hameed

Department of Computer Science, College of Education for Pure Science / Ibn-Al Haitham, University of Baghdad, Iraq.

Chapter Three

Matrixes

In mathematics, a matrix is a rectangular set of numbers, symbols, or expressions organized into columns and rows. Each element of this set is called an element or entry of the matrix.

المصفوفات

في الرياضيات، **المصفوفة** هي مجموعة مستطيلة من الأعداد أو من الرموز أومن التعبيرات منتظمة بشكل أعمدة وصفوف. يُدعى كل عنصر من هذا المجموعة بعنصرٍ أو مدخلٍ للمصفوفة.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{121} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} = (a_{ij})_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times3} = (b_{ij})_{3\times3} \quad \text{or}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{121} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3} = [a_{ij}]_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} = [b_{ij}]_{3\times3}.$$

مثلا

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

درجة المصفوفة:

المصفوفة التي لها m صفوف و n اعمدة نقول عنها أنها من الدرجة $n \times m$, و إذا n = m فإننا نقول أن المصفوفة من الدراجة n .

Types of Matrixes   أنواع المصفوفات

1- **Row matrix:** It is a matrix that consists of only one row.

1- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

$$(a_{11} \quad \dots \quad a_{n1})_{1\times n} = (a_{ij})_{1\times n} \quad \text{or} \quad [a_{11} \quad \dots \quad a_{n1}]_{1\times n} = [a_{ij}]_{1\times n}$$ مثل

$$(1 \quad 2 \quad 3)_{1\times3} \quad \text{or} \quad [1 \quad 2 \quad 3]_{1\times3}$$

2- **Columnar matrix:** It is a matrix that consists of only one column.

2- **المصفوفة العمودية:** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times1} = [a_{ij}]_{m\times1} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times1} = (a_{ij})_{m\times1}$$ مثل $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

3- **Square matrix:** It is a matrix whose number of rows is equal to the number of columns.

3- **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ \vdots & .. & \vdots \\ b_{m1} & .. & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} \text{Or} \begin{bmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ \vdots & .. & \vdots \\ b_{m1} & .. & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$$

مثل

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

4**- Zero matrix:** It is a matrix in which all elements are zeros.

4- **المصفوفة الصفرية :** هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار. ويرمز لها $(O_{n\times n} = O_n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{Or} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

5-**Diagonal matrix:** It is a square matrix in which all elements are equal to zero except for the diagonal

5- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطرالمصفوفة القطرية Diagonal Matrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{Or} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

6- Unit matrix: It is a square matrix in which all elements are equal to zero except for the main diagonal, which is equal to

6- **مصفوفة الواحدية :** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها $(I_{n\times n} = I_n)$ Identity Matrix مثل

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{Or} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

7-Standard matrix: It is a square matrix in which all elements are equal to zero except for the main diagonal, which is equal to a certain number.

7- المصفوفة القياسية **:** هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى عدد معين مثل

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \text{ or } \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{Or} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 3} \text{ or } \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

8- The lower triangular matrix: elements above the diagonal are zeros. Square (lower triangular) matrix

8-المصفوفة المثلثية السفلى :عناصر ما فوق القطر اصفار. المصفوفة المربعة (المثلثية السفلى)

مثل $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$ or $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$ $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ or $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$ Or

- 9-The upper triangular matrix: the elements under the diagonal are zeros. Square (upper triangular) matrix

-9 -المصفوفة المثلثية العليا :عناصر ما تحت القطر اصفار. المصفوفة المربعة (المثلثية العليا) مثل

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}_{2\times2}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$ Or $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}_{3\times3}$.

Operations on the Matrix العمليات على المصفوفة

Equality of matrices

A set of conditions must be met for the matrices to be equal. Two or more matrices are said to be equal if all the matrices have the same dimensions and all corresponding elements of the matrices are equal.

تساوي المصفوفات :

يجب تحقق مجموعة من الشروط حتى تتساوى المصفوفات ، حيث يقال إن مصفوفتين أو أكثر متساوية إذا كان لجميع المصفوفات نفس الأبعاد وجميع العناصر التمقابلة للمصفوفات متساوية.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 2-5 & 2+2 & 8-1 \\ 5+4 & 3+2 & 2+0 \end{bmatrix}_{2\times3} \Longrightarrow A = B.$$

Matrix addition

is an operation that takes two matrices as its input and produces a third matrix whose elements are the sum of the elements from these two matrices and are of the same degree.

جمع المصفوفات (: Matrix addition)

هي عملية تأخذ مصفوفتين اثنتين مدخلا لها، وتعطي مصفوفة ثالثة عناصرها هن مجموع العناصر من هذين المصفوفتين وتكون من نفس الدرجة . على سبيل المثال:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}.$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

AND

$$B + A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$.A + B = B + A$

ملاحظة: **عملية الجمع تبديلية- عملية الجمع تجميعية-**

Matrix subtraction

It is an operation that takes two matrices as its input, and gives a third matrix whose elements are the subtraction of the elements from these two matrices and which are of the same degree.

