

الفرضية الثالثة: القيمة الذاتية والدالة الذاتية

تناولنا في المحاضرتين السابقتين الفرضيتين الاولى والثانية في الميكانيك الكمي حيث اختصت الفرضية الاولى بدالة الحالة الكمية للنظام وحالاتها وضروفها اما الفرضية الثانية فتناولت المؤثرات وصفاتها وكونها تعبر عن الملحوظات الفيزيائية الاعتيادية بتعبير الميكانيك الكمي ولكن كيفية عمل تلك المؤثرات على دوال الحالة الكمية وكيفية استخراج المعلومات الفيزيائية للنظام من خلال المؤثرات والدوال هو موضوع هذه الفرضية والتي تنص:

تستخلص القيمة العددية (القيمة الذاتية) لاي ملحوظ فيزيائي من خلال التأثير بواسطة المؤثر الكمي للمتغير الديناميكي على دالة الحالة الكمية وان ناتج العملية ككل يكون عدد ثابت يسمى القيمة الذاتية لذلك المؤثر مضروب في نفس الدالة والتي سيصبح اسمها الدالة الذاتية لذلك المؤثر ويمثل هذا الشرط بالعلاقة

$$\hat{A}\Psi = a\Psi \dots\dots\dots (1 - 4)$$

مثال: هل ان الدالة (e^{3-2x}) دالة ذاتية للمؤثر $\frac{d}{dx}$

الجواب/

$$\frac{d}{dx}(e^{3-2x}) = -2 * e^{3-2x}$$

∴ الدالة (e^{3-2x}) دالة ذاتية للمؤثر $\frac{d}{dx}$ وقيمتها الذاتية = -٢.

مثال: هل ان الدالة $\sin(2\pi vt)$ دالة ذاتية للمؤثر $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(\sin(2\pi vt)) = 2\pi v * \cos(2\pi vt)$$

∴ الدالة $\sin(2\pi vt)$ غير ذاتية للمؤثر $\frac{d}{dx}$ لان نتيجة التأثير غيرت شكل الدالة الاصلي وحولته من $\sin(2\pi vt)$ الى $\cos(2\pi vt)$

مثال: هل ان الدالة في المثال السابق دالة ذاتية للمؤثر $\frac{d^2}{dt^2}$

$$\frac{d}{dt}(\sin(2\pi vt)) = 2\pi v * \cos(2\pi vt)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin(2\pi vt)) = -4\pi^2 v^2 \sin(2\pi vt)$$

∴ الدالة $\sin(2\pi vt)$ دالة ذاتية للمؤثر $\frac{d^2}{dt^2}$ وقيمتها الذاتية = $-4\pi^2 v^2$

مثال/ جد القيمة الذاتية لمؤثر الطاقة الحركية للإلكترون في بعدين الذي دالة موجته $\Phi = Ae^{2x+3y}$

$$\hat{T}\Phi = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Ae^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ae^{2x+3y}) = 2 * Ae^{2x+3y} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ae^{2x+3y}) = 4 * Ae^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ae^{2x+3y}) = 3 * Ae^{2x+3y} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Ae^{2x+3y}) = 9 * Ae^{2x+3y}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Ae^{2x+3y} = \frac{-\hbar^2}{2m} (4 + 9) Ae^{2x+3y} = \frac{-13\hbar^2}{2m} * Ae^{2x+3y}$$

إذا القيمة الذاتية $\frac{-13\hbar^2}{2m}$

س/ ما القيمة الذاتية لمؤثر الزخم الخطي في بعد واحد إذا كانت الدالة الذاتية للنظام $\Phi = Ae^{-ikx}$ حيث ان k عدد ثابت

$$\hat{P}_x\Phi = -i\hbar \frac{d}{dx}(Ae^{-ikx})$$

$$= -i\hbar * -iK * Ae^{-ikx} = -k\hbar Ae^{-ikx}$$

إذا القيمة الذاتية $-k\hbar$

مثال: جد القيمة الذاتية للطاقة الحركية للإلكترون دالة الموجة $\Phi = 5 \sin(\frac{2\pi x}{L})$ في بعد واحد

الجواب / مؤثر الطاقة الحركية في بعد واحد هو $\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$

$$\hat{T}_x\Phi = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (5 \sin(\frac{2\pi x}{L}))$$

$$\frac{d}{dx} (5 \sin(\frac{2\pi x}{L})) = \frac{2\pi}{L} * 5 \cos(\frac{2\pi x}{L})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (5 \sin(\frac{2\pi x}{L})) = \frac{-4\pi^2}{L^2} * 5 \sin(\frac{2\pi x}{L})$$

$$\therefore \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (5 \sin(\frac{2\pi x}{L})) = \frac{-\hbar^2}{2m} * \frac{-4\pi^2}{L^2} * (5 \sin(\frac{2\pi x}{L}))$$

$$= \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2} = \frac{h^2}{2mL^2}$$

س/ ما القيمة الذاتية لمؤثر الزخم الخطي إذا كانت الدالة الذاتية للنظام Ae^{-ix}

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} (Ae^{2x}) = -i\hbar * 2 * Ae^{2x}$$

القيمة الذاتية $-2i\hbar$