طرح المصفوفات (Matrix addition :)

هي عملية تأخذ مصفوفتين اثنتين مدخلا لها، وتعطي مصفوفة ثالثة عناصرها هن طرح العناصر من هذين المصفوفتين وتكون من نفس الدرجة. على سبيل المثال:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -15 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

AND

$$B - A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -15 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 15 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$.A - B \neq B - A$$

Multiplying a matrix by a real number:

Let $\alpha \in R$ be a real number., and we have the matrix $(a_{ij})_{m\times n}$ The product of multiplying this matrix by the number is let us symbolize. The real $\alpha.(a_{ij})_{m\times n}$ is the matrix of its elements. These are the elements of the matrix The same after multiplying each of them by the real number.

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

لتكن العدد الحقيقي $\alpha \in R$. و لدينا المصفوفة $(a_{ij})_{m\times n}$ إن حاصل ضرب هذه المصفوفة بالعدد بـ لـه لنرمز و $\alpha \in R$ الحقيقي $\alpha.(a_{ij})_{m\times n}$ هو مصفوفة عناصرها هي عناصر المصفوفة نفسها بعد ضرب كل منها بالعدد الحقيقي . α

مثل $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ و $\alpha = 2$ فان $\alpha.A = \begin{bmatrix} -6 & 8 & -14 \\ 18 & 10 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

ضرب مصفوفة بمصفوفة:

ان الشرط الضروري لإمكانية ضرب مصفوفتين هو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (اليسرى في عملية الضرب) مساويًا عدد أسطر الثانية (اليمنى في عملية الضرب)، أي أن يكون الدليلان المتجاوران في مرتبتيهما متساويين. وتكون مرتبة ناتج عملية الضرب هما الدليلين المتباعدين. فإذا فرضنا أن المصفوفتين $(a_{ij})_{m\times n}$ و $(b_{ij})_{n\times p}$ كانتا على النحو التالي: فرضنا أن المصفوفة

فإن عملية ضرب هاتين المصفوفتين .ممكنة لأن الدليلين المتجاورين متساويان $(c_{ij})_{m\times p}$. وإذا رمزنا لناتج عملية ضرب هاتين المصفوفتين .

Matrix Multiplication

matrix multiplication is met: We must first ensure that the number of columns of the first matrix participating in the multiplication process is equal to the number of rows of the second matrix, to ensure that the two matrices can be multiplied.

Drawing the resulting matrix: Draw a new, empty third matrix, which is the resulting matrix, so that the number of its rows is equal to the number of rows of the first matrix, and the number of its columns is equal to the number of columns of the second matrix.

Performing the first dot multiplication: Dot multiply the first row in the first matrix by the first column of the second matrix, to give us the first element in the resulting matrix (a_{11}), then dot multiply the first row in the first matrix by the second column of the second matrix, to give us the second element in the resulting matrix (a_{21}).), and so on until we finish all the columns of the second matrix.

Performing the second dot multiplication: Dot multiply the second row in the first matrix by the first column of the second matrix, to give us element (a_{21}) in the resulting matrix, then dot multiply the second row in the first matrix by the second column of the second matrix, to give us element (a_{22}) in the resulting matrix, And so on until we finish all the columns of the second matrix.

Repeat the multiplication process to find all the elements of the resulting matrix: We continue multiplying the remaining rows of the first matrix by the columns of the second matrix - if they exist - in the same way as before; Until we find all the elements of the resulting new matrix.

ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات: يجب أولًا التأكد من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى المشاركة في عملية الضرب مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية، لنتأكد من إمكانية ضرب المصفوفتين.

رسم المصفوفة الناتجة: رسم مصفوفة ثالثة جديدة فارغة، وهي المصفوفة الناتجة، بحيث يكون عدد صفوفها مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الأولى، وعدد أعمدتها مساوي لعدد أعمدة المصفوفة الثانية.

إجراء الضرب النقطي الأول: ضرب الصف الأول في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الأول للمصفوفة الثانية، ليعطينا أول عنصر في المصفوفة الناتجة (a_{11})، ثم نضرب الصف الأول في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الثاني للمصفوفة الثانية، ليعطينا ثاني عنصر في المصفوفة الناتجة (a_{21})، وهكذا حتى ننهي جميع أعمدة المصفوفة الثانية.

إجراء الضرب النقطي الثاني: ضرب الصف الثاني في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الأول للمصفوفة الثانية، ليعطينا العنصر (a_{21}) في المصفوفة الناتجة، ثم نضرب الصف الثاني في المصفوفة الأولى ضربًا نقطيًا بالعمود الثاني للمصفوفة الثانية، ليعطينا العنصر (a_{22}) في المصفوفة الناتجة، وهكذا حتى ننهي جميع أعمدة المصفوفة الثانية.

تكرار عملية الضرب لإيجاد جميع عناصر المصفوفة الناتجة: نكمل ضرب باقي صفوف المصفوفة الأولى بأعمدة المصفوفة الثانية -إن وُجدت- بنفس الطريقة السابقة؛ حتى نجد جميع عناصر المصفوفة الجديدة الناتجة.

على سبيل المثال

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&-1&5\\1&2&3\end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{and} \quad B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&1&2\end{bmatrix}_{2\times3}.$$

فأوجد AB وكذلك اوجدBA ؟

الحل:

لا يمكن الحصول على AB لان ابعاد المصفوفتين غير متوافق:

لكن العكس ممكنBA

$$BA=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&1&2\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}3&2&1\\0&-1&5\\1&2&3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2(3)+(-1)0+1(1) & 2(2)+(-1)(-1)+1(2) & 2(1)+(-1)5+1(3)\\ 3(3)+1(0)+2(1) & 3(2)+1(-1)+2(2) & 3(1)+1(5)+2(3)\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$BA=\begin{bmatrix}7&7&0\\11&9&14\end{bmatrix}_{2\times3}$$

- **ملاحظة** :
- **عملية ضرب مصفوفتان متوافقة من حيث الرتبة .**
- **ضرب المصفوفات ليس ابدالي إلا في حالات خاصة أي أن:AB ≠BA .**
- **عملية ضرب المصفو فات تجميعية:**

Determinants المحددات

For every square matrix there exist a function between the matrix and the value of scalar number , this function is called the Determinant of matrix ,and denoted by (det(A) or A).

لكل مصفوفة مربعة توجد دالة بين المصفوفة وقيمة العدد العددي، تسمى هذه الدالة محدد المصفوفة، ويرمز له بـ (det(A) أو A).

خواص المحددات

1):- If all elements of one row (or column) of A are zero ,then $|A|=0$. .

$$Example: \quad A=\begin{bmatrix}-3&0&7\\9&0&2\end{bmatrix}_{2\times3} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-3&0&7\\9&0&2\end{vmatrix}=0$$

(2):- If there exist two rows (or columns) are equal then $|A|=0$.

$$Example: \quad A=\begin{bmatrix}-3&-3&7\\9&9&2\end{bmatrix}_{2\times3} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-3&-3&7\\9&9&2\end{vmatrix}=0.$$

(3):- If two rows and (or columns) of A are interchanges then the determinant of the resulting matrix B is(- A) , i.e B = - A .

Example :

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&-1&0\\4&3&2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=(3)(-1)(2)+0+0-0-0-(1)(-1)(2)=-4.$$

$$B=\begin{bmatrix}4&3&2\\-1&-1&0\\3&1&0\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |B|=-|A|=4.$$

(4) :- If two rows (columns) of matrix A are proportional ,then $|A|=0$.

Example :

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&-1&0\\4&2&8\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=0.$$

(5) :- If a matrix B results from a matrix A by multiplying all elements of A by k then $B = k\,A \Longrightarrow |B| = k\,|A|$, i.e ($|kA| = |k\,A|$).

Example :

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&1&0\\4&3&2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=(3)(1)(2)+0+0-0-0-(1)(-1)(2)=8.$$

$$5.A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&1&0\\4&3&2\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}3&-1&0\\5&5&0\\4&3&2\end{bmatrix}_{3\times3}.$$

$$\Longrightarrow |5.A|=(3)(5)(2)+0+0-0-0-(5)(-1)(2)=30+10=40=5(8)=5|A|.$$

(6) :- If a matrix C results from a matrix A by multiplying all elements in one row (or column) of A by k, then C = kA , i.e (A = 1/ k C).

Example :

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\7&-3\end{bmatrix}_{2\times2} \Longrightarrow |A|=(1)(-3)+0=-3.$$

$$C=\begin{bmatrix}7&0\\7&-3\end{bmatrix}_{2\times2} \Longrightarrow |C|=(7)(-3)+0=-21.$$

$$C=7.A \Longrightarrow A=\frac{1}{7}\,C.$$

(7):- If a multiple of any row (or column) of a determinant is added to any other row (or column) ,then value of the determinant is not changed.

Example :

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&0\\3&6&2\end{bmatrix}_{3\times3} \Longrightarrow |A|=(2)(1)(2)+0+0-0-0-(1)(-1)(2)=6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow |B| = (2)(-1)(2) + 0 + 0 - 0 - 0 - (5)(-1)(2) = 6.$$

(8):- The determinant of the product of two matrices is the product of their determinants ($|AB| = |A|\,|B|$) In general $|A_1 \,.\, A_2 \;\dots\dots\dots\dots A_n| = |A_1|\,.\,|A_2| \;\dots\dots\dots\; |A_n|$.

(9):- If A triangular matrix then the determinant of A is equal the product of the elements of main diagonal i.e($|A| = a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} \dots\dots\dots..\, a_{nn}$.

Example :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow |A| = (3)(1)(2) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow |A| = (3)(1)(2) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow |A| = (3)(1)(2) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6.$$

(10):- $|A| = |A^t|$.

Example :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow |A| = (3)(4)(2) + 0 + 0 - (2)(3)(1) - 0 - (1)(1)(2) = 16.$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow |A^t| = (3)(4)(2) + 0 + 0 - (2)(3)(1) - 0 - (1)(1)(2) = 16.$$

(11) :- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Methods for finding the inverse of a Matrix طرق ايجاد معكوس المصوفة

First method: Saros method (radiography)

The experiments will achieve that any square matrix with respect to the given matrix becomes the matrix extracted from the matrix $A = (a_{ij})_{m\times n}$, which we obtain after deleting row i and column j from the matrix $(a_{ij})_{m\times n}$.

الطريقة الاولى: طريقة ساروس(الشعاعية)

المحددات لتكون A أي المصفوفة مربعة فإننا نعرف محدد المصفوفة بأنها المصفوفة المستخرجة من المصفوفة $A = (a_{ij})_{m\times n}$ و التي نحصل عليها بعد حذف الصف i و العمود j من المصفوفة $(a_{ij})_{m\times n}$.

$$\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

مثال:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{array} = \begin{array}{c} (2)(7)(4) + (1)(0)(-1) + (-3)(5)(3) \\ -(-3)(7)(-1) - (2)(0)(3) - (1)(5)(4) \end{array}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} 56 + 0 - 45 \\ -21 - 0 - 20 \end{array} = -30$$

Socond method: Select a Row or Column for Matrix

This method is suitable for matrices of rows 2×2, 3×3, and 4×4, and its calculation can be explained using the example below:

الطريقة الثانية: اختيار صف او عمود من المصفوفة

تلائم هذه الطريقة للمصفوفات من الرتبة 2×2 و3×3 و4×4 ويمكن توضيح طريقة حسابها عن طريق المثال ادناه:

مثال :

محدد المصفوفة B من الرتبة 3×3 استنادا لطريقة المحدد Minors هو اختيار احد الصفوف او الاعمدة في مثالنا قمنا باختيار الصف الاول ثم تثبيت اشارات البدء بالحساب بالاشارة الموجبة وبعدها السالبة وبعدها الموجبة (بالتناوب) كما هو مبين هو:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

اختيار الصف الاول وتثبيت الاشارات

اختيار العنصر الاول من الصف الاول الذي تم تثبيت اشارة موجبة وضربة بالمحدد (يتم تحديد قيمة المحدد بعد حذف الصف والعمود الذي ينتمي له العنصر الاول داخل المصفوفة) وبعدها تثبيت الاشارة السالبة واخذ العنصر الثاني للصف الاول وضربة بالمحيدد المتبقي بعد حذف الصف والعمود الذي ينتمي له العنصر الثاني في الصف الاول و هكذا كما مبين ادناه:

$$|B| = (2)\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(28) - (1)(20) + (-3)(22)$$
$$|B| = 56 - 20 - 66 = -30$$

ملاحظة :لو اخترنا الصف الثاني او العمود الثالث لكان افضل وذلك لوجود العنصر (0)

ملاحظة : اذا كانت المصفوفة تحتوي على صف او اكثر او عمود او اكثر اصفار فان محددها يساوي صفر. واذا تناسب صفان او عمودان فان محدد المصفوفة يساوي صفر ايضاً .

Inverse Matrix المعكوس المصفوفة

If A is a square matrix and B is a matrix that fulfills the relationships $AB = I = BA$ where I is the neutral matrix, then matrix A is said to be invertible, and matrix B is called the inverse of A, and the inverse is symbolized by the symbol A^{-1}.

اذا كانتA مصفوفة مربعة و كانت B مصفوفة تحقق العالقات $AB = I = BA$ حيث I المصفوفة المحايدة ، عندئذ يقال للمصفوفةA بانها قابلة لانعكاس (Convertible)و يطلق على المصفوفة B معكوس A و يرمز للمعكوس بالرمز A^{-1} .

The Adjoint of Matrix طريقة القانون او المصفوفة المرافقة

ملاحظة :-المصفوفة الغير مربعة ليست لها معكوس.

Example 1 :

Find inverse and determinate of inverse of the following system by

$$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 - x_3 = 0 \ .$$

Solution:

$$[A{:}I] \xrightarrow{?} [I{:}A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1=r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-2r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+4r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3=-r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+3r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad ,|A| = (1)(1)(-1) = -1 \ , \ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Example 2 :

Find inverse and determinate of inverse of the following system by $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

Solution:

$$[A:I] \xrightarrow{?} [I:A^{-1}]$$

$$\left[\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\right] \xrightarrow{r_2=r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=-\frac{1}{4}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-4r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{3}{4}&\frac{-1}{4}&\frac{-1}{4}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\-1&0&1\\\frac{3}{4}&\frac{-1}{4}&\frac{-1}{4}\end{bmatrix}\quad ,|A|=(-1)(1)(1)(-4)=4\ \ ,\ \ |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}.$$

Homework

Find inverse and determinate of inverse of the following

A) $4x_1-2x_2+x_3=7$
$4x_1-8x_2+x_3=-21$
$-2_1x_1+x_2+5x_3=15$

B) $3x_1-6x_2+7x_3=3$
$9x_1-5x_3=3$
$5x_1$-$8x_2$ $+6x_3=-4$.

Solving linear System of Equations

We can write the general system that content m equations and n variables as follow :

يمكن كتابة النظام العام الذي يحتوي على معادلات m ومتغيرات n على النحو التالي

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right\}\qquad\cdots(1)$$

By using matrices باستخدام المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}\ ,x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

Now, we can rewrite (1) as follows :- $Ax=b$ والآن يمكننا إعادة كتابة (1) على النحو التالي

Note:-

1- If the number of equations m is less than the number of variables n , then the system has a solution but not a unique.

إذا كان عدد المعادلات m أقل من عدد المتغيرات n فإن النظام له حل ولكنه ليس وحيدا.

2- If the number of equations m is more than the number of variables n, then the system has no solution at all.

إذا كان عدد المعادلات m أكبر من عدد المتغيرات n فإن النظام ليس له حل على الإطلاق .

3- If the number of equations m equal to number of variables n, then there exist unique solution if the matrix A has an inverse.

إذا كان عدد المعادلات m يساوي عدد المتغيرات n فهناك حل فريد إذا كانت المصفوفة A لها معكوس

4- If the number of equations mequal to number of variables n, then the homogeneous system $Ax = 0$ have unique solution is trivial solution $(x_i = 0 \ , \forall i)$.

إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات n فإن النظام المتجانس $Ax = 0$ يكون حله فريدا وهو الحل التافه $(x_i = 0 \ , \forall i)$.

There are two methods for solving linear system of equations:

(1)

(2) <u>Gauss elimination with partial pivoting</u> **<u>كاوس للحذف مع الارتكاز الجزئي</u>**

If $Ax = b$is a system of n linear equations .now we perform row operations until we convert A (After m steps) into an upper triangular matrix .

إذا كان $Ax = b$ عبارة عن نظام من المعادلات الخطية n. الآن نقوم بإجراء عمليات صفية حتى نحول A (بعد خطوات m) إلى مصفوفة مثلثية عليا.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
+ a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \\
a_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} + a_{(n-1)n}x_n &= b_{(n-1)} \\
+ a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
$$

$$\therefore a_{n_n} \neq 0 \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$\therefore a_{(n-1)(n-1)} \neq 0 \Rightarrow x_{(n-1)} = \frac{b_{(n-1)} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

In general if we find the value of $x_n, x_{(n-1)}, \cdots, x_2, x_1$ بشكل عام إذا وجدنا قيمة

Then $x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{k_k}}, \ k = n, n-1, \ldots, 2, 1$

<u>Example 3:</u>

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 5 \\
2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 3 \\
x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

<u>Solution:</u>

$$A=\begin{bmatrix}4&-9&2\\2&-4&6\\1&-1&3\end{bmatrix}_{3\times3}\quad,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1}\quad,\ b=\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\2&-4&6&3\\1&-1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&0.5\\1&-1&3&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1}{4}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&0.5\\0&1.25&2.5&2.75\end{array}\right)\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1.25}{0.5}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&0.5\\0&0&-10&1.5\end{array}\right)$$

$$x_3=\frac{1.5}{-10}=-0.15\ ,\ x_2=\frac{(b_2-a_{23}x_3)}{a_{22}}=\frac{(0.5-(5)(-0.15))}{0.5}=2.5,$$

$$x_1=\frac{(b_1-\sum_{j=2}^{3}a_{ij}x_j)}{a_{1_1}}=\frac{(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)}{a_{11}}=\frac{(5-(-9)(2.5)-2(0.15))}{4}=6.95,\ x=\begin{bmatrix}0.95\\2.5\\-0.15\end{bmatrix}$$

$$|A|=4(0.5)(-10)=-20$$

Example 4:

Use Gauss elimination to solve

$3x_1+2x_2-2x_3=16$

$4x_1+3x_2+3x_3=2$

$-2x_1+x_2\ -x_3=1$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\4&3&3\\-2&1&-1\end{bmatrix}_{3\times3}\quad,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1}\quad,\ b=\begin{bmatrix}16\\2\\1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\4&3&3&2\\-2&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{4}{3}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\0&0.3333&5.6667&-19.3333\\-2&1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+\frac{2}{3}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\0&0.3333&5.6667&-19.3333\\0&2.3333&-2.3333&11.6667\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{2.3333}{0.3333}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&16\\0&0.3333&5.6667&-19.3333\\0&0&-41.9987&147.0114\end{array}\right)$$

$$x_3=\frac{147.0114}{-41.9987}=-3.5\ ,\ x_2=\frac{(b_2-a_{23}x_3)}{a_{22}}=\frac{(-19.3333-(5.6667)(-3.5))}{0.3333}=1.5,$$

$$x_1 = \frac{(b_1-\sum_{j=2}^{3} a_{ij}x_j)}{a_{1_1}} = \frac{(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)}{a_{11}} = \frac{(16-2(-3.5)(2)(1.5))}{3} = 6.6667 \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 3(0.3333)(-41.9987) = -41.9945.$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant.

A) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$x_1 - x_2 - x_3 = 1$

B) $x_1 - x_2 = 0$
$2x_1 + x_3 = 4$
$-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$.

Partial Pivoting

الارتكاز الجزئي

المعادلة المســتخدمة لحذف أحد المتغيرات من المعادلات المتبقية تســمى معادلة الارتكاز ومعامل تلك المتغيرات في المعادلة يسمى عنصر الارتكاز في المثال السابق $a_{11} = 4$ هو عنصر الارتكاز والمعادلة الأولى هي معادلة الارتكاز في الخطوة الأولى. وفي الخطوة الثانية $a_{22} = 0.5$ عنصـــر الارتكاز والمعادلة الثانية هي معادلة الارتكاز وهكذا...

ولذلك فإن عملية اختيار معادلة الارتكاز تسمى الارتكاز الجزئي

ملاحظة:-

1- اســتخدم الارتكاز الجزئي (إذا كان واحد على الأقل من a_{ii}يســاوي أو يقترب من الصــفر لجميع i=1,2,...,n فيمكننا استخدام الارتكاز الجزئي عن طريق تغيير ترتيب المعادلات لضمان$a_{ii} \neq 0 \;\; \forall i = 1,2,\cdots n$.

2- (ان لا يكون عنصــر الارتكاز صــغير جدا لانه عندما نســتخدمه لحذف اي مجهول من المعادلات الاخرى وذلك بضــربه بالمقدار $\left(\frac{-a_{ik}}{a_{kk}}\right)$ في الســطر (الصــف) k مثلا فان المقدار هذا كبير جدا وعند ضــربه يكون يكون كبير جدا ايضا ثم يضاف الى المعادلات الاخرى فان مقدار خطا التدوير يكون كبير ويتضاعف في كل خطوة (من خطوات طريقة كـاوس للحـذف) لـذلـك في الخطوة k نختـار عنصـــر الارتكـاز من بين عنـاصـــر a_{ik} لقيم i=k+1,k+2,…,n بحيث ان $|a_{ik}|$ اكبر ما يمكن).

Example 5:

Solve the following systems of equations by the Gauss elimination with Partial pivoting:

r1: $0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$
r2: $5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$ has the exact solution $x_1 = 10 \; and \; x_2 = 1.$

Solution:

(by Gauss elimination) , we get

$A=\begin{bmatrix}0.003 & 59.14\\ 5.291 & -6.130\end{bmatrix}_{2\times2}$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}_{2\times1}$, $b=\begin{bmatrix}59.17\\ 46.78\end{bmatrix}_{2\times1}$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{cc|c}0.003 & 59.14 & 59.17\\ 5.291 & -6.130 & 46.78\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{5.291}{0.003}r_1}\left(\begin{array}{cc|c}0.003 & 59.14 & 59.17\\ 0 & -104300 & -104400\end{array}\right)$$

$x_2=\dfrac{104400}{104300}\Rightarrow x_2=1.001$.

$0.003x_1+59.14x_2=59.17\Rightarrow 0.003x_1+59.14(1.001)=59.17$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{(59.17-59.19914)}{0.003}\Rightarrow x_1=9.7133$

We note that the large error in the numerical solution for x_1 resulted from the small error of 0.001 in solving for x_2.

ونلاحظ أن الخطأ الكبير في الحل العددي لـ x_1 نتج عن الخطأ الصغير 0.001 في الحل لـx_2.

So we change the order of the equations in the linear system

لذلك نقوم بتغيير ترتيب المعادلات في النظام الخطي

r_1: $0.003x_1+59.14x_2=59.17$

r_2: $5.291x_1-6.130x_2=46.78$

By using the pivoting procedure , where   باستخدام الإجراء الارتكاز، حيث

$\max\left\{\left|a_{11}^{(1)}\right|,\left|a_{21}^{(1)}\right|\right\}=\max\{0.003,5.291\}=5.291.$

$5.291x_1-6.130x_2=46.781$

$0.003x_1+59.14x_2=59.17$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{cc|c}5.291 & -6.130 & 46.78\\ 0.003 & 59.14 & 59.17\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{0.003}{5.291}r_1}\left(\begin{array}{cc|c}5.291 & -6.130 & 46.78\\ 0 & 59.14 & 59.142\end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_2=1$ *and* $x_1=10$.

Example 6:

Find the following system solution by using Gauss elimination **with Partial pivoting**:

$3x_1+3x_2+9=0$

$2x_1-x_2+x_3=-1$

$3x_1+3x_2\ +5x_3=4.$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&3&9\\3&3&5\end{bmatrix}_{3\times3},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1},\quad b=\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\3&3&9&0\\3&3&5&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{3}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&4.5&7.5&1.5\\3&3&5&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{3}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&4.5&7.5&1.5\\0&4.5&3.5&5.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&4.5&7.5&1.5\\0&0&-4&4\end{array}\right)$$

$$x_3=\frac{-4}{4}\Rightarrow x_3=-1.$$

$$4.5x_2+7.5x_3=1.5\Rightarrow 4.5x_2=1.5-7.5(-1)\Rightarrow x_2=\frac{9}{4.5}=2$$

$$2x_1-x_2+x_3=-1\Rightarrow 2x_1=-1+x_2-x_3=-1+2-(-1)\Rightarrow x_1=\frac{2}{2}=1.$$

$$|A|=(-1)(1)(2)(3)=-6.$$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant.

A) $x_2+x_3=1$
$x_1+x_3=1$
$x_1+x_2=1$

B) $3x_1+2x_2+5x_3=1$
$x_1-x_2+x_3=4$
$6x_1+4x_2+10x_3=7.$

(3) Gauss – Jordan Elimination Method طريقة كاوس-جوردان للحذف

في هذا القسم، نتعلم كيفية حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عملية تسمى طريقة كاوس-جوردان. تبدأ العملية أولاً بالتعبير عن النظام كمصفوفة، ثم اختزاله إلى نظام مكافئ من خلال عمليات صفية بسيطة. وتستمر العملية حتى يصبح الحل واضحا من المصفوفة. تسمى المصفوفة التي تمثل النظام بالمصفوفة المعززة(القطرية)، وتسمى المعالجة الحسابية المستخدمة للانتقال من نظام إلى نظام مكافئ مخفض بعملية الصف.

The Gauss-Jordan elimination method to solve a system of linear equations is described in the following steps.

تم وصف طريقة الحذف كاوس-جوردان لحل نظام من المعادلات الخطية في الخطوات التالية.

1. اكتب المصفوفة الموسعة للنظام.
2. استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة الموسعة بالشكل الموضح أدناه، وهويسمى نموذج الصف المخفض.(RREF)

(أ) يتم تجميع الصفوف (إن وجدت) المكونة بالكامل من الأصفار معًا في الجزء السفلي من الصفحةمصفوفة.

(ب) في كل صف لا يتكون بالكامل من أصفار، يكون العنصر غير الصفري الموجود في أقصى اليسار هو 1يُسمى 1 عنصر القيادي أو المحورية

(ج) كل عمود يحتوي بدايته على 1 القيادي يحتوي على أصفار في جميع الإدخالات الأخرى.

(د) الرقم 1 القيادي في أي صف يقع على يسار أي رقم 1 القيادي في الصفوف التي تحته.

3. قم بإيقاف العملية في الخطوة 2 إذا حصلت على صف جميع عناصره أصفار باستثناء العنصر الأخير القيادي. وفي هذه الحالة يكون النظام غير متناسق وليس له حلول. بخلاف ذلك، أكمل الخطوة 2وقراءة حلول النظام من المصفوفة النهائية .

Example 7 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method.

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$

$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$

$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1.$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 = r_3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 = r_1 + \frac{3}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2.5 & -5.5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 = r_3 + 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2.5 & -5.5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{5}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-2.5&-5.5\\0&-2&0&-4\\0&0&-5&-15\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&2\\0&-2&0&-4\\0&0&-5&-15\end{array}\right)$$

$x_1=\dfrac{2}{2}=1, x_2=\dfrac{-4}{-2}=2\ and\ x_3=\dfrac{-15}{-5}=3.$

$|A|=1(2)(3)=6.$

Example 8 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method.

$4x_1-9x_2+2x_3=5$

$2x_1-4x_2+6x_3=3$

$x_1-x_2+3x_3=4.$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}4&-9&2\\2&-4&6\\1&-1&3\end{bmatrix}_{3\times3}\quad,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}_{3\times1}\quad,\ b=\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\2&-4&6&3\\1&-1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&-4.5\\1&-1&3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1}{4}r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}4&-9&2&5\\0&0.5&5&-4.5\\0&1.25&2.5&0.25\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+18r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&0&92&-76\\0&0.5&5&-4.5\\0&1.25&2.5&0.25\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-\frac{1.25}{0.5}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4&0&92&-76\\0&0.5&5&-4.5\\0&0&-10&11.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 0 & 92 & -76\\ 0 & 0.5 & 0 & 1.25\\ 0 & 0 & -10 & 11.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+\frac{92}{10}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 0 & 0 & 29.8\\ 0 & 0.5 & 0 & 1.25\\ 0 & 0 & -10 & 11.5\end{array}\right)$$

$$x_1=\frac{29.8}{4}=7.45, x_2=\frac{1.25}{0.5}=2.5\ and\ x_3=\frac{11.5}{-10}=-1.15.$$

$$|A|=7.45(2.5)(-1.15)=-21.4188.$$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss method of elimination, then find the determinant.

A- $x_1 - x_3 = 0$
$2x_1 - x_3 = -1$
$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$

B- $3x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$
$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4.$

Example 9 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method **with Partial pivoting**.

$$2x_1+3x_2+5x_3=8$$
$$x_1+x_2+x_3=5$$
$$4x_1+5x_3=2$$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times 3},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}_{3\times 1},\ b=\begin{bmatrix}5\\ 8\\ 2\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$[A:b]=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 8\\ 4 & 0 & 5 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2=r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 5 & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-4r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 1 & -18\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 9\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 1 & -18\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 9\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 13 & -26\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=\frac{1}{13}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 9\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

$x_1 = 5, x_2 = 4$ *and* $x_3 = -2.$ $|A| = (-1)(5)(4)(-2) = 40.$

Example 10 :

Solve the following system by using the Gauss-Jordan elimination method **with Partial pivoting**.

$$x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad , \; x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}_{3\times 1} \quad , \; b = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$[A{:}\,b] = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_2=r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3=\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&0.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&0&0.5\\0&0&1&0.5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0.5\\0&1&0&0.5\\0&0&1&0.5\end{array}\right)$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0.5.$ $|A| = (-1)(-1)(0.5)(0.5)(0.5) = 0.125.$

Homework

Solve the following systems of equations by the Gauss-Jordan elimination method **with Partial pivoting**, then find the determinant.

A- $-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$
$2x_1 + x_3 = 4$
$x_1 - x_2 = 0$

B- $-4x_1 + x_3 = 0$
$2x_1 - x_2 = -2$
$x_1 + x_2 - x_3 = 1.$

ملاحظة:-

يمكننا استخدام الارتكاز الجزئي بطريقة كاوس – جوردان.
يمكننا استخدام الارتكاز الجزئي عندما نجد معكوس المصفوفة.
يمكننا إيجاد معكوس المصفوفة بطريقة كاوس – جوردان واستخدام العملية السابقة للحصول على $[I : A^{-1}]$

Example 11 :

Find solution ,determinate, inverse and determinate of inverse of the following system by using Gauss – Jordan method **with Partial pivoting.**

أوجد الحل والمحدد والمعكوس ومحدد المعكوس في النظام التالي باستخدام طريقة كاوس – جوردان مع الارتكاز الجزئي.

$x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 = 1$

Solution:

$[A : b : I] \xrightarrow{?} [I : b : A^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1=r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=-\frac{r_3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.5 & \vdots & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0.5 & \vdots & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.5 & \vdots & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0.5 & \vdots & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0.5 & \vdots & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.5 & \vdots & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad , x_1 = x_2 = x_3 = 0.5 \quad ,$$

$$|A| = (-1)(1)(1)(-2) = 2 \quad , \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

Example 12 :

Find solution ,determinate, inverse and determinate of inverse of the following system by using Gauss – Jordan method **with Partial pivoting.**

$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 - x_2 = -1$

$x_1 - x_3 = 0$.

Solution:

$[A\!:b\!:I] \xrightarrow{?} [I\!:b\!:A^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1=r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2-2r_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 1 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+4r_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3=-r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1=r_1+r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 2 & \vdots & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2=r_2+3r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\ ,x_1=x_2=x_3=-1\ ,$$

$$|A|=(-1)(-1)(1)(1)(-1)=-1\ ,\ |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Homework

Find solution ,determinate, inverse and determinate of inverse of the following system by using Gauss – Jordan method **with Partial pivoting**.

A- $-4x_1+x_3=0$
$2x_1-x_2=-2$
$x_1+x_2-x_3=1$

B- $-2x_1+x_2-2x_3=1$
$2x_1+x_3=4$
$x_1-x_2=0.$